UNIVERSITE ZIANE ACHOUR - DJELFA

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Physique

Support du Cours (Partie N°02)

Méthodes Mathématiques pour la physique II

Pour Master-1- Physique de la Matière Condensée

Continu de ce cours :

1) Rappels sur lois internes,
2) Structures algébriques,
3) Espaces Vectoriels,
4) Rappels sur les applications,
5) Applications linéaires,
6) Matrices,
7) Matrice d'une application linéaire,
8) Déterminants, Matrices inverses, Résolution des systèmes linéaires par différentes méthodes,
9) Diagonalisation des matrices, diagonalisation des matrices carrée, Applications.

Cours de Mr Yazid DEROUICHE, Enseignant Chercheur au sein du Département de Physique

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} \end{pmatrix} , \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$T^{-1} = ?$ $\quad TX = Y \Leftrightarrow X = T^{-1}Y$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{3}{11} y_3 \\ x_2 = \frac{1}{3} y_2 - \frac{1}{11} y_3 \\ x_1 = \frac{1}{2} y_1 - \frac{1}{6} y_2 + \frac{7}{22} y_3 \end{cases}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{22} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{11} \\ 0 & 0 & \frac{3}{11} \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = T^{-1} . U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{22} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{11} \\ 0 & 0 & \frac{3}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{18}{22} & \frac{1}{22} & \frac{7}{22} \\ -\frac{2}{22} & \frac{6}{22} & -\frac{2}{22} \\ \frac{6}{22} & \frac{4}{22} & \frac{6}{22} \end{pmatrix}.$$

Matrice d'une application linéaire :

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application où E et F 2 K-ev de dim p et m respectivement.

Soit $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ une base de E

$\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ " " " F

On a $f(e_1) \in F$ et F a comme base $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$

alors $f(e_1) = a_{11} f_1 + a_{12} f_2 + \ldots + a_{1m} f_m$

il est de même pour $f(e_2)$

$$f(e_2) = a_{21} f_1 + a_{22} f_2 + \ldots + a_{2m} f_m$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{p1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{p2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{pm} \end{pmatrix}$

A : matrice ayant n lignes et p colonnes est appelée matrice de f relativement aux bases $\{e_i\}_{i=1,p}$, $\{f_j\}_{j=1,\ldots m}$, par fois on la note :

$$[f]_{\{e_i\}}^{\{f_j\}} = A.$$

→ cette matrice dépend du choix des bases de E et F. Quand on change les bases, la matrice change.

→ Soit $v \in E$, $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_p e_p$

$f(v) \in F$ $\quad f(v) = X_1 f_1 + X_2 f_2 + \ldots + X_m f_m$

Quelle relation y a-t-il entre x_i et X_i ?

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{p1} \\ a_{12} & & a_{p2} \\ \vdots & & \\ a_{1m} & & a_{pm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}.$$

$$\underbrace{\qquad}_{[f]_{\{e_i\}}^{\{f_j\}}}$$

Proposition : Soit E, F, G 3 $\mathbb{K}$ e.v de dim : p, n, m respect.

$f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ 2 applications linéaires

On a : $g \circ f : E \longrightarrow G$ une application linéaire

de plus : $[g \circ f]_{\{e_i\}}^{\{g_i\}} = [g]_{\{f_i\}}^{\{g_i\}} \times [f]_{\{e_i\}}^{\{f_i\}}$.

Exple :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y) \longmapsto (x+y, 2x, x-y)$$

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \longmapsto (x+y, x, z+y)$$

Donner les représentations matricielles de f, g et $g \circ f$, prendre comme bases les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

$\{e_1 = (1, 0), \ e_2 = (0, 1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$

$\{f_1 = (1, 0, 0), \ f_2 = (0, 1, 0), \ f_3 = (0, 0, 1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$.

- $f(e_1) = (1, 2, 1) = f_1 + 2f_2 + f_3$

$f(e_2) = (1, 0, -1) = f_1 + 0f_2 - f_3$

$$A = [f]_{\{e_1, e_2\}}^{\{f_1, f_2, f_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- $g(f_1) = (1, 1, 0) = f_1 + f_2 + 0f_3$

$g(f_2) = (1, 0, 1) = f_1 + 0f_2 + f_3 \rightarrow B = [g]_{\{f_1, f_2, f_3\}}^{\{f_1, f_2, f_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$g(f_3) = (0, 0, 1) = 0f_1 + 0f_2 + f_3$

$$g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longmapsto \big((x+y)+2x,\ x+y,\ (x-y)+2x\big)$$
$$= (3x+y,\ x+y,\ 3x-y)$$

$g \circ f(e_1) = (3,1,3) = 3f_1 + f_2 + 3f_3$.

