Série n°1

Intégrales Simples et Multiples

(Exercices supplémentaires avec solutions)

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg} x \, dx \qquad \int \frac{2x\cos[\ln(x^2+1)]}{x^2+1} dx \qquad \int_0^1 xe^x dx \qquad \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+3} dx \qquad \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}} \qquad \int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x} dx$$

Solutions

1. On a

$$\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg} x \, dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

Effectuons un changement de variable :

$$u = \cos x \;\Rightarrow\; du = -\sin x \, dx$$

Sachant que :

$$u = \cos x \;\Rightarrow\; \begin{cases} pour\;\; x = 0 \;\Rightarrow u = \cos 0 = 1 \\ pour\;\; x = \dfrac{\pi}{3} \;\Rightarrow u = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

d'où

$$\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg} x \, dx = \int_1^{1/2} \frac{-du}{u} = -[\ln u]_1^{1/2} = -\left(\ln\frac{1}{2} - \ln 1\right) = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$$

2. Effectuons un changement de variable :

$$v = x^2 + 1 \;\Rightarrow\; dv = 2xdx$$

d'où

$$\int \frac{2x\cos[\ln(x^2+1)]}{x^2+1} dx = \int \frac{\cos[\ln v]}{v} dv$$

Effectuons un second changement de variable :

$$h = \ln v \;\Rightarrow\; dh = \frac{dv}{v}$$

d'où

$$\int \frac{2x\cos[\ln(x^2+1)]}{x^2+1}dx = \int \frac{\cos[\ln v]}{v}dv = \int \cos h\, dh = \sin h = \sin[\ln(x^2+1)] + C^{te}$$

3. Utilisant l'intégration par parties. On a :

$$\begin{cases} u = x \\ v' = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = e^x \end{cases}$$

d'où

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = (1e^1 - 0e^0) - [e^x]_0^1 = e - (e-1) = 1$$

4. Effectuons un changement de variable :

$$t = 1 + \sqrt{x} \;\Rightarrow\; \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \;\Rightarrow\; dx = 2\sqrt{x}\,dt \ldots (3)$$

D'autre part

$$t = 1 + \sqrt{x} \;\Rightarrow\; \sqrt{x} = t - 1 \ldots (4)$$

En substituant l'équation (4) dans l'équation (3), on obtient :

$$dx = 2(t-1)dt$$

Ainsi

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2(t-1)dt}{t} = 2\int \frac{(t-1)}{t}dt = 2\int \left(1 - \frac{1}{t}\right)dt = 2\int dt - 2\int \frac{1}{t}dt = 2t - 2\ln t$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2\left(1+\sqrt{x}\right) - 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C = 2 + 2\sqrt{x} - 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C^{te}$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C^{te}$$

5. Effectuons un changement de variable :

$$z = x + 3 \;\Rightarrow\; dz = dx$$

et

$$z = x + 3 \;\Rightarrow\; x = z - 3 \;\Rightarrow\; x^2 = (z-3)^2$$

sachant que :

$$z = x + 3 \Rightarrow \begin{cases} pour\;\; x = 0 \;\Rightarrow\; z = 3 \\ pour\;\; x = 1 \;\Rightarrow z = 4 \end{cases}$$

Ainsi

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+3}dx = \int_3^4 \frac{(z-3)^2}{z}dz = \int_3^4 \frac{z^2 - 6z + 9}{z}dz = \int_3^4 \left(z - 6 + \frac{9}{z}\right)dz = \left[\frac{z^2}{2} - 6z + 9\ln z\right]_3^4$$

$$= (8 - 24 + 9\ln 4) - \left(\frac{9}{2} - 18 + 9\ln 3\right) = -2{,}5 + 9(\ln 4 - \ln 3) = -2{,}5 + 9\ln\frac{4}{3} \approx 0{,}089$$

6. Effectuons un changement de variable :

$$u = 1 + x \;\Rightarrow\; du = dx$$

et

$$u = 1 + x \;\Rightarrow\; x = u - 1$$

sachant que :

$$u = 1 + x \Rightarrow \begin{cases} pour\;\; x = 0 \;\Rightarrow\; z = 1 \\ pour\;\; x = 1 \;\Rightarrow z = 2 \end{cases}$$

Ainsi

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}} = \int_1^2 \frac{(u-1)du}{\sqrt{u}} = \int_1^2 \left(\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}\right) du = \int_1^2 u^{1/2} du - \int_1^2 u^{-1/2} du$$

