UNIVERSITE ZIANE ACHOUR - DJELFA

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Physique

Support du Cours (Partie N°02)

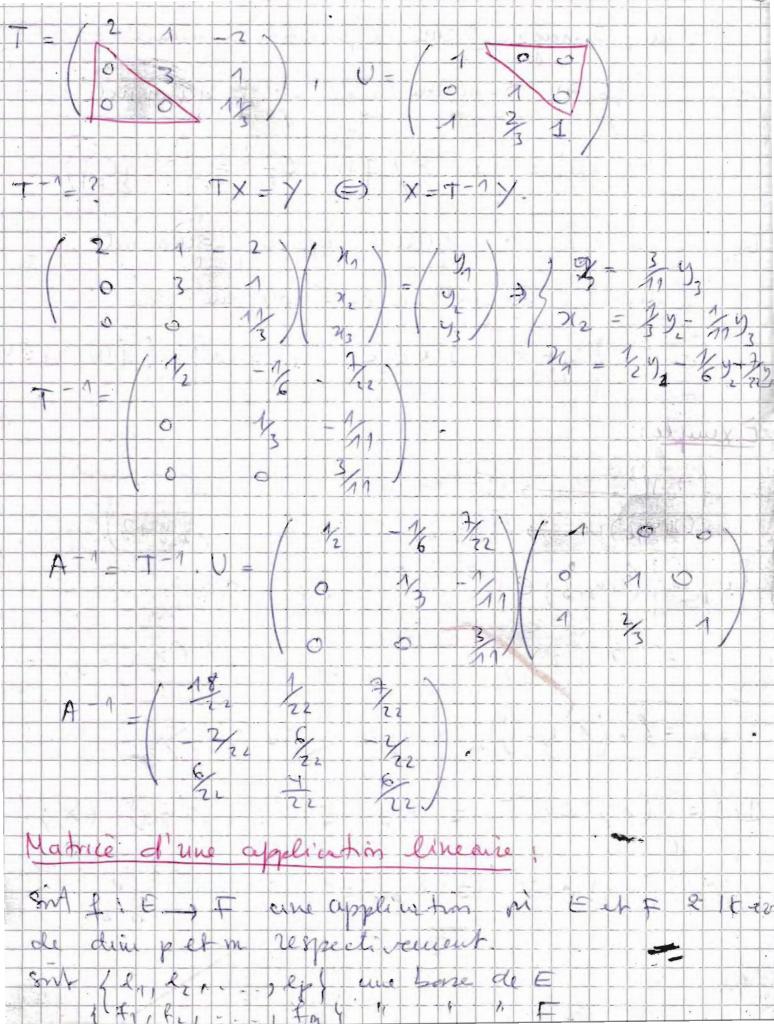
Méthodes Mathématiques pour la physique II

Pour Master-1- Physique de la Matière Condensée

Continu de ce cours :

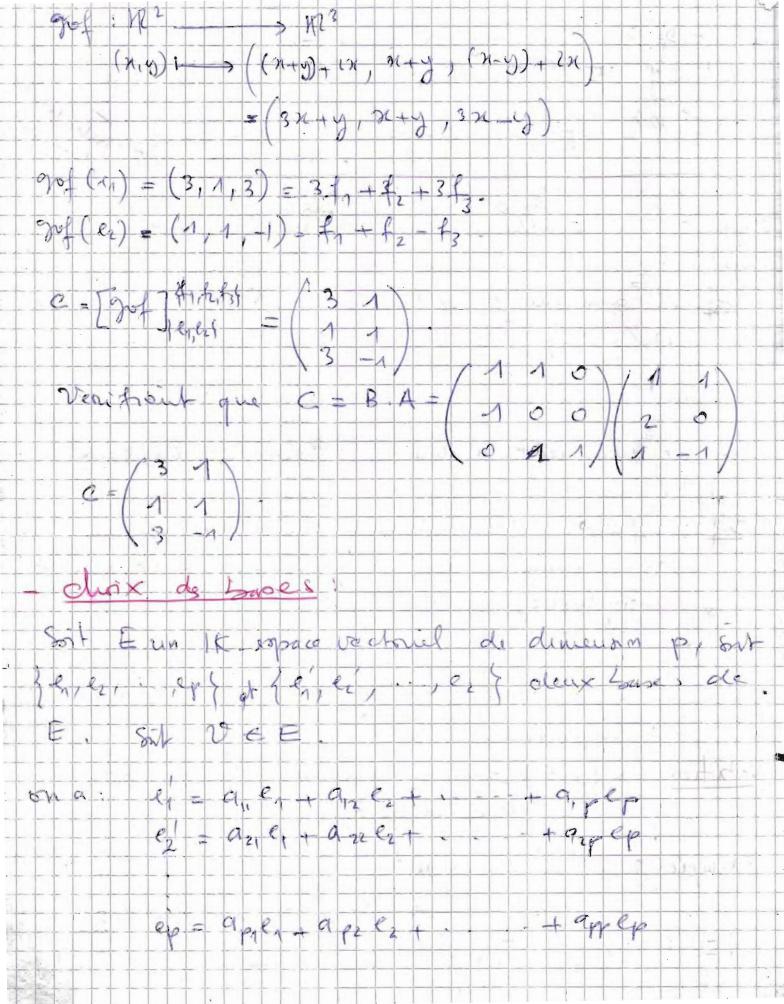
- 1) Rappels sur lois internes,
- 2) Structures algébriques,
- 3) Espaces Vectoriels,
- 4) Rappels sur les applications,
- 5) Applications linéaires,
- 6) Matrices,
- 7) Matrice d'une application linéaire,
- 8) Déterminants, Matrices inverses, Résolution des systèmes linéaires par différentes méthodes,
- 9) Diagonalisation des matrices, diagonalisation des matrices carrée, Applications.

Cours de Mr Yazid DEROUICHE, Enseignant Chercheur au sein du Département de Physique