$g \circ f(e_2) = (1,1,-1) = f_1 + f_2 - f_3$.

$$C = [g \circ f]_{\{e_1,e_2\}}^{\{f_1,f_2,f_3\}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vérifions que $C = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Choix de bases :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, soit $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ et $\{e_1', e_2', \dots, e_p'\}$ deux bases de E. Soit $v \in E$.

on a : $e_1' = a_{11} e_1 + a_{12} e_2 + \dots + a_{1p} e_p$
$e_2' = a_{21} e_1 + a_{22} e_2 + \dots + a_{2p} e_p$
$\vdots$
$e_p' = a_{p1} e_1 + a_{p2} e_2 + \dots + a_{pp} e_p$

Soit p tq :

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{p1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & & a_{pp} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{p1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{pp} \end{pmatrix}$$

P : matrice carrée inversible

Les colonnes de P sont données par les coefficients des vecteurs $e'_1, e'_2, \dots e'_2$

Soit $v \in E$.

$$\begin{aligned} v &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_p e_p \\ &= X_1 e'_1 + X_2 e'_2 + \dots + X_p e_p \end{aligned}$$

Quelle est la relation entre X_i et x_i

on a : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$.

P : est appelée matrice de passage de la base $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ à la base $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_p\}$.

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}.$$

* Soit f une application linéaire de $E \longrightarrow F$ tq $\dim E = p$ et $\dim F = n$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] & F \\
\underset{\text{base de } E}{\{v_1, v_2, \dots v_p\}} \arrow[r, "A"', "A = {[f]}_{v_i}^{w_j}" below] \arrow[d, "P \text{ matrice de passage de } \{v_i\} \to \{v'_i\}"'] & \underset{\text{base de } F}{\{w_1, w_2, \dots, w_n\}} \arrow[d, "Q \text{ matrice de passage de } \{w_j\} \text{ à } \{w'_j\}"] \\
\underset{\text{base de } E}{\{v'_1, v'_2, \dots, v'_p\}} \arrow[r, "B", "B = {[f]}_{v'_i}^{w'_j}"'] & \underset{\text{base de } F}{\{w'_1, w'_2, \dots, w'_n\}}
\end{tikzcd}$$

$$B = Q^{-1} A P.$$

- cas particulier : $E = F$ $\quad E \xrightarrow{f} E$

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] & E \\
\{v_1, v_2, \dots, v_p\} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P"'] & \{v_1, v_2, \dots, v_p\} \arrow[d, "P"] \\
\{v'_1, v'_2, \dots, v'_p\} \arrow[r, "B"] & \{v'_1, v'_2, \dots, v'_p\}
\end{tikzcd}
$$

$$B = P^{-1} A P$$

Exemple d'application :

$\{v_1, v_2, v_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, f application linéaire ($f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) tq.

$f(v_1) = -v_1$

$f(v_2) = \cancel{v_1 + v_2 + v_3} = v_1 + v_2 + v_3$

$f(v_3) = -v_2 - v_3$

On demande :

1. Matrice relative à $\{v_1, v_2, v_3\}$.
2. Base de $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$
3. Montrer que $\{w_1 = -v_2,\ w_2 = v_1 \cancel{+ v_2} + v_3,\ w_3 = v_1\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$
4. calculer par deux méthodes la matrice de f relative à la base $\{w_1, w_2, w_3\}$.

solution :

1)

$$A = [f]^{v_1,v_2,v_3}_{v_1,v_2,v_3} = ?$$

$$f(v_1) = -v_1 + 0\,v_2 + 0\,v_3$$
$$f(v_2) = v_1 + v_2 + v_3$$
$$f(v_3) = 0\,v_1 - v_2 - v_3$$

$$A = [f]^{v_1,v_2,v_3}_{v_1,v_2,v_3} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2) $\ker f = !$

$\ker f = \{ v \in E \,/\, f(v) = 0_F \}$. dans notre cas $E = F = \mathbb{R}^3$

$\ker f = \{ v \in \mathbb{R}^3 \,/\, f(v) = 0_{\mathbb{R}^3} \}$.

$$v = x\,v_1 + y\,v_2 + z\,v_3$$
$$f(v) = X\,v_1 + Y\,v_2 + Z\,v_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ X \\ Z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X = -x + y \\ Y = y - z \\ Z = y - z \end{cases}$$

$$\Rightarrow f[(x,y,z)] = (-x+y,\ y-z,\ y+z)$$

$$f(v) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x+y=0 \\ y-z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ y=z \end{cases} \Rightarrow x=y=z$$

$\ker f = \{ x v_1 + x v_2 + x v_3 = x(v_1+v_2+v_3) / x \in \mathbb{R} \}.$

$\ker f = \langle v_1+v_2+v_3 \rangle$, $\dim \ker f = 1$.