Sachant que :

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

On a, donc :

$$\int_1^2 \frac{(u-1)du}{\sqrt{u}} = \left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_1^2 - \left[\frac{u^{1/2}}{1/2}\right]_1^2 = \frac{2}{3}\left[\sqrt{u^3}\right]_1^2 - 2\left[\sqrt{u}\right]_1^2 = \frac{2}{3}(\sqrt{8}-1) - 2(\sqrt{2}-1)$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{8} - \frac{2}{3} - 2\sqrt{2} + 2 = \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3} - 2\sqrt{2} + 2 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2} \approx 0{,}39$$

7. Effectuons un changement de variable :

$$w = \ln x \quad \Rightarrow \quad dw = \frac{dx}{x}$$

sachant que :

$$\begin{cases} pour \;\; x = 1 \;\Rightarrow w = \ln 1 = 0 \\ pour \;\; x = 2 \;\Rightarrow\; w = \ln 2 \end{cases}$$

D'où

$$\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int_0^{\ln 2} w^2 dw = \left[\frac{w^3}{3}\right]_0^{\ln 2} = \frac{(\ln 2)^3}{3} \approx 0{,}11$$

Exercice 2

1. En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer un équivalent simple des sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+k} \qquad\qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} \qquad\qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$$

2. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3+k}$$

Solutions

1. On a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\left(2+\frac{k}{n}\right)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(2+\frac{k}{n}\right)}$$

Sachant que (formule de Riemann) :

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \quad \text{avec} \quad x_k = a + (b-a)\frac{k}{n}$$

Ainsi, si on pose :

$$b - a = 1 \;\; \text{et} \;\; a = 2 \Rightarrow b = 3 \qquad \text{et} \qquad f(x_k) = \frac{1}{x_k}$$

A l'aide de la formule de Riemann, on peut écrire :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(2+\frac{k}{n}\right)} \approx \int_2^3 \frac{dx}{x}$$

Or

$$\int_2^3 \frac{dx}{x} = [\ln x]_2^3 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(2+\frac{k}{n}\right)} \approx \ln\frac{3}{2}$$

2. On a :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2\left(1+2\frac{k}{n}\right)}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\sqrt{1+2\frac{k}{n}}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+2\frac{k}{n}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+2\frac{k}{n}}}\right)$$

posons :

$$b-a=2 \quad \text{et} \quad a=1 \Rightarrow b=3 \qquad \text{et} \qquad f(x_k)=\frac{1}{\sqrt{x_k}}$$

A l'aide de la formule de Riemann, on peut écrire :

$$\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+2\frac{k}{n}}} \approx \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Or

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_1^3 x^{-1/2}dx = \left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_1^3 = 2\left[\sqrt{x}\right]_1^3 = 2\left(\sqrt{3}-1\right) = 2\sqrt{3}-2$$

donc

$$\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+2\frac{k}{n}}} \approx 2\sqrt{3}-2 \ \Rightarrow \ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+2\frac{k}{n}}}\right) \approx \frac{1}{2}\left(2\sqrt{3}-2\right) \approx \sqrt{3}-1 \approx 0{,}73$$

3. On a :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{n\frac{k}{n}}{n^2\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\left[1+\left(0+\frac{k}{n}\right)^2\right]}$$

posons :

$$b-a=1 \quad \text{et} \quad a=0 \Rightarrow b=1 \qquad \text{et} \qquad f(x_k)=\frac{x_k}{1+x_k^2}$$

A l'aide de la formule de Riemann, on peut écrire :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\left[1+\left(0+\frac{k}{n}\right)^2\right]} \approx \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$$

Effectuons un changement de variable pour calculer l'intégrale précédente :

$$w=1+x^2 \ \Rightarrow \ dw=2xdx \ \Rightarrow \ \frac{1}{2}dw = xdx$$

tel que :

$$\begin{cases} pour \ \ x=0 \ \Rightarrow w=1 \\ pour \ \ x=1 \ \Rightarrow \ w=2 \end{cases}$$

D'où

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dw}{w} = \frac{1}{2}[w]_1^2 = \frac{1}{2}$$

donc

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\left[1+\left(0+\frac{k}{n}\right)^2\right]} \approx \frac{1}{2}$$

