# 3. Fonction Hyperboliques et leurs Reciproque:

## 3.1. Cosinus et Sinus hyperboliques:

**Définition:** on définit pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ les applications:

- Cosinus hyperboliques

$$ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- Sinus hyperbolique

$$sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

. Les fonctions ch et sh Sont les parties paires et impaire de la fonction exponentielle. on a donc:

$$ch(-x) = ch\,x \quad \text{et} \quad sh(-x) = -\,sh\,x$$

$$ch\,x + sh\,x = e^{x} \qquad ch\,x - sh\,x = e^{-x}$$

$$\Rightarrow ch^2x - sh^2x = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ch^2x = 1 + sh^2x \Rightarrow ch\,x \geq 0 \quad \forall x \\ sh^2x = ch^2x - 1 \end{cases}$$

**Derivabilité:** les fonctions ch et sh Sont dérivable sur $\mathbb{R}$.

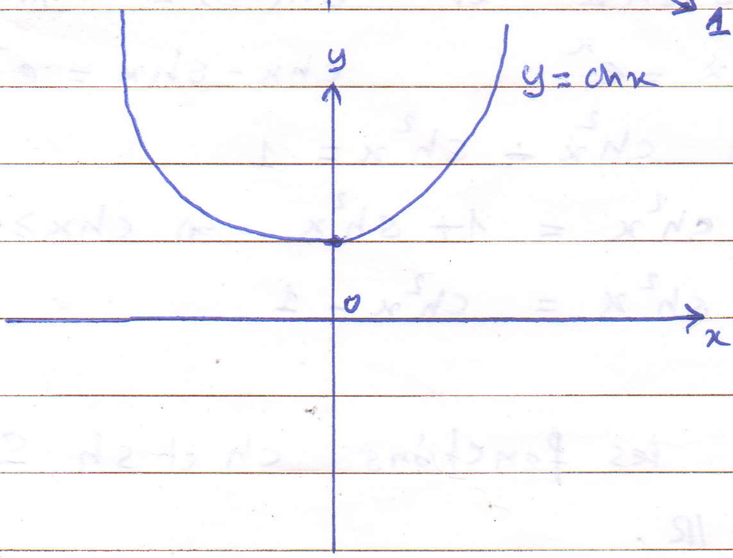
$$(ch\,x)' = sh\,x$$

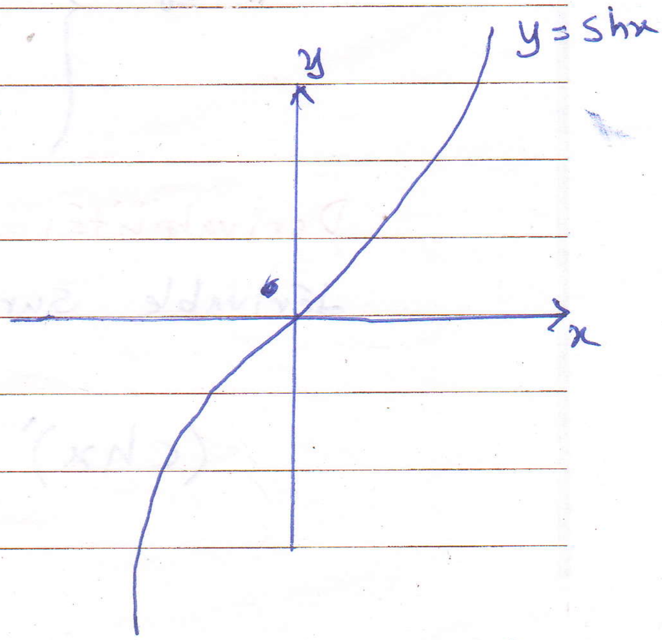
$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$

tableaux de variation :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| sh' ~~(x)~~ | | $+$ | $1$ | $+$ | |
| sh ~~chx~~ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ch'x | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| chx | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |



## 3.2 tangente et Cotangente hyperbolique:

Définition: on définit:

1. pour tout $x \in \mathbb{R}$ la tangente hyperbolique par:

$$th\, x = \frac{sh\, x}{ch\, x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

2. pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ la Cotangente hyperbolique par:

$$Coth\, x = \frac{ch\, x}{sh\, x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

Derivabilité: les fonctions th et Coth Sont impaires, Continues et derivables sur leur domaines de définition

$$(th\, x)' = \frac{1}{ch^2 x} = 1 - th^2 x.$$

$$(Coth\, x)' = \frac{-1}{sh^2 x} = 1 - Coth^2 x.$$

on remarque que:

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad |th\, x| < 1$

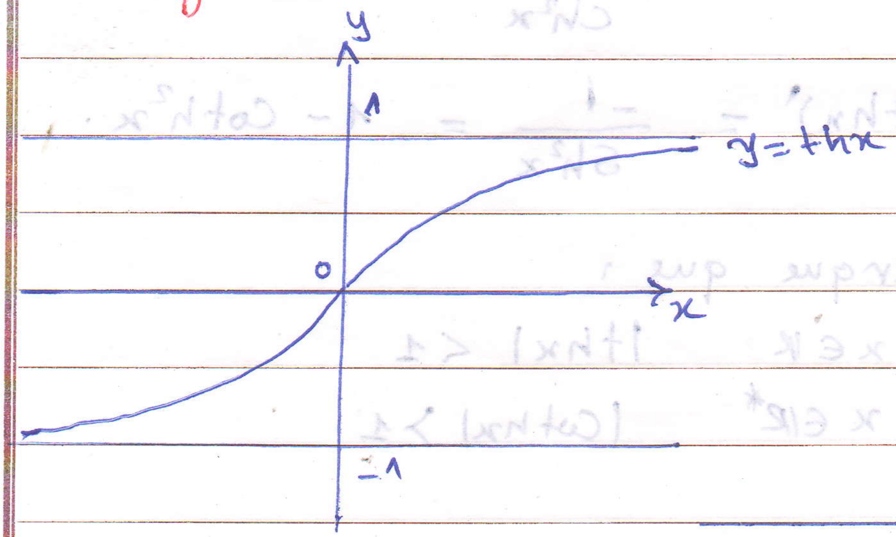
$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\quad |Coth\, x| > 1$

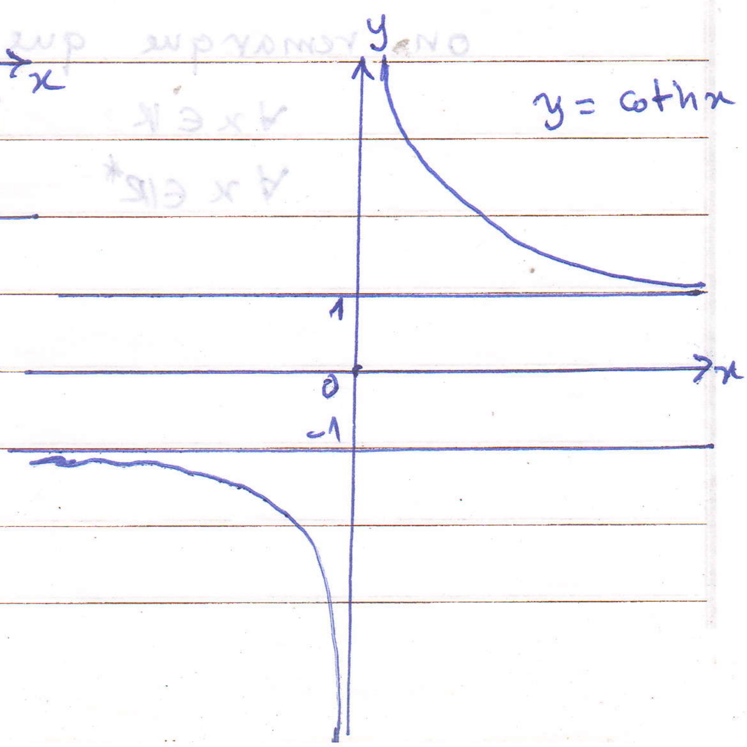
## tableaux de variation:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $th'x$ | | $+$ | $1$ | $+$ | |
| $th x$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ |

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $coth'(x)$ | | $-$ | $\|$ | $-$ | |
| $coth x$ | $-1$ | $\searrow$ | $-\infty \;\|\; +\infty$ | $\searrow$ | $1$ |

## graphes:



## Formules d'addition :

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{cases} e^a = \operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a \\ e^b = \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \end{cases}$$

$\Rightarrow$ • $e^{a+b} = e^a e^b$

$= \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b + \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b$

$+ \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$ ... (1)

• $e^{-(a+b)} = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b - \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b$

$+ \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$. .. (2)

de (1) et (2)

$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} \operatorname{sh} b$

$\operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$

$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$

$\operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$.

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$$

$$\operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$$

## Formules de duplication :

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$

$\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1$

$= 2\operatorname{sh}^2 x + 1$

$$\operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$$

$$sh\,2x = \frac{2thx}{1-th^2x}$$

$$ch\,2x = \frac{1+th^2x}{1-th^2x}$$

## Formules de linéarisation:

$\forall m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ on a

$$(cha + sha)^m = e^{ma} = chma + shma$$

$$(cha - sha)^m = chma - shma$$

$$ch^m x = \frac{1}{2^m}(e^x + e^{-x})^m$$

$$sh^m x = \frac{1}{2^m}(e^x - e^{-x})^m$$