Ou : Si $f : E \to F$ appl linéaire, de plus si E est engendré par $\{v_1, v_2, \dots, v_p\} \Longrightarrow$

$\operatorname{Im} f = f(E) = \langle f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_p) \rangle$

dans notre cas :

$\operatorname{Im} f = \langle f(v_1), f(v_2), f(v_3) \rangle = \langle (-1,0,0), (1,1,1), (0,-1,-1) \rangle$

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} L_1' = L_1 \\ L_2' = L_2 + L_1 \\ L_3' = L_3 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} L_1'' = L_1' \\ L_2'' = L_2' \\ L_3'' = L_3' + L_2' \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Im} f = \langle (-1,0,0), (0,1,1) \rangle = \langle v_1, v_2+v_3 \rangle$

$\boxed{\dim(\operatorname{Im} f) = 2}$

③ Montrons que $\{ w_1 = -v_2 , w_2 = v_1 + v_3 , w_3 = v_1 \}$

$\alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\alpha(-v_2) + \beta(v_1 + v_3) + \gamma v_1 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$(\beta + \gamma) v_1 - \alpha v_2 + \beta v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

comme $\{v_1, v_2, v_3\}$ est base de $\mathbb{R}^3$ ~~donc~~ Alors :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ -\alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

~~donc~~ on a $\begin{cases} \{w_1, w_2, w_3\} \text{ sont L.I} \\ \dim \mathbb{R}^3 = 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\{w_1, w_2, w_3\}$ est base de $\mathbb{R}^3$.

④ Matrice de f relative à la base $\{w_1, w_2, w_3\}$

$$A = [f]_{w_1 w_2 w_3}^{w_1 w_2 w_3}$$

1ère méthode :

Exprimer $f(w_1), f(w_2), f(w_3)$ dans la base w_1, w_2, w_3.

$f(w_1) = f(-v_2) = -f(v_2) = -(v_1 + v_2 + v_3) = -(v_1 + v_3) - v_2$
$= w_1 - w_2$

$f(w_2) = f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_3) = -v_1 - v_2 - v_3 = w_1 - w_2$

$f(w_3) = f(v_1) = -v_1 = -w_3$

$$f(w_1) = w_1 - w_2 + 0\,w_3$$
$$f(w_2) = w_1 - w_2 + 0\,w_3$$
$$f(w_3) = 0\,w_1 + 0\,w_2 - w_3$$

$$B = [f]_{w_1 w_2 w_3}^{w_1 w_2 w_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2ème méthode (application du théorème) : $B = Q^{-1} A P$.

$$\begin{tikzcd}
E = \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"] & F = \mathbb{R}^3 \\
\{v_1, v_2, v_3\} \arrow[r, "A"'] \arrow[d, "P"'] & \{v_1, v_2, v_3\} \arrow[d, "P"] \\
\{w_1, w_2, w_3\} \arrow[r, "B"] & \{w_1, w_2, w_3\}
\end{tikzcd}$$

$$B = P^{-1} A P \quad \text{avec} \quad A = [f]_{v_1 v_2 v_3}^{v_1 v_2 v_3} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

calculons la matrice P de $\{v_1, v_2, v_3\} \longrightarrow \{w_1, w_2, w_3\}$.

$$v \in \mathbb{R}^3 : \quad v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$$
$$= X_1 w_1 + X_2 w_2 + X_3 w_3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

$\cancel{w_1 = 0 v_1 + 2 v_2} +$

$$\begin{cases} w_1 = 0 v_1 - v_2 + 0 v_3 \\ w_2 = v_1 + 0 v_2 + v_3 \\ w_3 = v_1 + 0 v_2 + 0 v_3 \end{cases} \Rightarrow \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>calculamos P^{-1}</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & y_1 \\ -1 & 0 & 0 & y_2 \\ 0 & 1 & 0 & y_3 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & y_2 \\ 0 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 & y_3 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} L_1' = L_1 \\ L_2 = L_2 \\ L_3' = L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & y_2 \\ 0 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & -1 & y_3 - y_1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} -x_1 = y_2 \\ x_2 + x_3 = y_1 \\ -x_3 = y_3 - y_1 \end{cases}$$

$\boxed{x_3 = y_1 - y_3}$; $x_2 = y_1 - (y_1 - y_3) \Rightarrow \boxed{x_2 = y_3}$