4. Revenant à la formule de Riemann. On a :

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

Si n est très grand ($n \to +\infty$), alors on peut écrire avec précision (c.-à-d. on utilise = au lieu de ≈) :

$$\int_a^b f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \qquad \text{... (1)}$$

Cette expression est utilisée pour résoudre l'équation en question. On a :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(0+1\frac{k}{n}\right)^2}$$

posons :

$$b-a=1 \quad \text{et} \quad a=0 \Rightarrow b=1 \qquad \text{et} \qquad f(x_k)=\frac{1}{1+x_k^2}$$

Ainsi, à l'aide de l'équation (1), il est possible d'écrire :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

Pour calculer l'intégrale précédente, effectuons le changement de variable suivant :

$$x = \operatorname{tg} w \;\Rightarrow\; dx = (1+\operatorname{tg}^2 w)dw = (1+x^2)dw \;\Rightarrow\; dw = \frac{dx}{1+x^2}$$

et

$$\begin{cases} pour\ \ x=0 \ \Rightarrow w=0 \\ pour\ \ x=1 \ \Rightarrow w=\pi/4 \end{cases}$$

D'où

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^{\pi/4} dw = [w]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}$$

Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}$$

5. On a :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3+k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\left(3+\frac{k}{n}\right)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3+\frac{k}{n}}$$

posons :

$$b-a=1 \quad \text{et} \quad a=3 \Rightarrow b=4 \qquad \text{et} \qquad f(x_k)=\frac{1}{3+x_k}$$

A l'aide de la formule de Riemann, on peut écrire :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3+k} = \int_3^4 \frac{dx}{3+x} = [\ln(3+x)]_3^4 = \ln 7 - \ln 6 = \ln\frac{7}{6} \approx 0{,}15$$

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

$$\iint_{D_1} 3\, dxdy \qquad D_1 = \left\{(x,y)\epsilon R^2 /\ 2 \geq x\,, x\geq -3, y\leq x^2+1, y\geq -\frac{x}{2}\right\}$$

$$\iint_{D_2} x\, dxdy \qquad D_2 = \{(x,y)\epsilon R^2\ /4-x^2 \geq y \geq 0\} \qquad\qquad \iint_{D_3} e^x dxdy \qquad D_3 = \{(x,y)\epsilon R^2\ /y\geq x^2, 2x\geq y\}$$

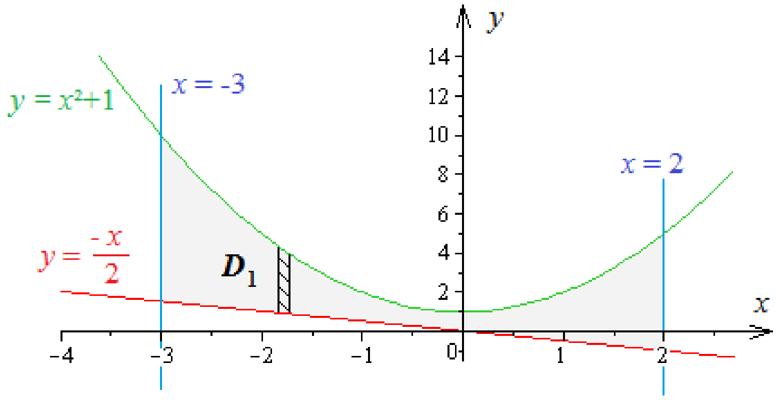
$$\iint_{D_4} y\,dxdy \qquad D_4 = \{(x,y)\epsilon R^2/x^2+y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}$$

$$\iint_{D_5} x\ln y\,dxdy \qquad D_5 = \{(x,y)\epsilon R^2/x > -2, y > 1, x < 3, y < 4\}$$

