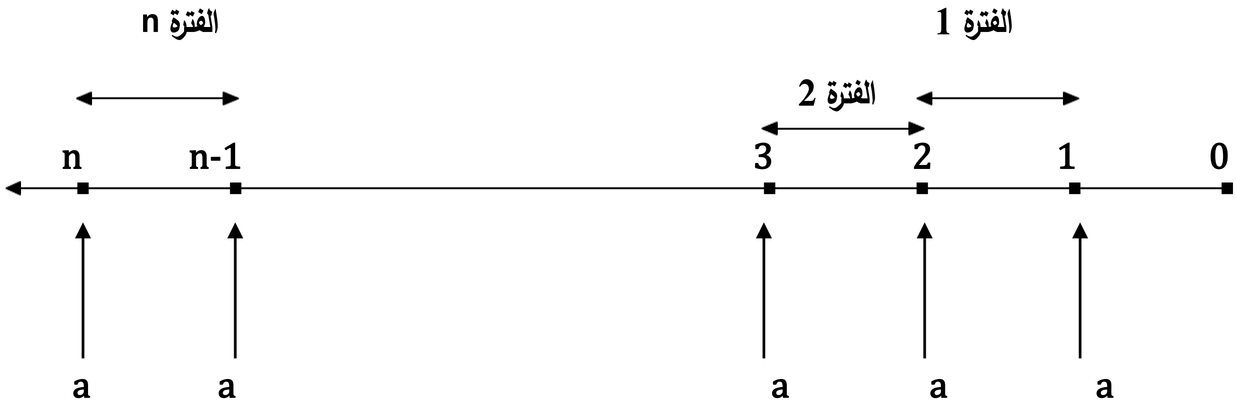
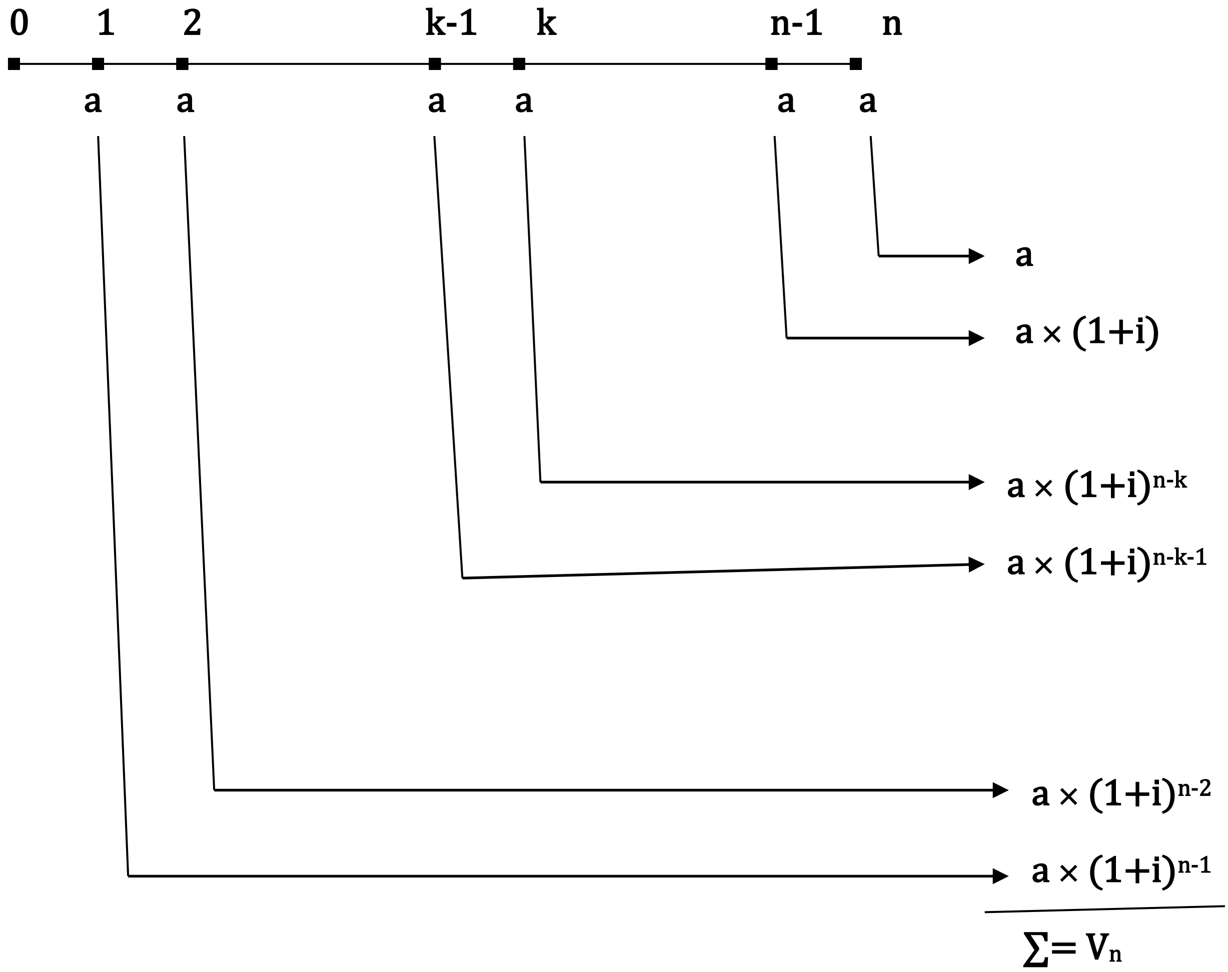
الفصل الخامس: الدفعات المتساوية