$\boxed{x_1 = -y_2}$ $\qquad \boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$

$B = P^{-1} A . P$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} \quad . \quad A \quad . \quad P$$

$$B = P^{-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Déterminants

Introduction : considérons le système

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad \text{---(1)} \quad a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = Y$$

On sait qu'un tel système possède une solution unique ssi $ab' - a'b \neq 0$, le nombre appelé déterminant du système (1) ou de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ et est noté : $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

donc si ~~on pose~~ on considère le système

$$AX = C \quad \text{avec} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

ce système a une unique solution ssi

$$\boxed{\det A \neq 0} \equiv (\text{vect col ou vect ligne L.I})$$

Mineurs - cofacteurs :

Soit $A \in M_{(n,n)}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit "A_{ij}" la matrice obtenue en supprimant $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne ; c-à-d la ligne la colonne contenant l'élément a_{ij}

A_{ij} est appelé mineur de l'élément a_{ij}

le nombre $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ est appelé cofacteur de a_{ij}.

Exemple : $A \in M_{(3,3)}$ $\quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad c_{23} = (-1)^{2+3} \det(A_{23})$$

$$c_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Calcul d'un déterminant.

le déterminant de la matrice $A \in M_{(n,n)}$ (matrice carrée).

$\det A$ = la somme des élément d'une ligne (ou d'une colonne) multipliés chacun par son cofacteur

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22} \cdot a_{33} - a_{32} a_{23}) - a_{12}(a_{21} a_{33} - a_{31} a_{23}) + a_{13}(a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22})$$

$$\det A = a_{12} C_{12} + a_{22} C_{22} + a_{32} C_{32}.$$

→ Une matrice carrée est régulière lorsque son déterminant est non nul. On dit matrice singulière pour matrice non régulière.

Propriétés des déterminants :

1°_ Dans tout déterminant

a) Le mineur (de même le cofacteur) de tout élément est indépendant des éléments appartenant à la même ligne de ceux appartenant à la même colonne.

b) ~~Si tous les élément (de même les cofacteurs) de~~

b) Si tous les éléments d'une colonne (resp. ligne) sont nuls, alors le déterminant est nul.

c) Si les mineurs (de même les cofacteurs) de tous les éléments d'une colonne (resp. ligne) sont nuls, alors le déterminant est nul.

2° : Si dans un déterminant d'ordre n, tous éléments d'une colonne (resp. ligne) sont nul, sauf un alors le déterminant est ce dernier multiplié par son cofacteur. Inversement, on peut y mettre un déterminant d'ordre n-1, sous la forme d'un déterminant d'ordre n.

$$\underset{\text{(ordre 2)}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \underset{\text{(ordre 3)}}{\begin{vmatrix} a & b & y \\ c & d & x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}$$

<u>Notation</u> :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} col_1 & col_2 & & col_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} = (col_1, col_2, \dots, col_n)$$

3° - Si une colonne : $col_i = col'_i + col''_i$ alors :

$$\det(C_1, C_2, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_n)$$

$$\shortparallel$$

$$\det(C_1, C_2, \dots, C_{i-1}, C'_i, C_{i+1}, \dots, C_n) + \det(C_1, C_2, \dots, C_{i-1}, C''_i, C_{i+1}, \dots, C_n)$$

<u>Exple</u> :

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \alpha_1 + \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & \alpha_2 + \beta_2 \\ a_{31} & a_{32} & \alpha_3 + \beta_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \alpha_1 \\ a_{21} & a_{22} & \alpha_2 \\ a_{31} & a_{32} & \alpha_3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & \beta_2 \\ a_{31} & a_{32} & \beta_3 \end{pmatrix}$$

4°/ la valeur d'un determinant ne change pas quand on remplace une colonne C_i par $C_i + \lambda C_j$

→ plus généralement la valeur d'un det ne change pas quand on ajoute a une colonne une combinaison lineaire des autres colonnes.

$$C_i \longrightarrow C_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j C_j .$$

Exple :

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \alpha a_{11} + \beta a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{21} + \beta a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha a_{31} + \beta a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

5°/ Le determinant d'une matrice triangulaire = au produit des élément diagonaux.

6°/ Le determinant de 2 matrices carrées de même ordre = au produit des determinants des deux matrices.

$$\det(A \times B) = \det A \times \det B .$$

Exple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3-2-1 \\ 0 & 1 & -1-1-0 \\ 1 & 2 & -2-2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times (-5) = -5.$$

7// En changeant 2 colonnes le déterminant change en sens opposé.

Expl

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

8// Si dans un déterminant 2 colonnes sont proportionnelles alors ce déterminant est nul (0).