Solutions

1. Les frontières du domaine D_1 sont : $x=-3$, $x=2$, $y=-x/2$ et $y=x^2+1$, comme schématisé sur la figure suivante. Ainsi, on a :

$$\iint_{D_1} 3\,dxdy = 3\int_{-3}^{2}\left(\int_{-x/2}^{x^2+1} dy\right)dx$$



avec

$$\int_{-x/2}^{x^2+1} dy = (y)_{-x/2}^{x^2+1} = (x^2+1)-(-x/2)$$

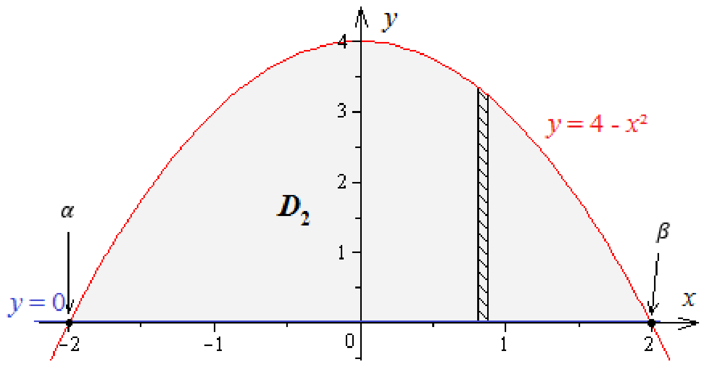
et

$$\iint_{D_1} 3\,dxdy = 3\int_{-3}^{2}\left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)dx$$

$$= 3\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}+x\right]_{-3}^{2} = 3\left[\left(\frac{8}{3}+1+2\right)-\left(-9+\frac{9}{4}-3\right)\right] = 46{,}25$$

2. Les frontières du domaine D_2 sont : $y=0$ et $y=4-x^2$, comme schématisé sur la figure suivante. Ainsi, on a :

$$\iint_{D_2} x\,dxdy = \int_{\alpha}^{\beta}\left(\int_{0}^{4-x^2} x\,dy\right)dx$$



tel que α et β sont les abscisses des points d'intersections entre la courbe $4-x^2$ et l'axe xx $(y=0)$. Elles sont obtenues en posant :

$$y = 4-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$
$$\Rightarrow \alpha = -2 \text{ et } \beta = 2$$

D'où

$$\iint_{D_2} x\,dxdy = \int_{-2}^{2}\left(\int_{0}^{4-x^2} x\,dy\right)dx$$

Or

$$\int_{0}^{4-x^2} x\,dy = x[y]_0^{4-x^2} = x(4-x^2-0) = 4x-x^3$$

et

$$\iint_{D_2} x\,dxdy = \int_{-2}^{2}(4x-x^3)dx = \left[2x^2-\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{2} = [(8-4)-(8-4)] = 0$$

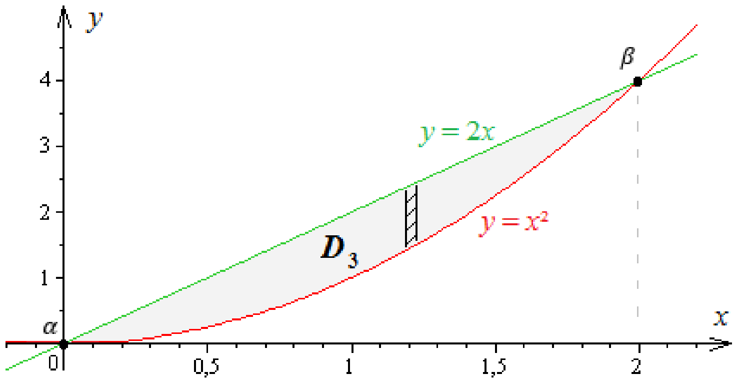
3. Les frontières du domaine D_3 sont : $y=2x$ et $y=x^2$, comme schématisé sur la figure suivante. Ainsi, on a :

$$\iint_{D_3} e^x dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{x^2}^{2x} e^x dy \right) dx$$

tel que α et β sont les abscisses des points d'intersections entre les courbes $y = x^2$ et $y = 2x$.

Elles sont obtenues en posant :

$$y = x^2 = 2x \;\Rightarrow\; x = 0 \;\text{ ou }\; x = 2$$
$$\Rightarrow\; \alpha = 0 \;\text{ et }\; \beta = 2$$



D'où

$$\iint_{D_3} e^x dxdy = \int_{0}^{2} \left(\int_{x^2}^{2x} e^x dy \right) dx$$

Or

$$\int_{x^2}^{2x} e^x dy = e^x \int_{x^2}^{2x} dy = e^x [y]_{x^2}^{2x} = e^x(2x - x^2) = 2xe^x - x^2e^x$$

et

$$\iint_{D_3} e^x dxdy = \int_0^2 (2xe^x - x^2e^x)dx = 2\int_0^2 xe^x dx - \int_0^2 x^2e^x dx \qquad \text{... (1)}$$

