Fonctions usuelles:

1- Fonctions trigonométriques et leur reciproques:

1.1. les Fonctions Sinus et Cosinus :

$f(x)$	Domaine de def	parité	période	Continuité	Derivabilité	Dérivée
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	paire	$T=2\pi$	sur $\mathbb{R}$	sur $\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	impaire	$T=2\pi$	sur $\mathbb{R}$	sur $\mathbb{R}$	$\cos x$

La relation fondamentale est:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Formule d'addition : $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$$

$$\sin(a-b) = \cos a \sin b - \sin a \cos b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \\ \sin 2x = 2\cos x \sin x \end{cases}$$

	$-x$	$\pi - x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$	$x + n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$
$\cos$	$\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$	$(-1)^n \cos x$
$\sin$	$-\sin x$	$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$(-1)^n \sin x$

transformation de Somme en produit :

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

tableau de variation :

x	$-\pi$		$-\pi/2$		0		$\pi/2$		π
$-\sin x = f'(x)$	0	+	1	+	0	−	−1	−	0
$f(x) = \cos x$	−1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	−1
$g'(x) = \cos x$	−1	−	0	+	1	+	0	−	−1
$g(x) = \sin x$	0	$\searrow$	−1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

1.2 les fonctions tangente et cotangente

$$tg(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad D_f = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} - A$$

$$cotg(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad D_f = \mathbb{R} - \{\pi k \,/\, k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} - B$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{A \cup B\} \qquad cotg\, x = \frac{1}{tg\, x}$$

Relations usuelles :

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + tg^2 x} \qquad \sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1 + tg^2 x}$$

$$tg(a+b) = \frac{tg\, a + tg\, b}{1 - tg\, a\, tg\, b} \qquad tg(a-b) = \frac{tg\, a - tg\, b}{1 + tg\, a\, tg\, b}$$

$$tg\, a + tg\, b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} \qquad tg(a) - tg(b) = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}$$

$$tg\,2x = \frac{2\,tgx}{1-tg^2x}$$

$$\Rightarrow \quad \sin 2x = \frac{2\,tgx}{1+tg^2x} \qquad \cos 2x = \frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}.$$

Derivées, variations :

$$\left(tg(x)\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} \iff tg'(x) = 1 + tg^2x$$

$$\left(Cotg(x)\right)' = \frac{-1}{\sin^2 x} \iff Cotg'x = -(1 + cotg^2x)$$

x	$-\pi/2$		0		$\pi/2$
$tg'(x)$	||	$+$	1	$+$	||
$tg(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ||

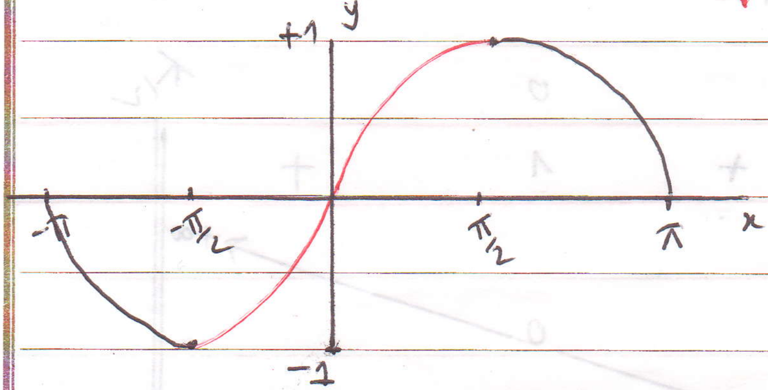
x	0		$\pi/2$		π
$cotg'(x)$	||	$-$	-1	$-$	||
$Cotg(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ||

