IV Fonctions Dérivables

① Dérivée en un point:

1.1 Définition : soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, soit $x_0 \in I$:

- f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x \to x_0} = f'(x_0)$$

La limite s'appelle alors le nombre dérivée de f en x_0. et est noté $f'(x_0)$.

- f est dérivable sur I si f est dérivable ~~sur~~ en tout point $x_0 \in I$. la fonction $x \to f'(x)$ est la fonction dérivée de f. elle se note f' ou $\frac{df}{dx}$.

<u>exemple</u> $f(x) = x^2$ est dérivable en x_0.

②. tangente :

soit f une fonction dérivable en x_0 la droite d'équation

$$y = (x - x_0) f'(x_0) + f(x_0)$$

s'appelle tangente au graph de f au point $(x_0, f(x_0))$

Remarque: si f est dérivable en x_0 alors Continue en x_0.

Attention: la réciproque de cette proposition est inexacte expl: $f(x)=\sqrt{x}$ continue en $x_0=0$ mais n'est pas derivable en ce point.

3- Calcul des derivées

3.1 Somme, produit, ...

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I.

Alors:

- $(\lambda f)'(x) = \lambda \cdot f'(x) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$
- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\frac{1}{f(x)}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2} \qquad f(x) \neq 0$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \qquad g(x) \neq 0$

3.2 Derivées de fonctions usuelles:

Fonction	Derivée
x^n	$n\, x^{n-1}\ (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$f^n \to n \cdot f' f^{n-1} \quad n \in \mathbb{Z}$

$\frac{1}{f} \to -\frac{f'}{f^2}$

$\sqrt{f} \to \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

$e^f \to f' e^f$

$\ln f = \frac{f'}{f}$

$\cos f \to -f' \sin f$

$\sin f \to f' \cos f$

$\tan f \to f'(1+\tan^2 f) = \frac{f'}{\cos^2 f}$

3.3. Dérivée d'une fonction Composée:

si f est derivable en x_0 et g derivable en $f(x_0)$, alors $g\circ f$ est derivable en x_0 et L'on a:

$$(g\circ f)'(x) = g'[f(x_0)] \cdot f'(x_0)$$

<u>exemple</u>:

- $[\cos(ax+b)]' = -a \cdot \sin(ax+b)$.

- $\ln(1+x^2)$ $\begin{cases} g(x) = \ln x \rightarrow g' = 1/x \\ f(x) = 1+x^2 \rightarrow f' = 2x \end{cases}$

$$\ln(1+x^2) = g\circ f(x) \Rightarrow (g\circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x))$$
$$= 2x \cdot g'(1+x^2)$$
$$= \frac{2x}{1+x^2}$$

3.4 Derivée d'une fonction reciproque:

Soit f une fonction bijective et continue d'une intervalle $I \rightarrow J$, derivable en $x_0 \in I$ tq $f'(x_0) \neq 0$.

Alors la fonction reciproque f^{-1} est derivable en $f(x_0)$ et.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

~~4. Extremum local, théorème~~

3.5. Derivées d'ordre superieur :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa derivée.

si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ est aussi dérivable on note $f'' = (f')'$ la dérivée second de f.

plus généralement : $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ la derivée n-ième de f.

Formule de Leibniz :

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \, f^{(n-p)}(a) \, g^{(p)}(a)$$

avec $C_n^p = \dfrac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$

$$= f^{(n)} \cdot g + C_1^n f^{(n-1)} \cdot g^{(1)} + \dots + f \cdot g^{(n)}$$

exple :

- $(f \cdot g)' = f'g + g'f$
- $(f \cdot g)'' = f''g + 2f'g' + g''f$
- $e^x \cdot (1+x^2)$

- $f(x) = e^x$ $g(x) = x^2+1$

$f'(x) = e^x$ $g'(x) = 2x$

$f''(x) = e^x$ $g''(x) = 2$

$\vdots$ $g'''(x) = 0$

$f^{(k)}(x) = e^x$ $g^{(k)}(x) = 0$

$$(f\cdot g)^{(n)}(x) = C_n^0 f^{(n)} \cdot g^0 + C_n^1 f^{(n-1)} g^{(1)} + C_n^2 f^{(n-2)} \cdot g^{(2)}$$