En Utilisant l'intégration par parties, la dernière intégrale dans l'équation (1) donne :

$$\begin{cases} u = x^2 \\ v' = e^x \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} u' = 2x \\ v = e^x \end{cases} \;\Rightarrow\; \int_0^2 x^2e^x dx = [x^2e^x]_0^2 - 2\int_0^2 xe^x dx \qquad \text{... (2)}$$

En substituant l'équation (2) dans l'équation (1), on obtient :

$$\iint_{D_3} e^x dxdy = 2\int_0^2 xe^x dx - [x^2e^x]_0^2 + 2\int_0^2 xe^x dx = 4\int_0^2 xe^x dx - 4e^2 \qquad \text{... (3)}$$

Utilisons, encore, l'intégration par parties pour calculer l'intégrale restante :

$$\begin{cases} u = x \\ v' = e^x \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} u' = 1 \\ v = e^x \end{cases} \;\Rightarrow\; \int_0^2 xe^x dx = [xe^x]_0^2 - \int_0^2 e^x dx = 2e^2 - [e^x]_0^2$$

$$\Rightarrow \int_0^2 xe^x dx = 2e^2 - (e^2 - 1) = e^2 + 1 \qquad \text{... (4)}$$

Enfin, en substituant l'équation (4) dans l'équation (3) on obtient :

$$\iint_{D_3} e^x dxdy = 4(e^2 + 1) - 4e^2 = 4$$

4. Les frontières du domaine ***D₄*** sont : $x = 0$, $y = 0$ et le demi-cercle supérieur, comme schématisé sur la figure suivante. L'équation du demi-cercle supérieur est obtenue comme suit :

$$x^2 + y^2 = 4 \;\Rightarrow\; y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow\; y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

Or, l'équation $y = \sqrt{4 - x^2}$ est l'équation du demi-cercle supérieur et $y = -\sqrt{4 - x^2}$ est l'équation du demi-cercle inférieur. Ainsi, on a :

$$\iint_{D_4} y\, dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} y\, dy \right) dx$$

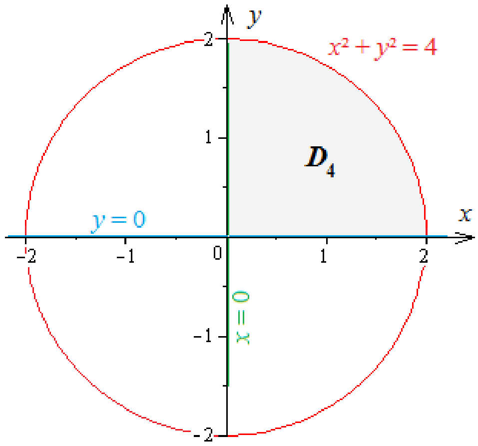
avec

$$\int_0^{\sqrt{4-x^2}} y\, dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-x^2}{2} = 2 - \frac{x^2}{2}$$

et

$$\iint_{D_4} y\, dxdy = \int_0^2 \left(2 - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left[2x - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{6} = \frac{16}{6}$$

$$= \frac{8}{3} \approx 2{,}67$$

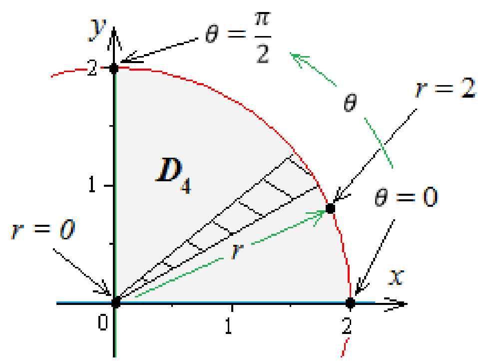


2ème méthode : utilisons les coordonnées polaires. Dans ce cas, on a :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ dxdy = r\, drd\theta \end{cases} \Rightarrow \iint_{D_4} y\, dxdy = \iint_{D_4} r\sin\theta\, r\, drd\theta = \int_0^2 \left(\int_0^{\pi/2} r^2 \sin\theta\, d\theta \right) dr$$

Puisque les bornes d'intégrations sont constantes, l'intégrale précédente se sépare comme suit :

$$\int_0^2 \left(\int_0^{\pi/2} r^2 \sin\theta\, d\theta \right) dr = \int_0^2 r^2 dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta$$



tel que

$$\int_0^2 r^2 dr = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta = [-\cos\theta]_0^{\pi/2} = 1$$