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -\sqrt{2} & 3 & 2\sqrt{2} \\ \frac{2}{4} & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (col_3 = -2\, col\, 1)$$

9// <u>Produit d'un déterminant par un nombre</u>

Pour multiplier un déterminant par un nombre, il suffit de multiplier les éléments d'une colonne (resp. ligne) par ce nombre.

Expl :

$$m\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & m\,a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & m\,a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & m\,a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Nota. $\det({}^tA) = \det(A)$.

→ toute propriété valable pour les colonnes, l'est pour les lignes et réciproquement.

calcul de l'inverse d'une matrice :

si A est inversible ($\det A \neq 0$) alors :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ {}^tC}$$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$\det A = -5 \neq 0$ (donc A est inversible).

$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$, $C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1$

$C_{13} = (-1)^4 = -1$, $C_{21} = 10$, $C_{22} = -5$, $C_{23} = 0$, $C_{31} = -5$

$C_{32} = 1$, $C_{33} = 1$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 10 & -5 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad {}^tC = \begin{pmatrix} 0 & 10 & -5 \\ -1 & -5 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 0 & 10 & -5 \\ -1 & -5 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Système de Cramer :

On appelle un système de cramer tout système de n équation du 1ère degré a n inconnues (même nombre d'equation que d'inconnues) tel que le déterminant de la matrice (carrée d'ordre n) A des coefficient des inconnues est non nul.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}, \ \ldots,$$

$$x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{\det A}.$$

Exemple :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = -1 \\ 4x + 5y + 2z = 0 \\ 3x + 2y - z = -4 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{5} = 1 \ , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix}}{5} = -2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}}{5} = 3$$

Diagonalisation des matrices

(: recherche d'une matrice semblable contenant un maximum de zeros = reduction des matrices.)

Vecteur propres : On appelle vecteur propre d'un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E tout vecteur $x \in E$ qui vérifie $f(x) = \lambda x$ pour certain $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Ce scalaire λ est appelé valeur propre de f.
- si $x \neq 0_E$ est vecteur propre de f,

théorème 1 : L'ensemble E_λ des vecteurs propres de f associés à λ est un sous espace vectoriel de E.

théorème 2 : a deux valeurs propres distincts λ_1 et λ_2 de f correspondent deux sous espaces de vecteurs propres E_{λ_1}, E_{λ_2} tels que : $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0_E\}$.

théorème 3 : Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k$ des valeurs propres de f distincts. Alors la somme des sous espaces associés est directe :

$$F = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}.$$

valeurs propres : (Voir le cours suivant)

Diagonalisation des matrices.

Le problème de la réduction des matrices est la recherche d'une matrice semblable à $A = (a_{ij})$ [matrice d'un endomorphisme de dimension fini n]. et contenant un maximum de zéros.

1) <u>vecteurs propres</u>: On appelle vecteur propre d'un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$ espace vecteur E tout vecteur $\vec{v} \in E$ qui vérifie $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$.

* Si $\vec{v} \neq \vec{0}_E$ alors $\vec{v}$ est vecteur propre de f.

<u>théorème 1</u>: L'ensemble E_λ des vecteurs propres de f associés à λ est sous espace vectoriel de E.

<u>théorème 2</u>: à deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 de f correspondent deux ~~espace~~ sous-espaces vectoriels E_{λ_1} et E_{λ_2} tels que : $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{\vec{0}_E\}$.

<u>théorème 3</u>: soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ des valeurs propres de f distincts. Alors la somme des sous-espaces associées est directe : $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_m} = F \subset E$.

2) <u>valeurs propres</u> : On appelle valeur propre de l'endomorphisme f de E ($f: E \to E$) tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ vérifié $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ pour un $\underline{\vec{v}} \in E$.

<u>théorème 4</u> : a un vecteur propre $\vec{v} \neq \vec{0}_E$ correspond une valeur propre unique.

Définition 2 On appelle valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée A les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme associé à cette matrice A.

Polynôme caractéristique: Pour trouver les valeur propre λ de f, on part de $f(x) = \lambda x$. cela donne $(f - \lambda I_E)(x) = 0$

cette équation fonctionnelle entraine un système d'équations linéaires homogène.

$$(f - \lambda I_E)(x) = 0 \iff \det(A - \lambda I_{(n,n)}) = 0.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Le développement de ce déterminant fournit une équation de degré n en λ, appelée équation caractéristique de f et de A.

$$(-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} b_1 \lambda^{n-1} + b_2 (-1)^{n-2} \lambda^{n-2} + \cdots + b_0 = 0.$$

→ les coefficients b_i sont fonctions de a_{ij}. On trouve en particulier,

$$b_1 = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \mathrm{Tr}(f) = \mathrm{tra}(A)$$

$$b_0 = \det(f) = \det(A).$$

Le polynôme caractéristique de f est le polynôme :

$P_A(X) = P_f(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} tra(A) \cdot X^{n-1} + \dots + det(A)$

→ le polynôme caractéristique de f ou de A est indépendant de la base de E que l'on a choisie d'après le théorème suivant :

théorème : Deux matrices semblables ou mêmes polynômes caractéristique.