1- أنواع الدفعات المتساوية:

1-1 الدفعات العادية الثابتة (نهاية المدة): يتم بواسطتها تسديد دين، وتدفع في نهاية المدة، أو الفترات، وتسمى أيضا دفعات التسديد أو دفعات نهاية المدة.

- جملة الدفعات العادية: وهي ما تجمع للشخص المودع أو المسدد للمبالغ المالية في نهاية عدد من الفترات n، وبالتالي يكون قد قدم n دفعة متساوية. وهي مجموع جمل هذه الدفعات في نهاية المدة، أي عند آخر سنة n. علاقة جملة الدفعات العادية:





❖ حساب جملة الدفعات لنهاية المدة:

$V_n = a + a\times(1+i) + a\times(1+i)^2 + .. + a\times(1+i)^{n-k} + .. + a\times(1+i)^{n-2} + a\times(1+i)^{n-1}$

عناصر هذه الجملة تمثل متتالية هندسية متزايدة حدها الأول a وأساسها (1+i) وعددها n.

لدينا مجموع متتالية هندسية يساوي: $S = a \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$

$V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$

$$V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

مثال:

مؤسسة تودع في نهاية كل سنة مبلغ 40000 دج في بنك، لمدة 8 سنوات.

أحسب جملة ما تجمع لهذه المؤسسة في نهاية السنة الثامنة، إذا كان معدل الفائدة السنوي 6.8% .

$$V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 40000 \times \frac{(1+0.068)^8 - 1}{0.068} = 409656.73 \text{ DA}$$

❖ **حساب قيمة الدفعة a:**

$$V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$a = V_n \times \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

مثال: من أجل تسديد دين في نهاية 7 سنوات، بمبلغ 21955.24. أحسب قيمة الدفعة السنوية التي تسمح بذلك، والمودعة في نهاية كل سنة، بمعدل فائدة مركبة 9.5% .

$$a = V_n \times \frac{i}{(1+i)^n - 1} = 21955.24 \times \frac{0.095}{(1+0.095)^7 - 1} \Rightarrow a = 2350 \text{ DA}$$

❖ **حساب المدة أو عدد الدفعات n :**

$$V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\frac{V_n \times i}{a} = (1+i)^n - 1 \Rightarrow \frac{V_n \times i}{a} + 1 = (1+i)^n$$

$$\text{Ln}\left(\frac{V_n \times i}{a} + 1\right) = \text{Ln}\,(1+i)^n = n\,\text{Ln}\,(1+i) \Rightarrow n = \frac{\text{Ln}\left(\frac{V_n \times i}{a} + 1\right)}{\text{Ln}\,(1+i)}$$

❖ **القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة:**

$$V_0 = a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + a(1+i)^{-n}$$

$$V_0 = a(1+i)^{-n} \times (1+ a(1+i) + a(1+i)^2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + a(1+i)^{n-1}).$$

$$V_0 = a(1+i)^{-n} \times \frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$V_0 = a \times \frac{(1+i)^n-1}{i} \times (1+i)^{-n} \Rightarrow \quad V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

أو نحسب القيمة الحالية بالطريقة التالية:

$$V_0 = V_n (1 + i)^{-n} \Rightarrow V_0 = a \times \frac{(1+i)^n-1}{i} (1+i)^{-n} \Rightarrow \quad V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

مثال:

يقوم شخص بإيداع بصفة دورية مبلغ 52500 دج، في نهاية كل سنة.

ما هي القيمة الحالية لهذه الدفعات لمدة 5 سنوات وبمعدل فائدة مركبة سنوي 8%.