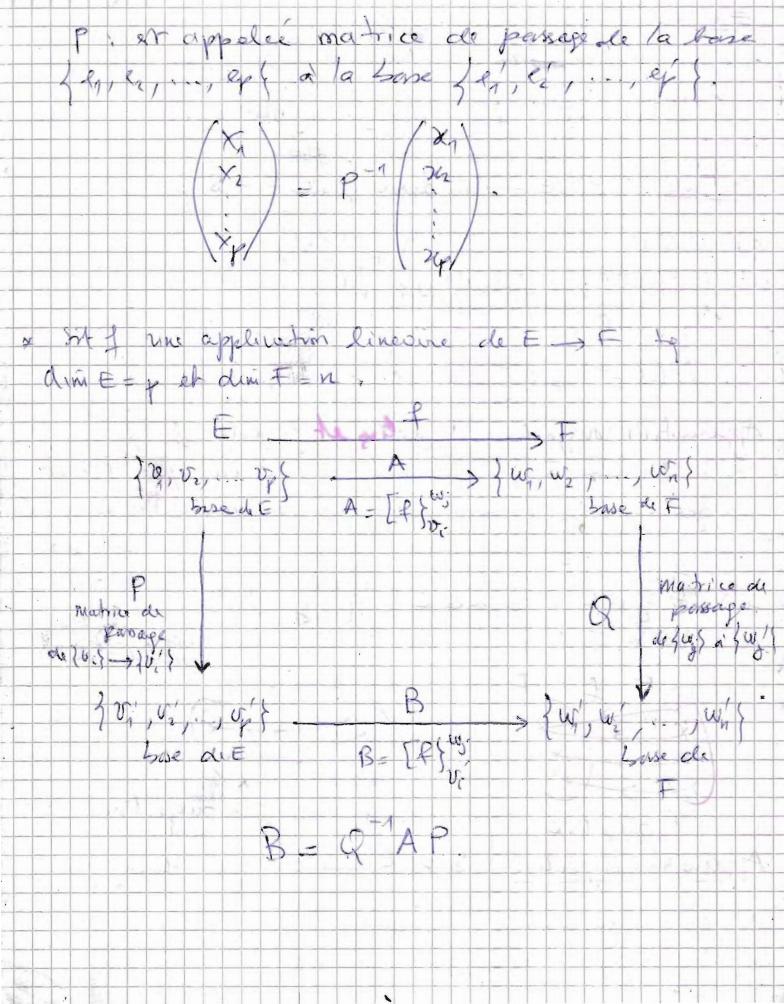


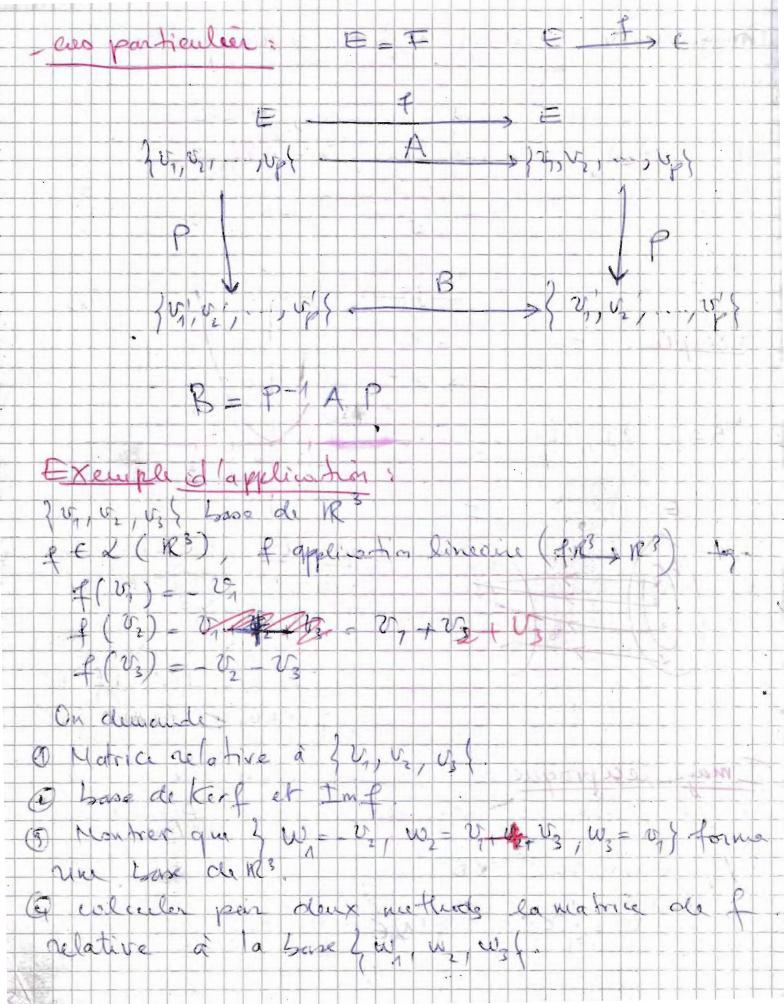
On a f (c) & F or F a course Some 3 for for ifn il it de in pour flez) f (2) - 921 fn + 922 fz + La matrice A = a12 a22 - apr A: matrice against on light, et p coloring est Alifate p of fist = 1, m / par form on la note: [] (#) = A. For Quand on change Is horse, la ma me diange. > Cont 0 e E 1 0 = x, e, + x, e, + x, ep 2(v) = F + (v) = X, +, +x +2 + - + xm +m Quelle relation ya + il entre x; it X; ? $\begin{pmatrix}
x_1 \\
x_2 \\
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\alpha_{12} \\
\alpha_{12} \\
\alpha_{23} \\
\alpha_{24} \\
\alpha_{25} \\
-$ Xm / gim apm/ xp/

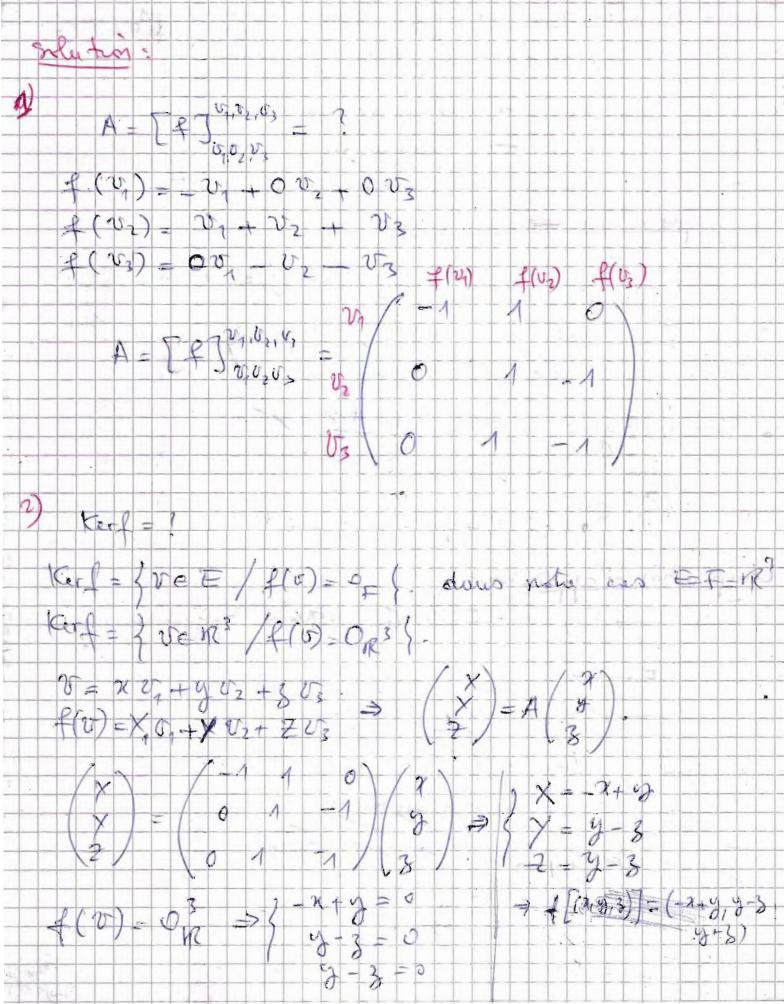
Proposition: Sont E, F, G 3 IC. e. or de oline i P, n, m f. E , F, g. F , G 2 applications lineare a gof E 36 un applie for lineaux plus: 50 7181 = 60 78911 × 6 7461. Expli: f: 123 (n,y) -> (n,y, 2n, n,y) o : MB , MZ s (x,y,g) (x+y,x,g+g)Donner les representations materialles de f, of et got Draws come Goods & Good commiques de 18° et 185) e = (1,0), e = (0,1) { sove de 412 6 f = (1,010), f2 = (0,1,0), f3 = (0,0,1) } 4000 de 183 f(R1) = (1,9,1) = f1 + 2 f2 + f3 f(e) = (1,0,-) = f1 + of, -f3 A= A 161, 62, 63 = (1 1). 9(1)=(1,10)=1,+12+0/3 2 (f3) = (0,0,1) = 0f1+ of1+ f3

