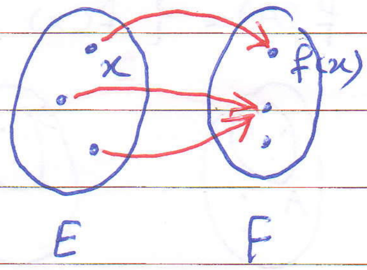
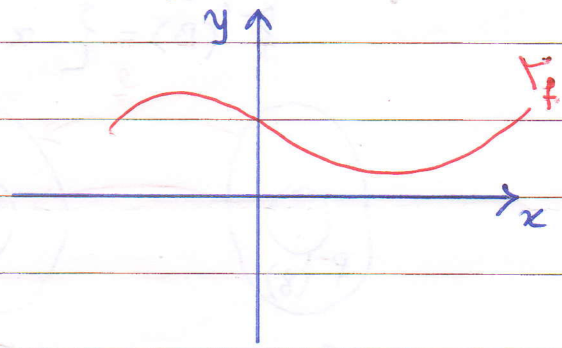
I.2 Notion d'application

1. Définition : on appelle application d'un ensemble E dans F, une loi f permettant d'associer à tout $x \in E$ un element $y \in F$, on note $y = f(x)$



Le graphe de $f : E \to F$ est

$$\Gamma_f = \{ (x, f(x)) \in E \times F \mid x \in E \}$$



· **Composition** Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ alors $g \circ f : E \to G$ est l'application définie par $g \circ f(x) = g(f(x))$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

exple :

$$f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$$
$$x \to \frac{1}{x}$$

$$g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \to \frac{x-1}{x+1}$$

$g \circ f = ?$

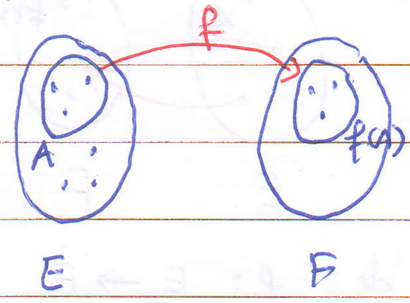
2- Image directe, image réciproque :

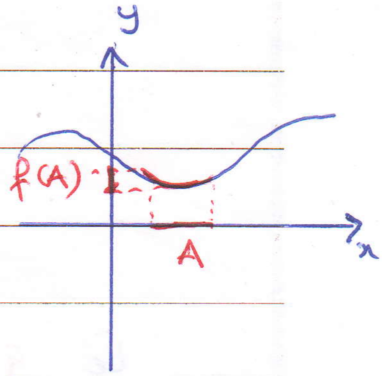
E, F deux ensembles :

1- $A \subset E$ et $f : E \to F$

L'image directe de A est l'ensemble

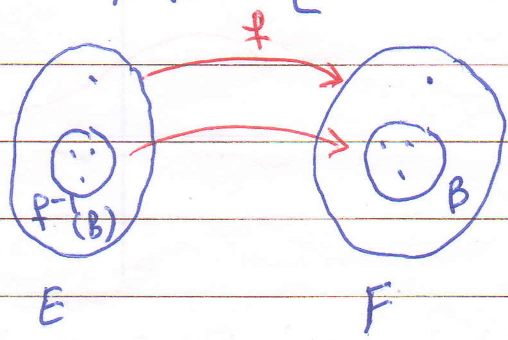
$$f(A) = \{ f(x) \,/\, x \in A \}$$





2- $B \subset F$, L'image réciproque de B

$$f^{-1}(B) = \{ x \in E \mid f(x) \in B \}$$



متباين غامر تقابل

3 Injection, surjection, bijection

Soit E, F deux ensemble $f : E \to F$ une application.

- f est injective si pour tout $x, x' \in E$ avec $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$.

f injective $\Leftrightarrow \forall (x, x') \in E^2 \quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

$\Leftrightarrow \forall (x, x') \in E^2 \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

- f est surjective si pour tout $y \in F$, il existe au moins $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

f surjective $\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$

$\Leftrightarrow f(E) = F$

- f est bijective si elle injective et surjective

f bijective $\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists$ un unique $x \in E$, $y = f(x)$.

dans ce cas, il existe f^{-1} de F sur E.

exple: . $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ $\quad f_1(x) = \frac{1}{1+x}$ $\quad$ inj ? sur?

. $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ $\quad f(x) = x^2$

propriétés:

$g \circ f$ inj $\Rightarrow f$ inj

$g \circ f$ sur $\Rightarrow g$ sur

$g \circ f$ bij $\Rightarrow g$ sur et f inj

f et g inj $\Rightarrow g \circ f$ inj

f et g sur $\Rightarrow g \circ f$ sur

f et g bij $\Rightarrow g \circ f$ bij, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Mini exercice:

1- les fonctions suivantes sont-elles inj, sur, bij?

$f_1 : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ $\quad x \to x^2$

$f_2 : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ $\quad x \to x^2$

$f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad x \to x^2$

$f_4 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad x \to x-7$

$f_5 : \mathbb{R} \to [0, +\infty[\quad x \to |x|$

2- Montrer que $f :]1, +\infty[\to]0, +\infty[$

$f(x) = \frac{1}{x-1}$ bij et calculer f^{-1}.