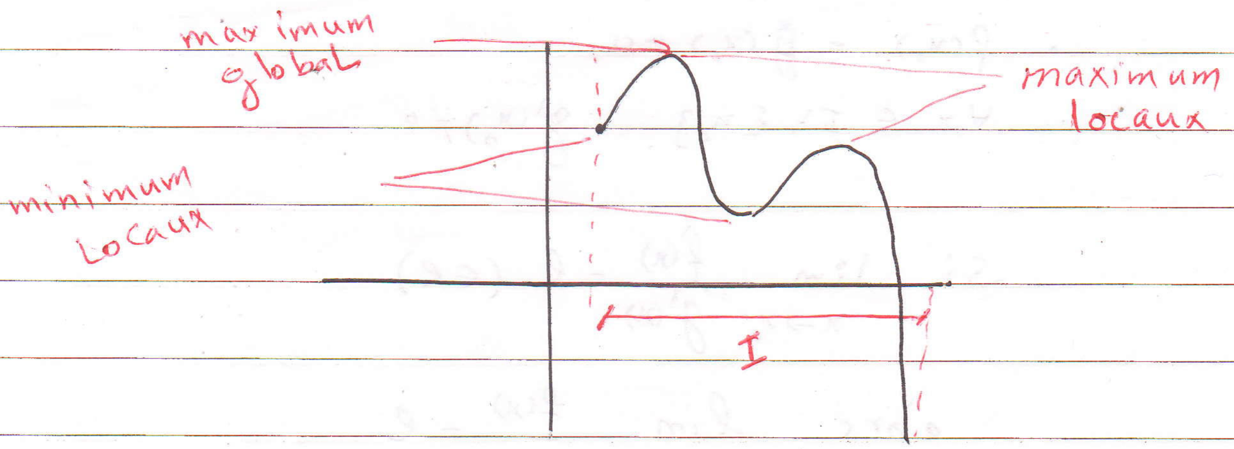
$$= e^x \cdot (1+x^2) + n \cdot e^x \cdot 2x + \frac{n(n-1)}{2} e^x \cdot 2$$

(4) Extremum local, thoerème de Rolle.

4.1. Extremum local

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I.

- on dit que x_0 est un point Critique de f si $f'(x_0)=0$.
- on dit que f admet un maximum local en x_0 (minimum local en x_0) s'il existe un intervalle ouvert J Contenant x_0 tq $\forall x \in I \cap J$ $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$
- on dit que f admet un extremum Local en x_0 si f admet un maximum local ou un minimum local.

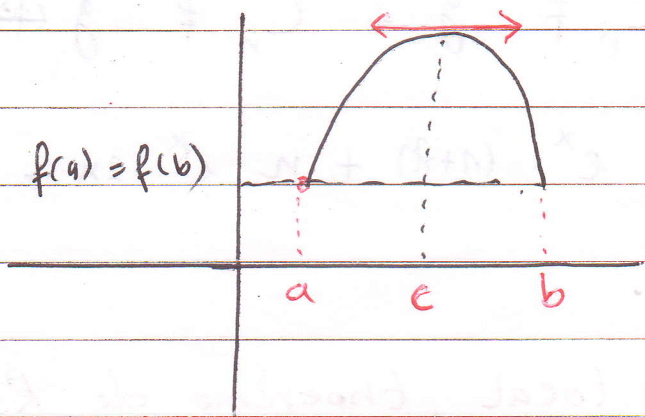


4.2. théorème de Rolle :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que

- f est continue sur $[a,b]$
- f est derivable sur $]a,b[$
- $f(a) = f(b)$

Alors il existe $c \in]a,b[$ tq, $f'(c) = 0$.



5. théorème des accroissement finis :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et derivable sur $]a,b[$, il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a).$$

6. Règle d'Hopital :

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions derivables et soit $x_0 \in I$. on suppose que

- $f(x_0) = g(x_0) = 0$
- $\forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad g'(x_0) \neq 0$

Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \; (\in \mathbb{R})$

alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$