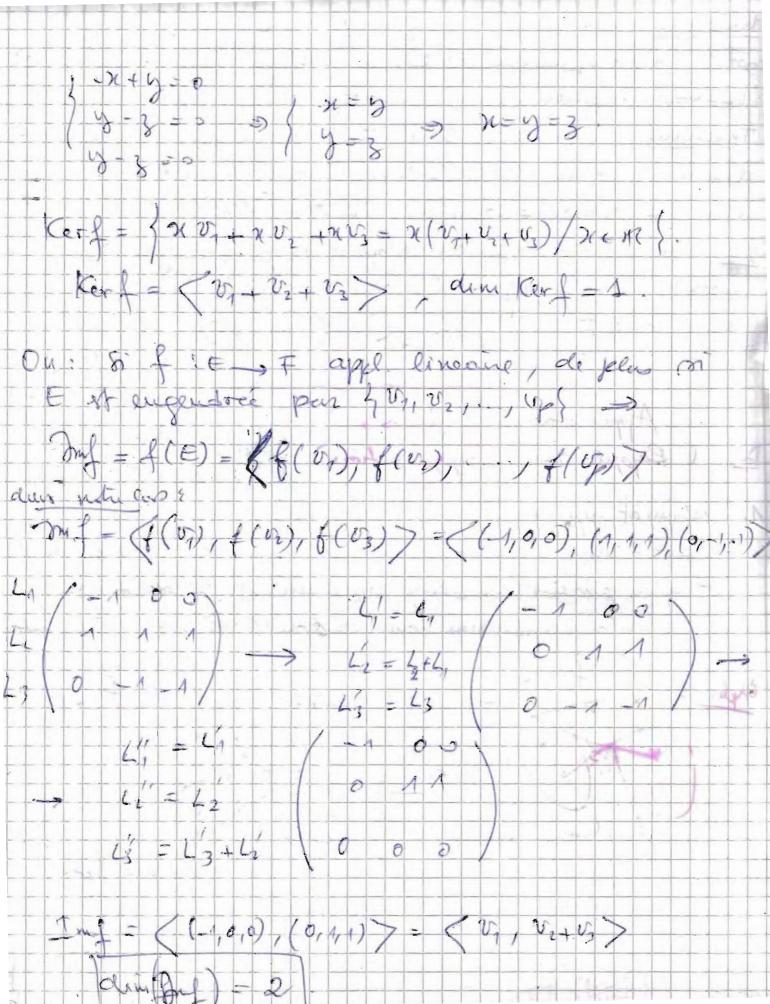


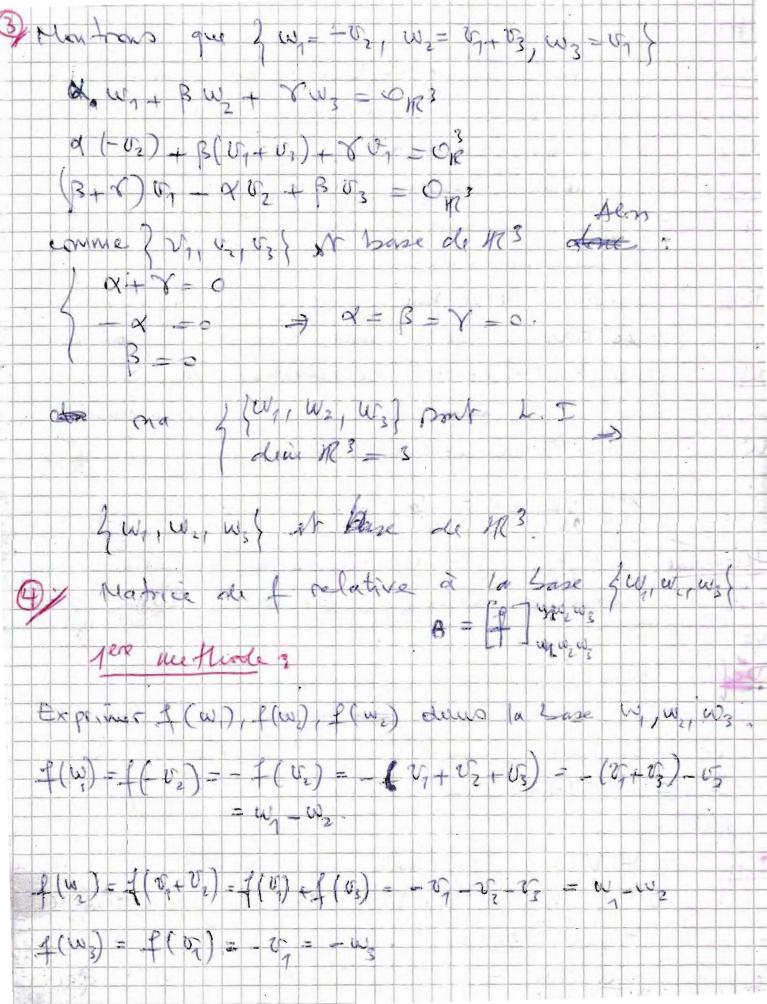
ed free-921 922 0, 0 9,0 0,2 92 aly dip P matrice corrée muersible & coefficient Les cloring de P Dont données par de vectours e, e, MI DEE = x e + x e 2 + - Tylep = X1 e1 + X2 e2 + ... + xpep Quelle et la relation extre X; et X. ma $\begin{pmatrix} 3c \\ x_2 \end{pmatrix}$

