III Relations binaires d'un ensemble :

Définition : soit $x \in E$ et $y \in F$

une Relation $\mathcal{R}$ entre x et y est un lien verbal caractérisant la correspondance entre x et y.

on note $x \mathcal{R} y$

si x et y appartiennant de m̂ ensemble E, $\mathcal{R}$ est une Relation binaire dans E.

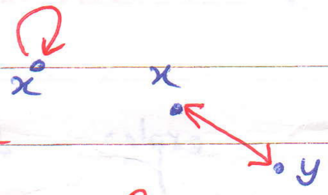
1- Relation d'equivalence :

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire

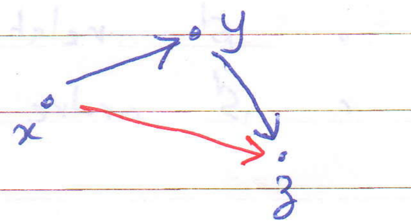
$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si :

Reflexive . $\forall x \in E$, $x \mathcal{R} x$

Symétrique . $\forall x, y \in E$, $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow y \mathcal{R} x$



transitive $\forall x, y, z \in E$ $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$



1.2 calsse d'equivalence :

L'ensemble des éléments $y \in E$ qui sont en relation $\mathcal{R}$ avec x, on la note

C_x , $\bar{x}$, $\dot{x}$

$$C_x = \{ y \in E \ / \ y \mathcal{R} x \} \qquad C_x \subset E$$

. l'ensemble des classes d'equivalence d'éléments de E est l'ensemble Quotient $E/_{\mathcal{R}}$.

$$E/_{\mathcal{R}} = \{ C_x \ / \ x \in E \}$$

exemples:

Soit $\mathcal{R}$ une relation définie par: dans $\mathbb{Z}$

$\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x-y)$ est un multiple de 5

- Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équi
- trouver L'ensemble quotient $\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}$.

2/ Relation d'ordre:

$\mathcal{R}$ est une relation d'ordre si:

- Réflexive: $\forall x \in E : x\mathcal{R}x$
- anti symétrique: $\forall x, y \in E \quad x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x=y$
- transitive: $\forall x,y,z \in E \quad x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$

exple: Soit $\mathcal{S}$ une relation dans $\mathbb{R}$

$a\mathcal{S}b \Leftrightarrow a^3-b^3 \geq 0$

- $\mathcal{S}$ relation d'ordre?
- $\mathcal{S}$ ordre totale?