**Chapitre 2 : Analyse spectrale**

**I. Introduction**

Dans ce chapitre, nous allons définir et étudier la solution numérique des valeurs propres et les vecteurs propres d’une matrice.

**I.2.Valeurs propres et les vecteurs propres d’une matrice :**

Soit

* est dit valeur propre de la matrice A s’il existe un vecteur non nul tel que :

Pour

Ou est la matrice identité de taille n×n, quelque soit le vecteur

* Le vecteur est alors appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre .

**Exemple :**

Voici la matrice

Trouver les valeurs propres de la matrice A.

**Solution :**

Alors :

Les valeurs propres de la matrice A sont :

**I .3.écriture matricielle :**

Un système différentiel linéaire homogène est un système d’équations différentielles de la forme :

Où les *ai j* () sont des coefficients constants réels ou complexes.  
On pose

Avec cette notation matricielle, le système différentiel (*S*) devient :

**I.4.Méthode pour diagonaliser une matrice**

Soit A une matrice n×n,A est diagonalisable si et seulement si elle admet n vecteurs propres linéairement indépendants.

Plus précisément, on a :

Ou D est une matrice diagonale si et seulement si les colonnes de P (matrice de passage) sont n vecteurs propres linéairement indépendants de A.

Dans ce cas, les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A associés respectivement aux colonnes de P ;

**Etapes de diagonalisation**

* Déterminer le polynôme caractéristique de A :
* Trouver les racines de (valeurs propres de A) ;
* Déterminer des bases d’espace propres ;
* Construire la matrice inversible à partir des vecteurs de base tous les espace propres ;
* Construire la matrice diagonale à partir des valeurs propres A ;

**Exemple (matrice 2 dimensions)**

Diagonaliser la matrice suivante :

**SOLUTION**

1. Pour cela, on détermine ses valeurs propres :

Ainsi, la matrice A admet deux valeurs propres ( deux raines réels) distinctes, qui sont λ1 = 2 et λ2 = 3. Donc elle est diagonalisable.

1. Déterminons une base de vecteurs propres. Tout d’abord pour λ1 = 2

d’où le vecteur propre associé à la valeur propre λ1 =2

Pour la valeur propre λ2 = 3 :

d’où le vecteur propre associé à la valeur propre λ2 = 3

1. Dans la base (,), la matrice A s’écrit :

Matrice De passage :

Com : comatrice de la matrice de passage P ;

**Exemple** **(matrice 3 dimensions) :**

Diagonaliser la matrice suivante :

**SOLUTION :**

Démontrons que A est diagonalisable et trouvons une matrice P telle que P −1AP soit diagonal

1. Commençons par calculer le polynôme caractéristique de A :

2. Les racines du polynôme caractéristique, et donc les valeurs propres de A, sont les réels λ1 = 1, λ2 = −4 et λ3 = 2. Il y a trois valeurs propres distinctes, la matrice est diagonalisable

3. Déterminons des vecteurs propres associés. Par exemple, pour λ2 = −4

L’ensemble des solutions est . D’où le vecteur propre  associé à la valeur propre λ2 = −4

Pour la valeur propre λ1 = 1

L’ensemble des solutions est. D’où le vecteur propre  associé à la valeur propre λ1 = 1

Pour la valeur propre λ3 = 2

L’ensemble des solutions est. D’où le vecteur propre  associé à la valeur propre λ3 = 2

4. La base (V1 , V2 , V3 ) diagonalise la matrice A, c’est-à-dire D = P −1AP avec

**NB : pour l’inversion de la matrice 3X3 voir la vidéo**

[**https://www.youtube.com/watch?v=QWmy7ysNEvo**](https://www.youtube.com/watch?v=QWmy7ysNEvo)

<https://www.youtube.com/watch?v=gYDmn8bjiwQ>

**I.5.Méthodes numériques de calcul de valeurs propres et vecteurs propres**

Les valeurs propres ont une grande importance dans nombreux problèmes physiques. La stabilité d'un avion, par exemple, est déterminée par la position dans le plan complexe des valeurs propres d'une certaine matrice. La fréquence naturelle de vibration d'une poutre est en fait une valeur propre d'une matrice. Il y a aussi un intérêt théorique dans le calcul de valeurs propres. Par exemple : pour la résolution d'un système d'équations aux dérivées ordinaires ; pour le comportement d'une suite *A*, *A* 2, *A* 3, ... de puissances d'une matrice (de telles suites apparaissent dans la résolution itérative de systèmes d'équations).