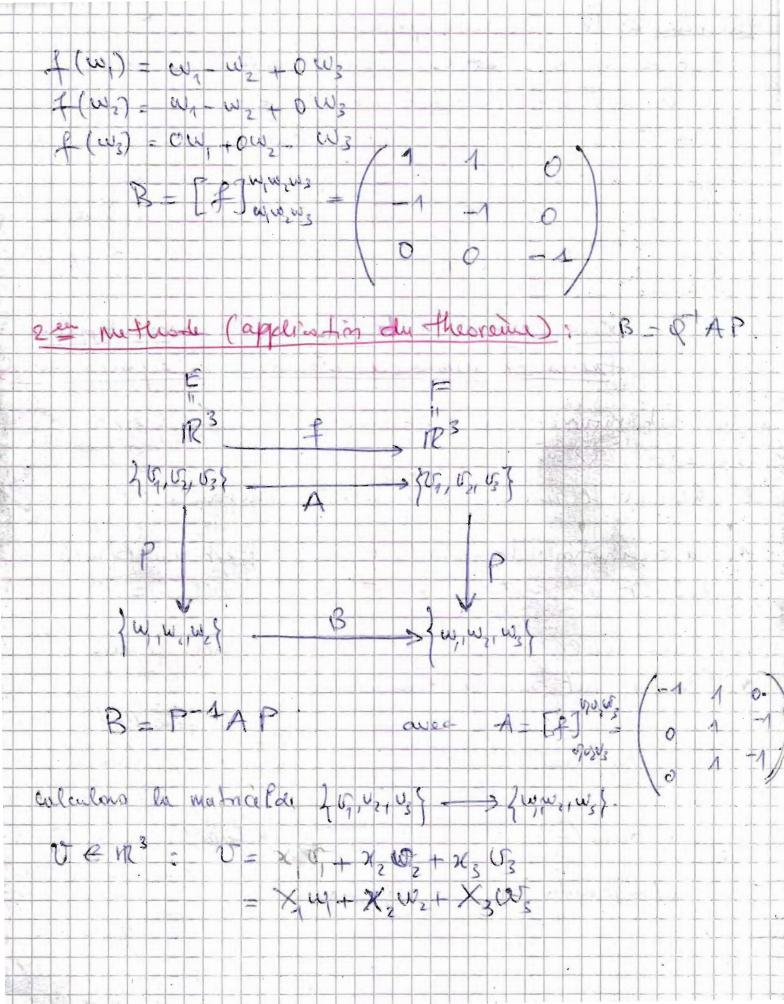


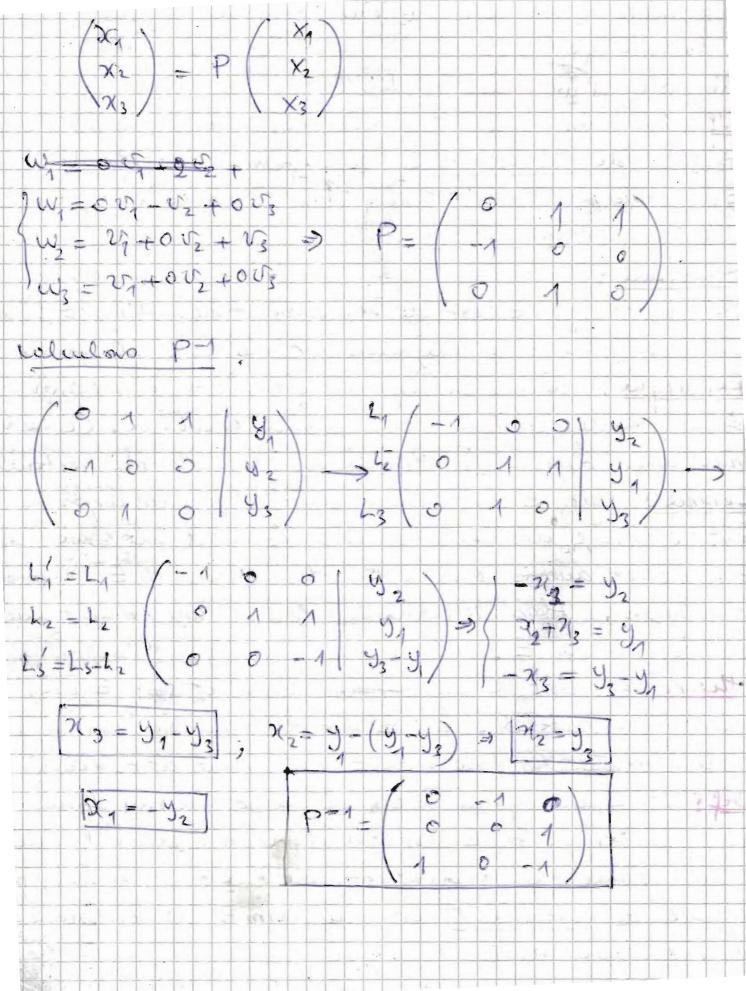


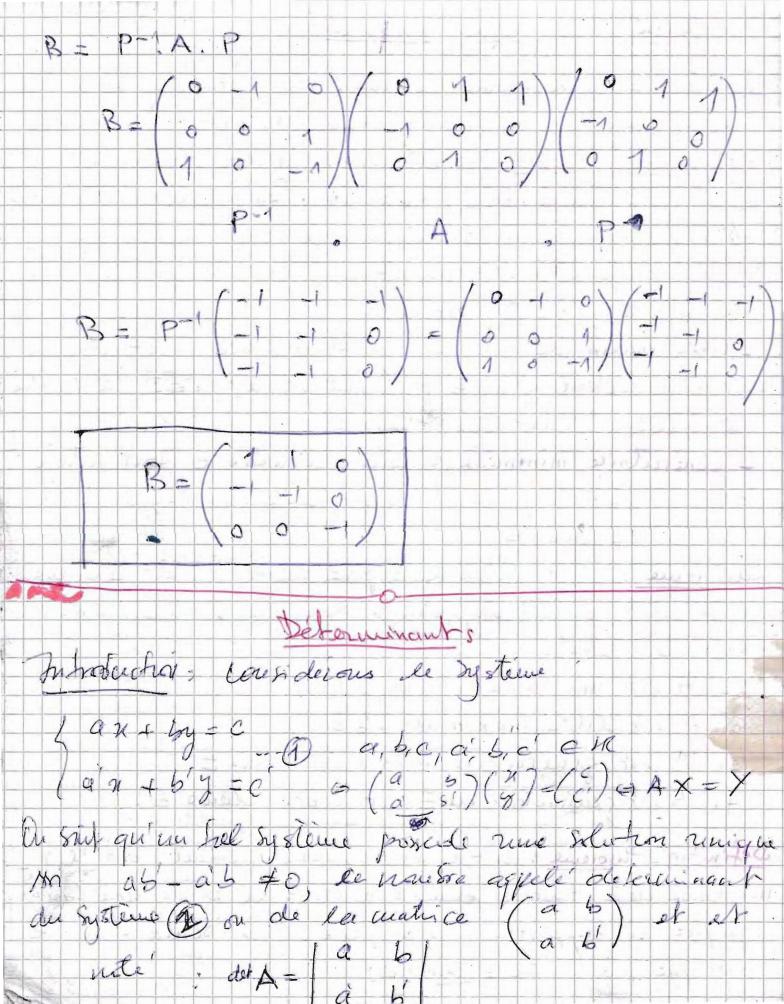












= a b = ab ong 92n detA= | a21 an ani anz. donc si de pose on consideré de système AX=C avac X= 22 is C= Ce ce système a une unique selection soi (det A + 0) = (vect al on vert digne L. I mineurs ras Radeurs: Sof AEMan CIO, IC = RuC. Sont Aij" la matrice esteurus en supperiment i em ligne et la jeur colonne; cad du ligne la la clome contemant l'edemant di

Aiz et appelé nineur de l'élèvent dis le vouloire (-1) det (Ais) et appelé coefacteur ale Exemple: A E) (3,3) $A = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{23} \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{32} & a_{23} \\ a_{11} & a_{32} & a_{23} \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{23} \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{23} \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$ $C_{23} = - \begin{vmatrix} a_{14} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ 931 932 Colcul d'un deferminant. le determinant de la matrice A E Main (matrice) det A = le somme des élevient d'une lingue (on d'une colonne) multiples cha cun pour son cofacteur.

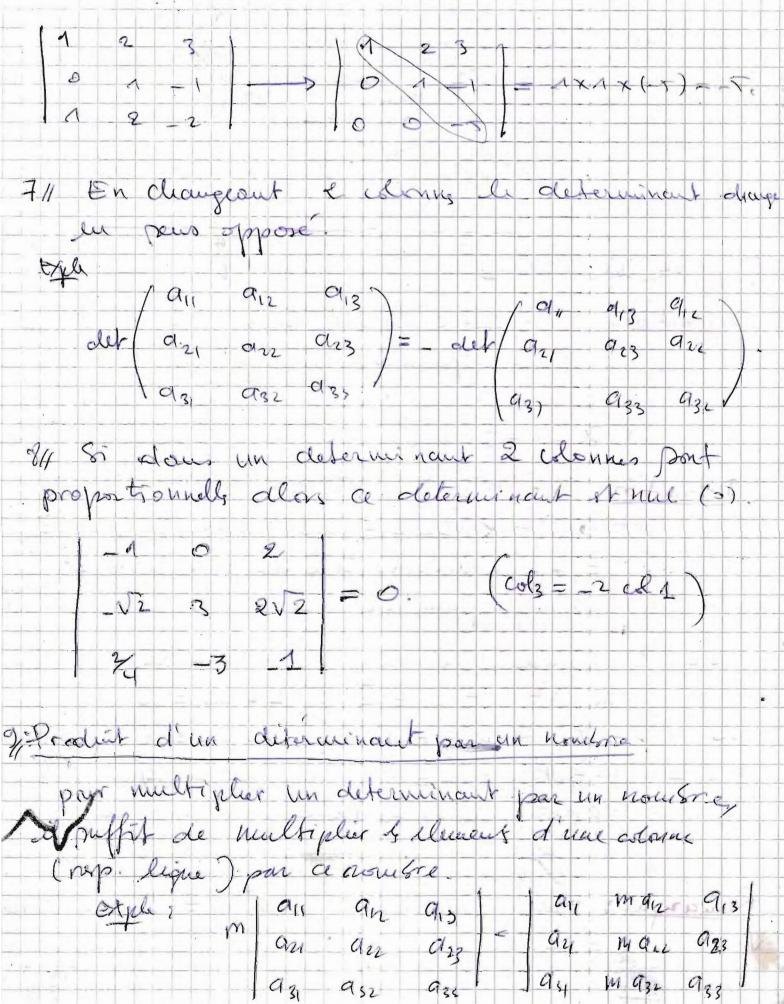
Exemple. $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$ azz clz3) c132 C(33 $a_{11} + a_{12} + a_{13}$ $= a_{11}(-1) \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + a_{12}(-1) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{12}(-1) \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{32} & a_{32} \end{vmatrix}$ = 911 (922 - 933 - 932 923) - 912 (921 935 - 951923) + 913 (921932 - 931922) det A = 9/2 C12 + 9/22 C22 + 9/32 C32.