1.3 Fonctions trigonométriques reciproques :

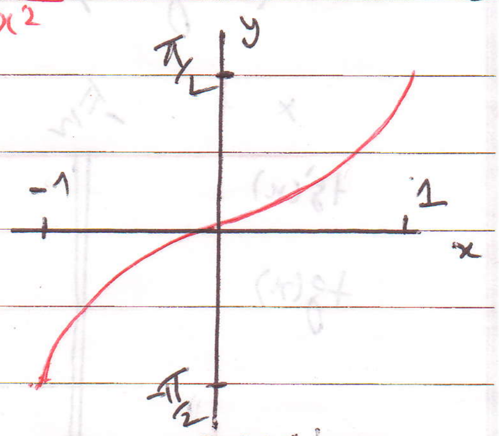
Arcsinus : la fonction sinus admet une application reciproque appelée Arcsinus Définie sur $[-1, 1]$ dans $[-\pi/2, \pi/2]$

la fonction Arcsinus est impaire, continue et strictement Croissante sur $[-1, 1]$

$$\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[$$



sin x

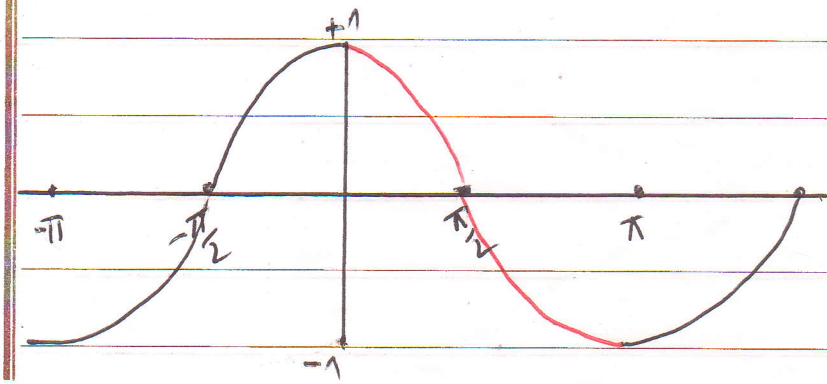


arcsin x

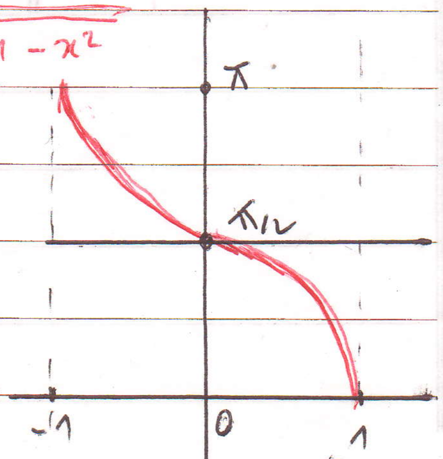
Arccosinus : la fonction Cosinus admet une application reciproque appelée Arccosinus Définie sur $[-1, 1]$ dans $[0, \pi]$.

la fonction arccosinus est Continue, strictement décroissante sur $[-1, 1]$

$$\text{Arc}\cos\cancel{\text{inus}}(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$



cos x



arccos x

Relation particulières :

$$\mathrm{Arccos}\, x + \mathrm{Arcsin}\, x = \pi/2$$

$$\mathrm{Arccos}\, x + \mathrm{Arccos}(-x) = \pi$$

Arctangente : la fonction tangente admet une application reciproque appelée Arctangente définie de ~~sur~~ $\mathbb{R}$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$

la fonction Arctangente est impaire, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\mathrm{Arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Relations particulières

- $\mathrm{Arctg}\, x + \mathrm{Arctg}\, \frac{1}{x} = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } x>0 \\ -\pi/2 & \text{si } x<0 \end{cases}$