N.B (B est semblable à A et de la forme $B = P.A.P^{-1}$)

théorème : Soit ($f : E \to E$) f endomorphisme de E. Pour qu'un scalaire $\lambda \in K$ soit une valeur propre de f, il faut et il suffit λ soit racine du polynôme caractéristique de f ou de A.

théorème :

a) Les valeurs propre de f (ou de A) sont les racines de son polynôme caractéristique.

b) Les valeurs propres d'une matrice carrée sont les racines de son polynôme caractéristique.

théorème : Les valeurs propres d'une matrice triangulaire ~~alors~~ sont les éléments de sa diagonale principale.

4./ Diagonalisation d'une matrice :

théorème : Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E dont le polynôme

Le polynôme caractéristique de f est le polynôme :

$$P_A(X) = P_f(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tra}(A) \cdot X^{n-1} + \cdots + \det(A)$$

→ le polynôme caractéristique de f ou de A est indépendant de la base de E que l'on a choisie d'après le théorème suivant :

<u>théorème</u> : Deux matrices semblables on mêmes polynômes caractéristique.

N.B (B est semblable à A et de la forme $B = P.A.P^{-1}$))

<u>théorème</u> : Soit ($f : E \to E$) f endomorphisme de E. Pour qu'un scalaire $\lambda \in K$ soit une valeur propre de f, il faut et il suffit λ soit racine du polynôme caractéristique de f ou de A.

<u>théorème</u> :

a) Les valeurs propre de f (ou de A) sont les racines de son polynôme caractéristique.

b) Les valeurs propres d'une matrice carrée sont les racines de son polynôme caractéristique.

<u>théorème</u> : Les valeurs propres d'une matrice triangulaire, ~~alors~~ sont les éléments de sa diagonale principale.

4./ Diagonilisation d'une matrice :

<u>théorème</u> : Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E dont le polynôme

caractéristique $P_A(X)$ admet n racines distinctes λ_i alors il existe une base $\{\vec{e}_i\}_i$ de E telle que $f(\vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i$ pour $i = 1, 2, \dots, n$.

Théorème : une matrice carrée A d'ordre n est diagonalisable si seulement si son polynôme caractéristique admet n racines simples.

Réduction des endomorphismes
(Diagonalisation des matrices carrées)

Définition : Soit $f \in \mathcal{L}(E,E)$ un endomorphisme, où E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \neq \infty$. On sait que cette application $f : E \to E$ on peut la représenter dans une base quelconque de E.

Si $[f]_{\{\vec{e_i}\}_{i=1,n}}^{\{\vec{e_i}\}_{i=1,n}} = A$, $[f]_{\{\vec{f_i}\}_{i=1,n}}^{\{\vec{f_i}\}_{i=1,n}} = B$. alors

il existe une matrice de passage P de la base $\{\vec{e_i}\}$ de E à la base $\{\vec{f_i}\}$ de E . telle que :

$$B = P^{-1}.A.P.$$

→ On dit que A et B sont matrices semblables

→ La réduction des endomorphismes (matrices carrées) consiste à rechercher des bases dans lesquelles les matrices de ces endomorphisme se présentent sous formes simplifiées dites réduite (maximum de zéros de la matrice semblable).

Matrices diagonales : Définition ;

une matrice carrée est dite diagonale si les termes qui ne sont pas sur la diagonale principale sont tous nuls.

1) → L'ensemble des matrices diagonales est sous-espace vectoriel de l'espace $M_{(n,n)}(\mathbb{K})$ de dimension n.

→ le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

on a donc pour tout $k \in \mathbb{N}$.

si $D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n^k \end{pmatrix}$

ces propriétés montrent l'intérêt des méthodes de réduction d'une matrice à forme diagonale.

→ la diagonalisation de A matrice de l'endomorphisme f consiste à la réduction d'une matrice D semblable à A :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & E \\ \{\vec{e}_i\}_{i=1,n} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P"'] & \{\vec{e}_i\}_{i=1,n} \arrow[d, "P"] \\ \{\vec{f}_i\}_{i=1,n} \arrow[r, "D"] & \{\vec{f}_i\}_{i=1,n} \end{tikzcd}$$

$(D = P^{-1}.A.P.)$

$\{\vec{f}_i\}_{i=1,n}$ est la base de E où D une matrice diagonale.