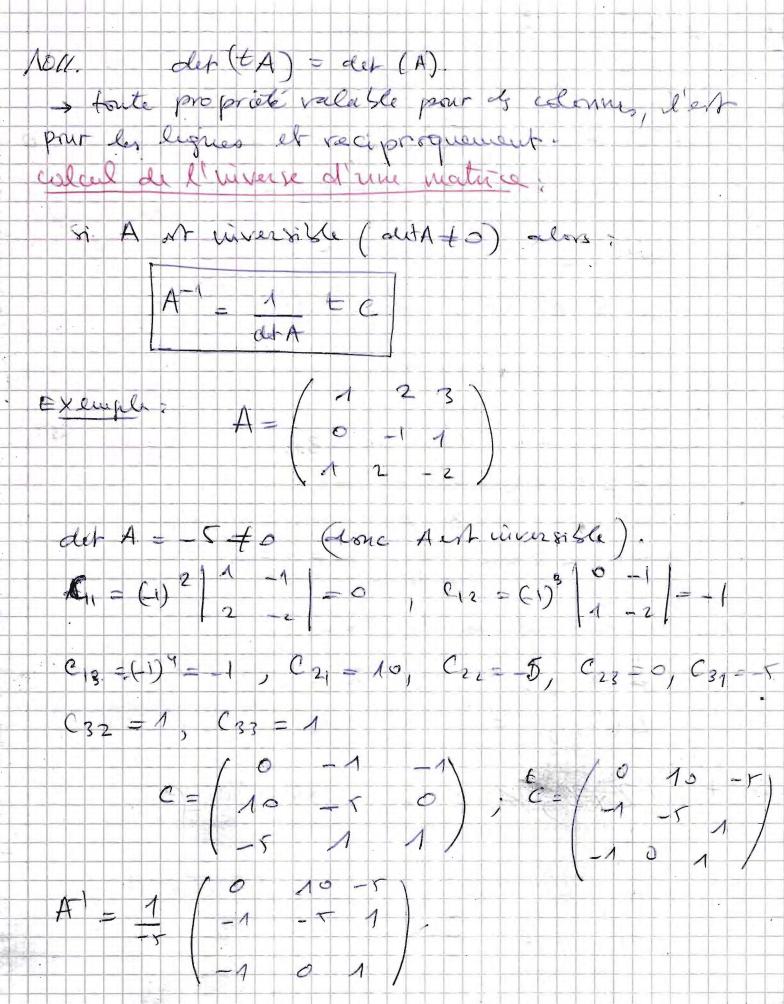
Sine matrice currée en regulière lorsque cont determinant est non pul in dut matrice sourgentière pour matrice non regulière. 1º Down tout alterninant a) Le nineur (de même le cofacteur) de tont élement en vide pendait des telements apportement à la maine lique de ceux appertenant à la men Colonne b) si tous de element (de mine de Cefacteur) de b) si tous le element d'une colonne (resp. lique) sont nul, alors le Cléterminant et mul. a) i ly mineurs (de même ly exfacteurs) de los les clans and d'rine colonne (resp. lique) sont mil, also le debermiras

wV W. V

20: Si dans un determinant d'sidre 1, lous element d'une coloine (resp. lique) sont mul, souf un alors le de les univant mit ce derno, multiplie par son exactor. Inversement on pent of miltre un deleminal d'orde n-i, sons la soine d'un determinant d'ordre Notation. A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 32 = hi une colonne : ed: - coli coli rolors: det (Casez, ..., Cir, Ci, Ci, Ci, Ci, Ci, det (C1, C1, --, Ci, Ci) (C4,) --, (c1) + olst (C1, C2, -, C4, C6, C1, C1, C1, C2) 400 'la valeur d'un determinant no change pas Janual on recuplace une channe ci par Ci+sci - plus généralement la valour d'un det ne decuye pas quonde on organte a une colonnes une combinai con l'inevire de autre colonnées. $C: \longrightarrow Ci + \sum_{j \neq i} \lambda_j C_j$ 50 Le determinant d'une matice triangulaire = an product of element diagonaux. 69 Le déterminant de 2 matrices carrées de madre, - en produit des déterminant de deux matrice,.

det (A x 3) = det A x det B.





sydeme de Craves, Ou appelle un système de crainer tont système de n apreation de l'en degré au meannes mine pourse d'equention que d'unonnues) tol que le déterminant de (a matrice (currée d'ordre n) A els coefficient des un connais est non mul 1 911 X1 + 9,2 72+ --- + 9,1 X = b1 --- + 924 Xu-bz) azi X, + 922 Hz + -- - + ann Xu - Lu anix, + anz Xz + . an an on Cin anz --- ann De 912 - 911 0111 6 Dr. 912 - 612h det A and A ag an - br an = laim . anz - . bn det A

Exemple: 14x +8y +2y =0 (=) (x < 2) 12x +30+3=1 3 2 -1/ 13x +2y - 3 = -4 +5+0 Diagonalisation des matrices (rochardied une matrice pendable contenant un maxim un de zoros = reduction de matrices.) Vecteur propres du appelle vecteur propre of un avolone.
orphisme f d'un le sopace vectoriel E tout vecteur se e E qui venific f(x)= Ax pour contain de 1/6 · ce scalaire d'est appeté valeur propre de f. · pixto entrecteur propre de fatos

Mesterne : L'ensemble Et des vecteurs propries de f associés à d'At un pous espace vectoull de E. tureline a a deux valeurs propres distincte d'et. de l'Correspondent deux sons espaces de vocteurs propres Edy Edy Selsque: Edy NE = 10 El Heoreno 3: Soient 2/2, - La de valeur propres de f dinsticts. Alon la pomme de sous espaces associés est directe: F = Ex C Can. valurs propres: (Voir le cours Suivant)

Diagnalisation des matrices. Le problème de la réduction des matrices est la réclieration d'une matrice semblable à A= (ai) [matrice d'un endomorphisme de démension finin] et contenant un maximum de zezes. 1) veckurs propres: Ou appolle vecteur propre d'un en domorphisms f d'un /K espece vecker E tont vecteur $\vec{v} \in E$ qui verifie $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ pour un certain $\lambda \in IK$.