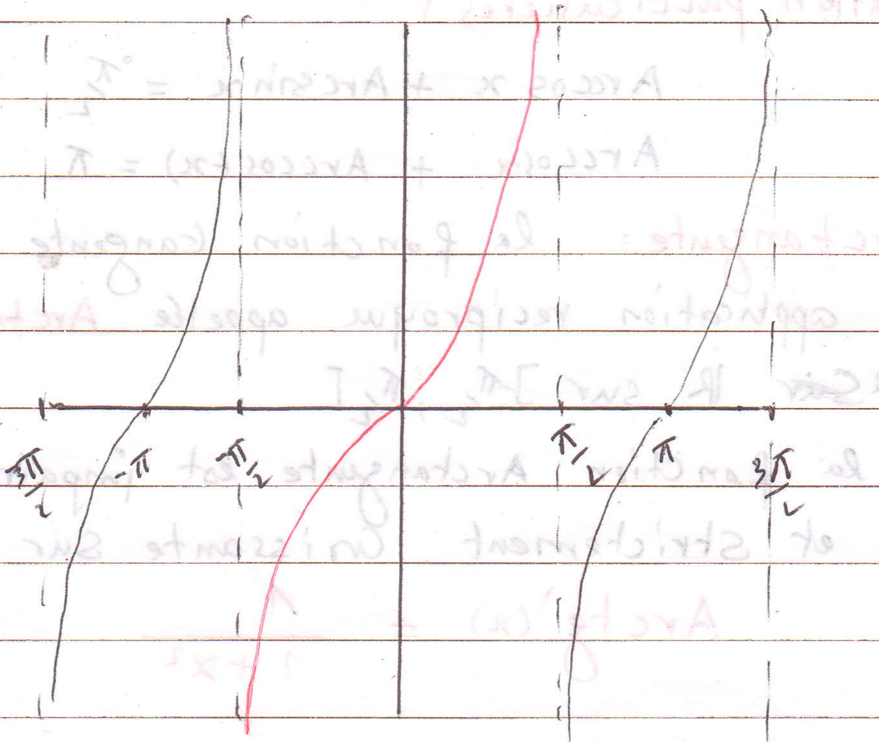
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tq $ab<1$

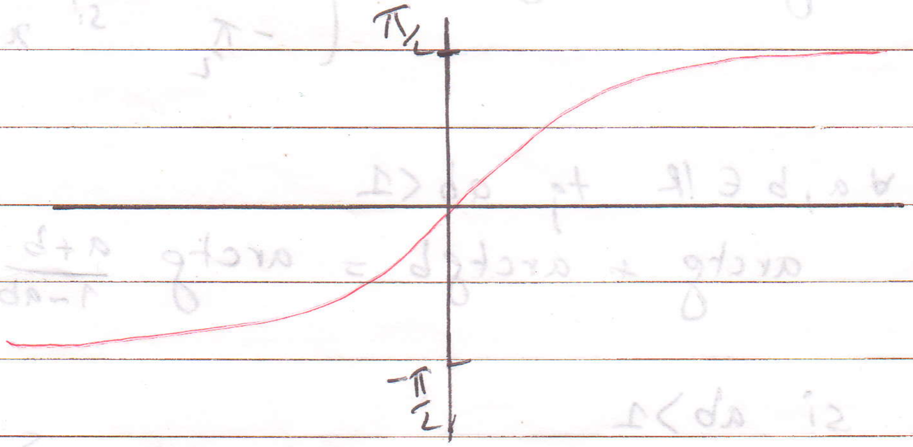
$$\mathrm{arctg} + \mathrm{arctg}\, b = \mathrm{arctg}\, \frac{a+b}{1-ab}$$

- si $ab>1$

$$\mathrm{arctg}\, a + \mathrm{arctg}\, b - \mathrm{arctg}\, \frac{a+b}{1-ab} = \begin{cases} \pi & a>0 \\ -\pi & a<0 \end{cases}$$

tg x.





arctg x

par analogie : $\text{Arccotg}(x) \; \mathbb{R} \longrightarrow]0, \pi[$

$$\text{arccotg}'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\text{arctg}\, x + \text{arccotg}\, x = \frac{\pi}{2}.$$