Par conséquent

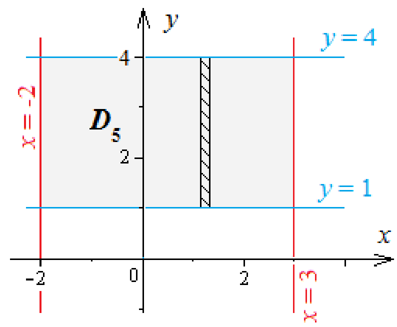
$$\iint_{D_4} y\, dxdy = \int_0^2 r^2 dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta = \frac{8}{3} \times 1 = \frac{8}{3}$$

5. Les frontières du domaine ***D*₅** sont : $x = -2$, $x = 3$, $y = 1$ et $y = 4$, comme schématisé sur la figure suivante. Ainsi, on a :

$$\iint_{D_5} x \ln y\, dxdy = \int_{-2}^{3} \left(\int_1^4 x \ln y\, dy \right) dx$$

Puisque les bornes d'intégrations sont toutes constantes, alors l'intégrale précédente se sépare comme suit :

$$\iint_{D_5} x \ln y\, dxdy = \int_{-2}^{3} x\, dx \int_1^4 \ln y\, dy$$



tel que

$$\int_{-2}^{3} x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{3} = \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2}$$

Utilisons l'intégration par parties pour calculer la deuxième intégrale. On a :

$$\begin{cases} u = \ln y \\ v' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1/y \\ v = y \end{cases} \Rightarrow \int_1^4 \ln y\, dy = [y \ln y]_1^4 - \int_1^4 y \frac{1}{y} dy = (4\ln 4 - \ln 1) - \int_1^4 dy = 4\ln 4 - 3$$

D'où

$$\iint_{D_5} x \ln y\, dxdy = \frac{5}{2}(4\ln 4 - 3) \approx 6{,}36$$

Exercice 4

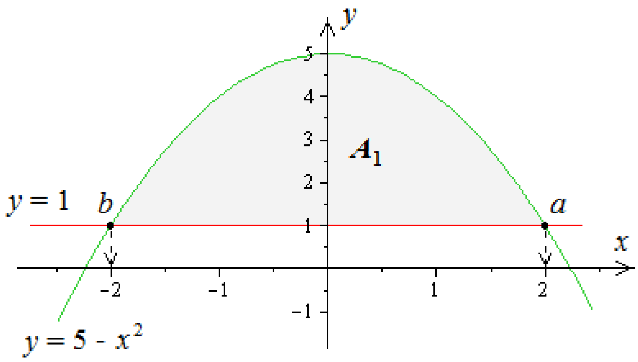
Calculer les aires des domaines suivants :

1. Le domaine $\boldsymbol{A_1}$ est délimité par les courbes : $y = 5 - x^2$ et $y = 1$.
2. Le domaine $\boldsymbol{A_2}$ est délimité par les courbes : $x = 0$, $y = \sin x$ et $y = \cos x$.
3. Le domaine $\boldsymbol{A_3}$ est délimité par les courbes : $y = 2 - x^2$ et $y = x - 1$.

Solutions

1. Par définition, l'aire du domaine $\boldsymbol{A_1}$ est calculée par l'intégrale suivante :

$$aire\ de\ \boldsymbol{A_1} = \iint_{A_1} dxdy$$



Ainsi

$$aire\ de\ \boldsymbol{A_1} = \int_b^a \left(\int_1^{5-x^2} dy \right) dx$$

avec

$$\int_1^{5-x^2} dy = [y]_1^{5-x^2} = (5 - x^2) - 1 = 4 - x^2$$

D'autre part, *a* et *b* sont les abscisses des points d'intersections entre les courbes $y = 1$ et $y = 5 - x^2$. Elles sont obtenues en posant :