Si $\vec{v} \neq \vec{\partial}_E$ alors \vec{v}' est vecteur propre de f. Merène 1: l'ensemble E des vectoriel de E. des vectoriel de E. theoremez. a deux valeurs propres détinctes n, et àz de f corres pondent deux serspace son espaces vectoriels En et En tels que: En NEn= { defthéorèmes: soient da, dz, ..., don des valours propores de f distincte. Alors la pomme des passespaces associés est directe: ELDEIZO & Edn = FCE. valeurs propres: ou appelle voeleur propre de l'ensimer-phisme f de E (f:E-) E) tout pealaire DEIK verifié f (8)= 2 ET pont un 20 EE. thereau y: a un vecteur propre v7 de Correspond une valeur propre unique. Diffustri 2 mappelle valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice corréé A les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endornorphisme avosocié à cette matrice A. Polgnone conactéristique: Pour trouver les valeur propre A de f, m part de f(n) - 2x. cela donne (I-dIE)) citte équation fonctionnelle entraine un pyséeme d'équations dineaires homogène. (f- 2IE) (n) == (det (A - 2 f(n,n)) =0. 9,-2 912 913--- 912 1 921 922-2 923---- 922 931 932 933-2 --- 932 =01 an, 92 93 and le développement de ce déterminant formit une équation cle dégré n en d, appetée équation caractristique de le de A. f of de A. (-1)" A" + (1)by d"+ bz(-1)" - 27"-2+ ---+ bo=0. a les coeffeicets bi sont des fonctions de gij en trouve du particulier. b_1 = 9, + 9,2 + - + 9m = tr(f) = tra(A) b_0 = det(f) = oleh(A).

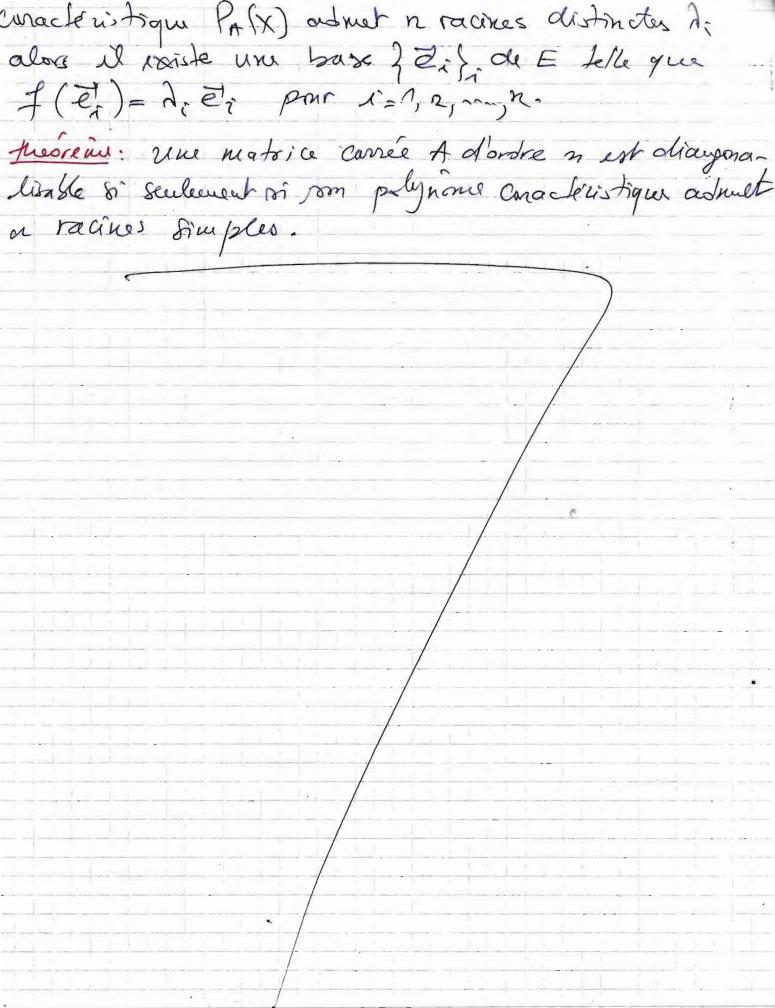
Le polynome conactéristique de 1 est le polynome: PA(X) = Pf(X) = (-1)"X+ (-1)"-1 tra(A).X"+ ---+ alet(A) Je polynome conactéristique de f on de A est midépen-dont de la Case de E que el ma choisse d'après le théorème suivant: théorème: peux matrices sembla sus m mens polynoms mackristique. N.S (Best Dem 868 & a A it de le from B=P.A.P) theorem: Soit (f: =) =) f endomorphism de E.

four qu'un scalaire de 1 k soit une valeur propre de
f, il faut et il duffit d soit racine du jalgnimes
conacteristique de f m de A. Merrene. ron polynomi Caractéristique. de son préguence caractéristique. théorème: les valeurs propres d'une matrice triangulaire, ales pont le ilément de pa diagnale pour cipale. 4. / Diagonilisation d'une matrice. théorème: soit E un 1K espace rectoriel de dimensión on et fun endomorphisme de E dont le polynome

Le polynome anactéristique de 1 est le polynome: PA(X) = Pf(X) = (1)"X+ (-1)"-1 tra(A).X"+ ---+ det(A) Je polynome conactéristique de f on de A est midépen-dont de la Case de E que l'en a choisie d'après le théoreme suivant: théorème: Deux matrices sembla sus on mens plynoms madéristique. N.S (Best Dem 868 & a A it de le from B=P.A.P) theorem: Soit (f: E -) E) f endomorphism de E.

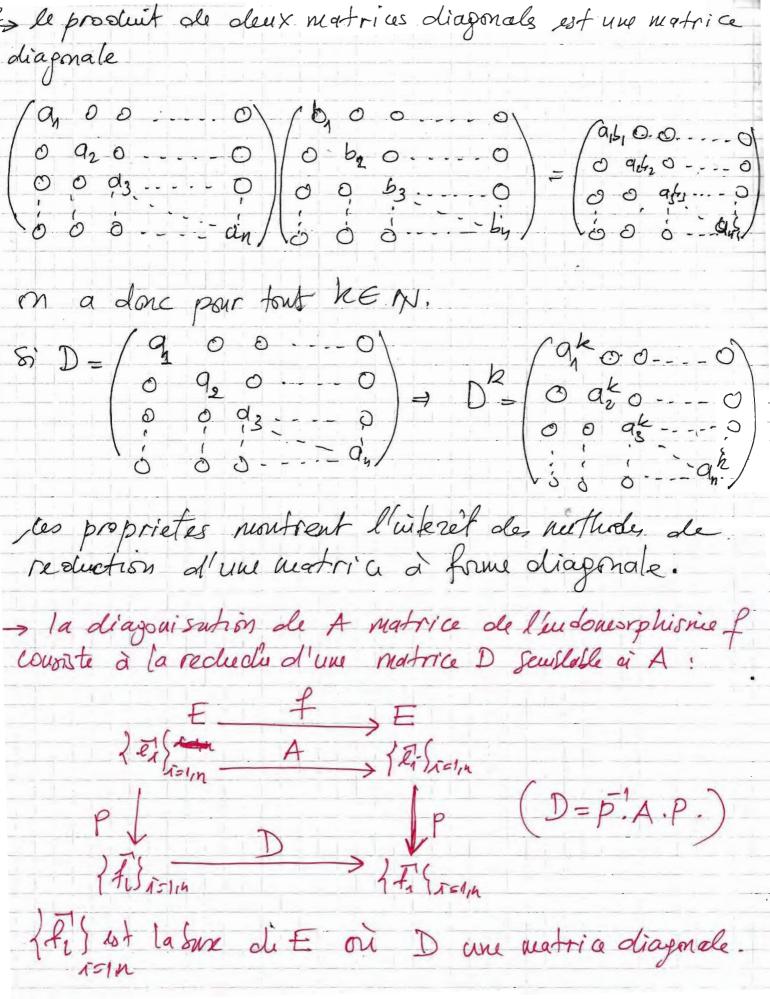
four qu'un scalaire à EIX soit une valeur propre de
f, il fant et il duffit à soit racine du palgnime.