Valeurs propres, vecteur propres :

Soit E un $\mathbb{K}$_ espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.
$B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n}\}$ une base de E, Soit f une application définie sur E ($f : E \longrightarrow E$). A est la matrice de f dans la base B. I désigne la matrice unité d'ordre n.

Déf : *) Un élément λ de $\mathbb{K}$ est appelé une valeur propre de f (ou de A) si il existe un vecteur $\vec{v}$ non nul de E tel que l'on ait $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ (ou $A.\vec{v} = \lambda \vec{v}$).

**) un élément non nul $\vec{v} \in E$ est appelé un vecteur propre de f (ou de A) s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que l'on ait :
$f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$.

→ $\vec{v}$ est appelé un vecteur propre associé à la valeur porpre λ de f (ou de A).

théorème : à un vecteur propre $\vec{v} \neq \vec{0}_E$ correspond une valeur propre unique λ.

Polynôme caractéristique de f (ou de A) :

Pour trouver les valeurs propres λ_i de f (ou de A). On part de $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ cela nous donne $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}_E$

→ cette équation équation fonctionnelle entraine un système d'équations linéaires homogène.

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}_E \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \ (\cancel{\text{car } \vec{v} \neq \vec{0}_E})$$

soit $A \in \mathcal{M}_{(n,n)}(\mathbb{K})$, A : représentation ~~de~~ matricielle de f dans une base de E. ($f : E \to E$) application linéaire

$$A - \lambda I = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

le développement de ce déterminant fournit une équation de degré n en λ, appelée équation caractéristique de f (ou de A). Le polynôme en λ de de degré n appelé polynôme caractéristique de f ou de A noté :

$$P_f(\lambda) = P_A(\lambda) = A - \lambda I = 0$$

$$P_A(\lambda) = A - \lambda I = (-1)\lambda^n + (-1)^{n-1} a_1 \lambda^{n-1} + (-1)^{n-2} a_2 \lambda^{n-2} + \cdots$$
$$\cdots + b_0 = 0$$

avec :

→ b_i : sont des fonctions des éléments de A (a_{ij}), en particulier.

$a_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn} = Tr(A) = Tr(f)$

$a_0 = \det(A) = \det(f)$.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer les vecteurs propres et les vecteurs propres de A.

1) polynôme caractéristique :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = (1-\lambda-2)(1-\lambda+2)$$

$$= (-1-\lambda)(3-\lambda) = (\lambda-3)(\lambda+1)$$

2) valeurs propres

$P_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 3$ ou $\lambda = -1$

3) vecteurs propres :

a) vecteur propre $\vec{v}_1$ associé $\lambda_1 = 3$, $\vec{v}_1 = (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1 \Rightarrow (A - \lambda I)\vec{v}_1 = \vec{0}_{\mathbb{R}^2}$$

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x_1 - 2y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 - y_1 = 0 \Rightarrow y_1 = +x_1$$

$\vec{v} = (x_1, +x_1) = x_1(1, +1)$ le $\vec{v}_1 = x_1(1, 1)$ est vecteur propre de $\lambda_1 = 3$ $\forall x_1 \in \mathbb{R}$.

b) vecteur $\vec{v}_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ associé $\lambda_2 = -1$

$$A\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2 \Rightarrow (A - \lambda_2 I)\vec{v}_2 = \vec{0}_{\mathbb{R}^2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_2 + 2y_2 = 0 \\ 2x_2 + 2y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 + y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = -x_2$$

$\vec{v}_2 = (x_2, -x_2) = x_2(1, -1)$ est le vecteur propre de $\lambda_2 = -1$ $\forall x_2 \in \mathbb{R}$.

La matrice $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice diagonale de A

avec $D = P^{-1} . A . P$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^2 \\
\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P"'] & \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \arrow[d, "P"] \\
\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \arrow[r, "D"] & \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}
\end{tikzcd}$$

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$: base canonique de $\mathbb{R}^2$

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ avec $(x_1 = x_2 = 1)$

Propriété's fondamentales : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $f : E \to E$

1) λ est une valeur propre de f (ou de A) ssi $\det(A - \lambda I) = 0$

2) deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristiques (même valeurs propres et vecteurs propres) et de plus le degré de ce polynôme égal la dimension de E

Sous_espaces propres :

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f (ou de A). Le sous_espace propre de f associé à λ est le sous_ensemble de E défini par :

$$E_\lambda = \{ \vec{v} \in E / f(\vec{v}) = A\vec{v} = \lambda \vec{v} \}.$$

Propriété's :

1) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda I) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ est sous-espace vectoriel de E

→ De plus si λ est une valeur propre de f, $\dim E_\lambda \geq 1$.

2) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ des valeurs propres de f deux à deux distincts, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ des vecteurs propres associés, et $F = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m \rangle$ Alors :

a) $f(F) \subset F$

b) $\dim E = m$ (et par conséquent $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$ est une partie libre).

c) les s.e propres E_i associés aux valeurs propres λ_i ; $1 \leq i \leq m$, sont en somme directe.

3) Si k est l'ordre de multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique, on a :

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq k$$

Diagonalisation :

Déf 1) Un endomorphisme $f : E \longrightarrow E$ est dit diagonalisable s'il existe une base B' de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

2) Une matrice A carrée d'ordre n est dite diagonalisable s'il existe une matrice inversible P telle que la matrice $A' = P^{-1}.A.P$ soit diagonale.

Théorème (1) Soit $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension fini "n". Alors :

a) f est diagonalisable ssi E admet une base formée de vecteurs propres de f.

b) Soit $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m\}$ l'ensemble de valeurs propres de f. $E_1, E_2, \dots E_m$ les sous-espaces propres associés

Alors : f est diagonalisable ssi $\dim E_1 + \dim E_2 + \dots + \dim E_m = \dim E$.

Théorème (2) : pour qu'une matrice carrée d'ordre n soit diagonisable, il faut et il suffit que toutes ses valeurs propres dans $\mathbb{K}$ et que la dimension du sous-espace propre associé à chaque valeur propre soit égale à l'ordre de multiplicité de cette valeur propre.

Théorème (3) :

si f a n valeurs propres distinctes si $n = \dim E$, alors f est diagonisable.

Théorème de Cayley-Hamilton :

Soit $A \in M_{(n,n)}(\mathbb{K})$, P_A son polynôme caractéristique, alors : $P_A(A) = 0$.

Exemples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (P_A(\lambda) = (3-\lambda)^2(4-\lambda). \rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3$$

$$E_{\lambda_1=4} = \langle (1,0,1) \rangle, \quad E_{\lambda_2=3} = \langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Application : systèmes différentiels :

Dans de nombreux problème en mathématique, en physique en mécanique, en économie, ..., il est particulièrement intéressant (parfois nécessaire) de travailler sur une matrice diagonale, par ailleurs les vecteurs propres et les valeurs propres correspondant à certaines directions et certaines valeurs privilégiées.

Exemple : Resolution d'un ~~Sys~~ système différentiel.

Soit $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longmapsto x(t)$ $\quad$ $t \longmapsto y(t)$

deux fonctions dérivables telles que :

$\vec{v} = (x, y)$, $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

$\cancel{\vec{v}(x,y)}$ $\quad \boxed{\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, \quad \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\vec{e}_1 + \dfrac{dy}{dt}\vec{e}_2}$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$\lambda_1 = 1 \longrightarrow \vec{v}_1 = (1, -1) \rightarrow \vec{P}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$

$\lambda_2 = 4 \longrightarrow \vec{v}_2 = (1, 2) \rightarrow \vec{P}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$

$$\begin{pmatrix} \frac{dX}{dt} \\ \frac{dY}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dX}{dt} = X \\ \frac{dY}{dt} = 4Y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = \alpha e^{t} \\ Y = \beta e^{4t} \end{cases}$$

$$\vec{v} = \alpha e^{t} \vec{f_1} + \beta e^{4t} \vec{f_2}$$
$$= (\alpha e^{t} + \beta e^{4t}) \vec{e_1} + (-\alpha e^{t} + 2\beta e^{4t}) \vec{e_2}$$

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = \alpha e^{t} + \beta e^{4t} \\ y(t) = -\alpha e^{t} + 2\beta e^{4t} \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}}$$

<u>cas général</u> :

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A \in M_{(n,n)}$$

$$\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n = \text{cte} = U_1 \\ V_{n+1} = 4\, V_n = 4^n V_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_n = u_1 + 4^n v_1 \\ v_n = u_1 + 2 \cdot 4^n \cdot v_1 \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : De même une relation de la forme :

$$U_{n+2} = a\, U_{n+1} + b\, U_n$$

$$\begin{cases} v_n = u_{n+1} \\ v_{n+1} = a\, v_n + b\, u_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{n+1} = v_n \\ v_{n+1} = a\, v_n + b\, u_n. \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}}$$