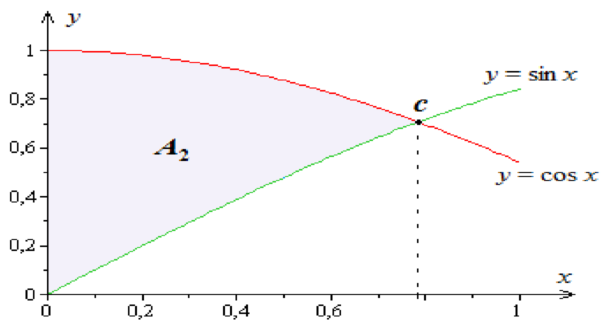
$$y = 1 = 5 - x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$
$$\Rightarrow b = -2 \text{ et } a = 2$$

donc

$$aire\ de\ \boldsymbol{A_1} = \int_{-2}^{2} (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \approx 10{,}67$$

2. L'aire du domaine $\boldsymbol{A_2}$ est calculée par l'intégrale suivante :

$$aire\ de\ \boldsymbol{A_2} = \iint_{A_2} dxdy = \int_0^c \left(\int_{\sin x}^{\cos x} dy \right) dx$$



avec

$$\int_{\sin x}^{\cos x} dy = [y]_{\sin x}^{\cos x} = \cos x - \sin x$$

et

$$aire\ de\ \boldsymbol{A_2} = \int_0^c (\cos x - \sin x) dx$$

Or *c* représente l'abscisses du point d'intersection entre les courbes $y = \sin x$ et $y = \cos x$. Elle est obtenue en posant :

$$y=\sin x=\cos x \;\Rightarrow\; x=\frac{\pi}{4} \;\Rightarrow\; c=\frac{\pi}{4}$$

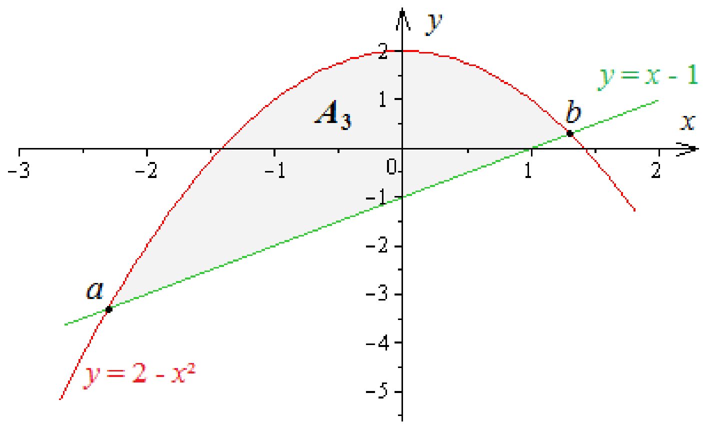
Ainsi

$$aire\ de\ \boldsymbol{A_2}=\int_0^{\pi/4}(\cos x-\sin x)dx=\int_0^{\pi/4}\cos x\,dx-\int_0^{\pi/4}\sin x\,dx=[\sin x]_0^{\pi/4}+[\cos x]_0^{\pi/4}$$

$$\Rightarrow aire\ de\ \boldsymbol{A_2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)=\sqrt{2}-1\approx 0{,}41$$

3. L'aire du domaine $\boldsymbol{A_3}$ est calculée par l'intégrale suivante :

$$aire\ de\ \boldsymbol{A_3}=\iint_{A_3}dxdy=\int_a^b\left(\int_{x-1}^{2-x^2}dy\right)dx$$



Or, les valeurs de a et b sont obtenues en posant :

$$y=2-x^2=x-1 \;\Rightarrow\; x^2+x-3=0$$

Cette dernière est une équation du deuxième degré, et se résout comme suit :

$$\Delta=B^2-4AC=1-4\times 1\times(-3)=13$$

D'où

$$x_{1,2}=\frac{-B\pm\sqrt{\Delta}}{2A}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=-2{,}30 \;\text{ et }\; 1{,}30 \;\Rightarrow\; a=-2{,}30 \;\text{ et }\; b=1{,}30$$

Par conséquent :

$$aire\ de\ \boldsymbol{A_3}=\int_{-2,3}^{1,3}\left(\int_{x-1}^{2-x^2}dy\right)dx=\int_{-2,3}^{1,3}\left([y]_{x-1}^{2-x^2}\right)dx=\int_{-2,3}^{1,3}[(2-x^2)-(x-1)]dx=\int_{-2,3}^{1,3}(3-x^2-x)dx$$

$$=\left[3x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-2,3}^{1,3}\approx(3{,}9-0{,}73-0{,}85)-(-6{,}9+4{,}06-2{,}65)\approx 7{,}81$$

FIN