conacteristique de f m de A. a) Les valeurs propre de f (m de A) sont les racines de von polynomes Caractéristique. de son préguence caractéristique. Musical: les valeurs propres d'une matrice triangulaire. 4. / Diagonilisann d'un matrice. théorème: soit E un IK-espace rectoriel de dimensions on et fun endomorphisme de E dont le polynome



Réduction des endomorphismes (Diagonaliation des matrices corrées) Définition: Soit f el(E,E) un en donorphisme, ni È un K-espace vectoriel de dimension n tos. En sont que cette application f: E , E on peut la représenter dous rure base qu'el gronque de É. Si [f] {ei] r=1,n = A , [f] {fi} {i=1,n} = B . alons il existe une matrice de passage P de la Esse ? E. S de E à la Sone ? Fi. s di É . thèlle que : B=P.A.P. , 84 dit que A et B sont matrice peublales > La réduction des ludomorphismes (matrices airès) consiste à rechectur des bases dans les quelles les matrices de ces endomorphisme se presentent posso formes simplifiées dites reduite (maximum de zéros de la ma trice semblable). Matrices diagonales: Definition; une matrice carrée est dite diaponale si le termes qui se sont pas sur la diaponale principale sont tous nuls. nuls.

L'ensemble de niatrices diagonales est pous especée
Vectoriel de l'espace $M(n_i y)$ (k) de dimension n.



valeurs propres, vecteur propres: Soit E un IK_ espace vectoriel de décuersion n>1. B= {5, bz, ..., bn} une some de E, Soit frune application définie pur E (f:E-E). A est la matrice de f dous la sure B. I désigne la matria unité abordre n. Dif nu de A) si il existe un vecteur von nul de E tel que l'on ait f(V)= à v (ou A.V= àv). ** un élément non nul d'EE est appelé un vecteur propre de f (on de A) s'il existe de 1k tel que l'avant! , V'est appelé un vecteur propre associé à la valeur porpre d de f (on de A). theorème: à un vecteur propre v7+0 correspond une valeur propre nuique d. Polynoine Coracteristique de f (m de A): Pour frouver les valours propres A_i de f(ndeA). On port de $f(\vec{V})=A\vec{V}$ Cela nous donne $(A-A\vec{I})\vec{V}=\vec{\delta}_{\vec{E}}$ « cette équation équation fonctionnelle entraîne un système d'équations linéaires homogène. (A-AI) F= OE (A-AI) = O (ANT * RE)

Soit ACM (nin) (1K), A : represendation of matricielle de of daws use base de E. (f: E-> E) applianting lineaire $A - \lambda I = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} - \cdots - a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \cdots - a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda - \cdots - a_{3n} \end{vmatrix} = 0$ ani anz anz ---- ann-2 le developpement de ce déférannant fournit une équation de dégré n en l appelée équation correcteristique de f (m de A). Le polynome en d de de degré n appelé polynome coracteristique de fonde A P=(A) = P_A(A) = A-AI = 0 PA(A) = A-AI = (-1) An + (-1) By An-1 + (-1) 92 An-2. > bi: Sont des fonctions des llements de A (aij), en partialier. $+a_{ny}=Tr(A)=Tr(g)$ an = an + azz + azz + ao = def (A) = det (f).

Example: Soft
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
. Collabor the vectous propres of large vectous progres of A .

1) polynômic curackichique:

$$A(A) = det(A - dI) = det \begin{bmatrix} A & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - A \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} A - A & 2 \\ 2 & -A \end{bmatrix}$$

$$P_A(A) = \begin{vmatrix} 1 - A & 2 \\ 2 & 1 - A \end{vmatrix} = (A - A)^2 - 4 = (A - A - 2)(A - A + 2)$$
2) prolong propres
$$= (-1 - A)(3 - A) = (A - 3)(A + 1)$$

$$P_A(A) = 0 \Rightarrow A = 3 \text{ ou } A = -1$$
3) Vectours propres:
$$\underline{A} \text{ Vectours propres}:$$

$$\underline{$$

vecteur proprie de d_=3 + n eR.

b) vertour
$$\overrightarrow{U}_{i} = (n_{i}, y_{i}) \in \mathbb{R}^{2}$$
 canocie $A_{i} = -1$

$$A\overrightarrow{U}_{2} = \lambda_{1} \overrightarrow{U}_{2} \Rightarrow (A - \lambda_{2}) \overrightarrow{U}_{2} = \overrightarrow{O}_{R^{2}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i} \\ y_{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2n_{i} + iy_{i} = 0 \\ 2n_{i} + iy_{i} = 0 \end{cases} \Rightarrow y_{i}^{2} = n_{i}$$

$$\overrightarrow{U}_{i} = (x_{i}, -n_{i}) = x_{i}(1, -1) \text{ as the vectour propre did}_{i} = -1$$

$$\overrightarrow{V}_{i} = (x_{i}, -n_{i}) = x_{i}(1, -1) \text{ as the vectour propre did}_{i} = -1$$

$$\overrightarrow{V}_{i} = (x_{i}, -n_{i}) = x_{i}(1, -1) \text{ as the vectour propre did}_{i} = -1$$

$$\overrightarrow{V}_{i} = (x_{i}, -n_{i}) = x_{i}(1, -1) \text{ as the vectour propre did}_{i} = -1$$

$$\overrightarrow{V}_{i} = (x_{i}, -n_{i}) = x_{i}(1, -1) \text{ as the vectour propre did}_{i} = -1$$

$$\overrightarrow{V}_{i} = (x_{i}, -n_{i}) = x_{i}(1, -1) \text{ as the vectour propre did}_{i} = -1$$

$$\overrightarrow{V}_{i} = (x_{i}, -n_{i}) = x_{i}(1, -1) \text{ as the vectour propre did}_{i} = -1$$

$$\overrightarrow{V}_{i} = (x_{i}, -n_{i}) = x_{i}(1, -1) \text{ as the vectour propre did}_{i} = -1$$

$$\overrightarrow{V}_{i} = (x_{i}, -n_{i}) = x_{i}(1, -1) \text{ as the vectour propre did}_{i} = -1$$

$$\overrightarrow{V}_{i} = (x_{i}, -n_{i}) = x_{i}(1, -1) \text{ as the vectour propre did}_{i} = -1$$

$$\overrightarrow{V}_{i} = (x_{i}, -n_{i}) = x_{i}(1, -1) \text{ as the vectour propre did}_{i} = -1$$

$$\overrightarrow{V}_{i} = (x_{i}, -n_{i}) = x_{i}(1, -1) \text{ as the vectour propre did}_{i} = -1$$

$$\overrightarrow{V}_{i} = (x_{i}, -n_{i}) = x_{i}(1, -1) \text{ as the vectour propre did}_{i} = -1$$

$$\overrightarrow{V}_{i} = (x_{i}, -n_{i}) = x_{i}(1, -1) \text{ as the vectour propre did}_{i} = -1$$

$$\overrightarrow{V}_{i} = (x_{i}, -n_{i}) = x_{i}(1, -1) \text{ as the vectour propre did}_{i} = -1$$

$$\overrightarrow{V}_{i} = (x_{i}, -n_{i}) = x_{i}(1, -1) \text{ as the vectour propre did}_{i} = -1$$

$$\overrightarrow{V}_{i} = (x_{i}, -n_{i}) = x_{i}(1, -1) \text{ as the vectour propre did}_{i} = -1$$

$$\overrightarrow{V}_{i} = (x_{i}, -n_{i}) = x_{i}(1, -1) \text{ as the vectour propre did}_{i} = -1$$

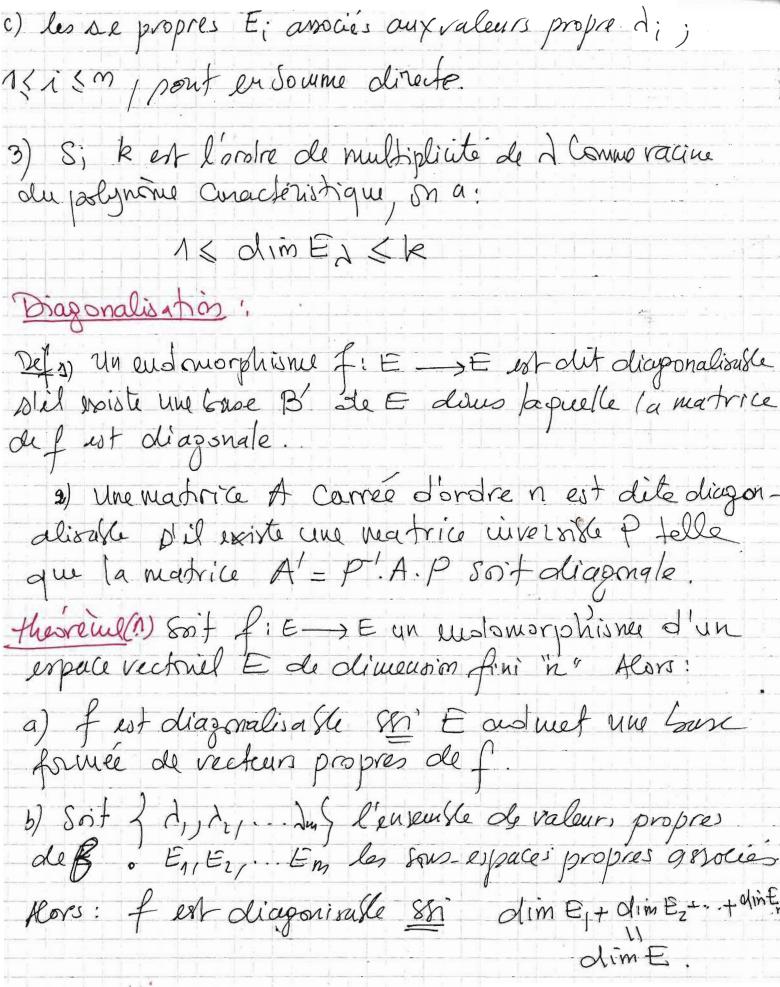
$$\overrightarrow{V}_{i} = (x_{i}, -n_{i}) = x_{i}(1, -1) \text{ as the vectour propre did}_{i} = -1$$

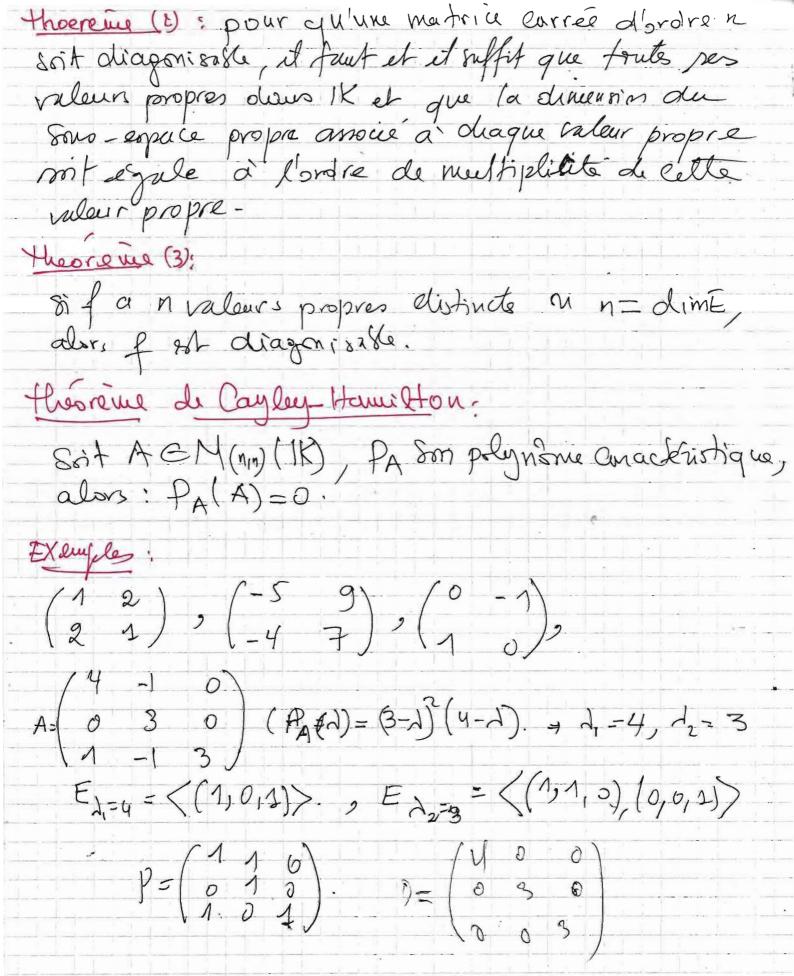
$$\overrightarrow{V}_{i} = (x_{i}, -n_{i}) = x_{i}(1, -1) \text{ as the vectour propre did}_{i} = -1$$

$$\overrightarrow{V}_{i} = (x_{i}, -n_{i}) = x_{i}(1, -1) \text{ as the vectour propre did}_{i} = -1$$

$$\overrightarrow{V}_{i} = (x_{i}, -n_{i}) = x_{i}(1, -1) \text{$$

troprietes fondamentales: Soit DEK, f:E > E 1) d'est une valeur propre du f (on de A) sh' det(A-dI)=0 2) pleux matrices semblables ont le niècul polynome curacteristiques (même valeurs propres et vecteurs propres) et de plus le degre de co polynôme egal la dimensión de Sous-espaces propres: soit d'elk une valour propre de f (m det). Le son-espace propre de faissoire à d'est le son-ensemble de E défini par! EA = { BEE/f(B)=AB=00}. 1) Soit NEIK et En = Ker(f-dI) = Ker(A-dI) est pous-espace vectouil de E > De plus soi à est une valour propre de f, clim Ex >1 2) Soit 2, 2, ..., Im des valeurs propres dif deux à deux distincte, vi, vi, , vin des vackurs propres conscie, et F= < Vn+Vi,..., Vm) Alor: a) f(F)CFb) dim E=m (et par conéquent } $\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_m}$ sed une partie libra).





Application " systems differentiels: Dons de nonsreux problème en mafliematique, en physique en mé canique en l'anoncie, il per particulionnent in pressant parfois necessaire de travailler sur une matrice diagonale, par ailleur le recteurs propres et le valeur propres correspondant à caraines di cette ut Catrius valours privilègies. Exemple: ferdution d'un styrleine différentil. 8nt 2: 12-12 et 7:12->12 (1->9(4) (+) x(+) deux frictions de rains les telles que : $\vec{v}=(n_1y)$, \vec{v} V= N = + y e , di en dy $\frac{\int dn}{dt} = 3 \cdot 2 / n$ $\frac{dy}{dt} = 2 / 3 \cdot 2$ カニハ ラグニ(1,-1) ラ東ニーゼン -> V2 = (1,2) -1 F2 = e1 + 2e2 A 2 = 4

$$\begin{pmatrix}
\chi_1 \\
\chi_1
\end{pmatrix} = A \begin{pmatrix}
\chi_2 \\
\chi_1
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
\chi_1 \\
\chi_1
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
\chi_1 \\
\chi_1
\end{pmatrix}$$