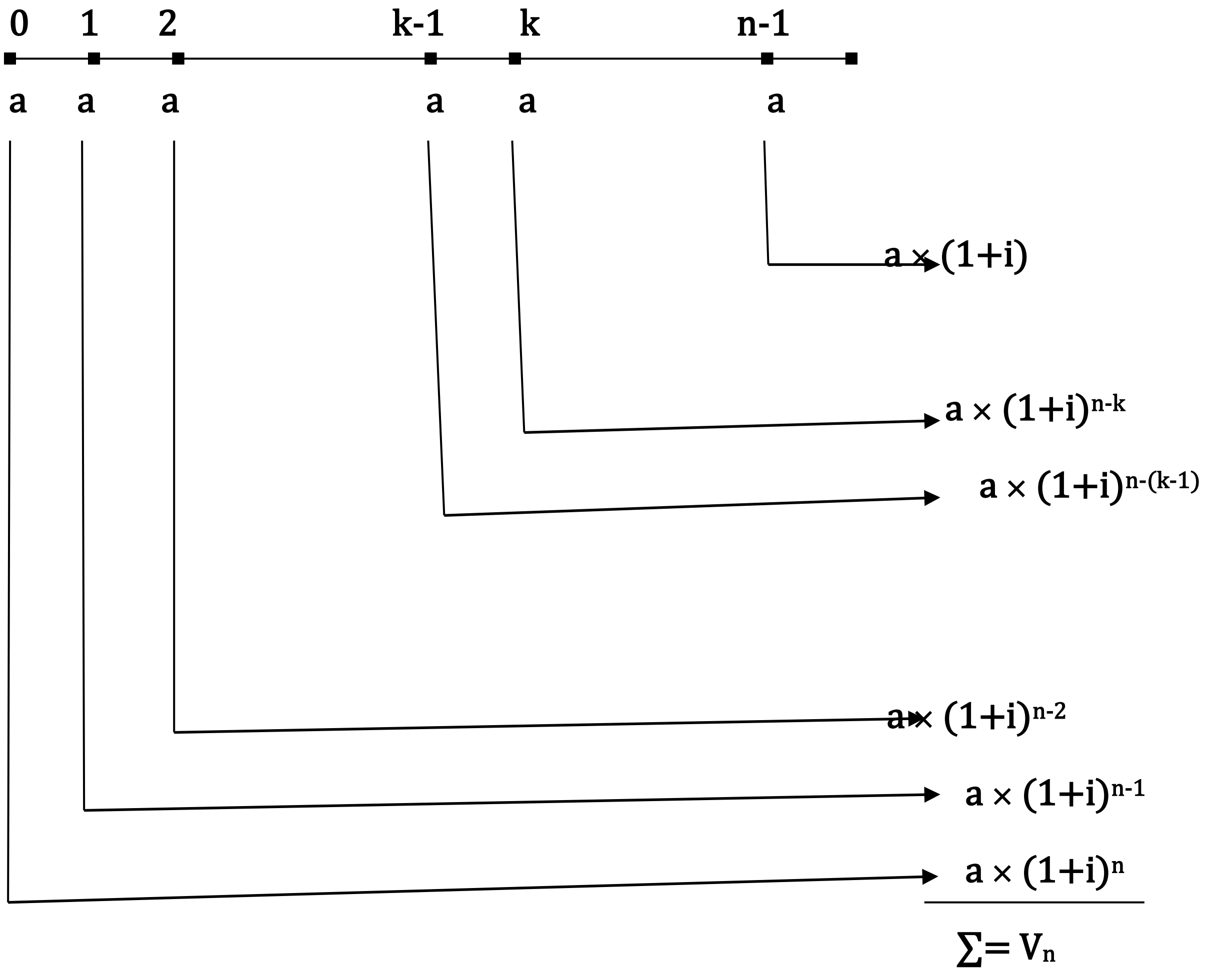
$a = 52500 \quad n = 5 \quad i = 8\%$

$$V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow V_0 = 52500 \times \frac{1-(1+0.08)^{-5}}{0.08} = 209617.3$$

2-1 دفعات الاستثمار(بداية المدة): وتهدف إلى تكوين رأس مال، وهي تقدم في بداية الفترات، وتسمى دفعات بداية المدة أو الفترة.

إذا افترضنا أن الدفعات هي ثابتة ومتساوية، وتساوي a، الدفعات تكون في بداية المدة، ونريد حساب الجملة في نهاية الفترة n.

القيمة المكتسبة أو الجملة هي مجموع الجمل، وهي تشكل متتالية هندسية عدد حدودها n، وحدها الأول $a(1+i)$، وأساسها $(1+i)$.



❖ **حساب جملة دفعات نهاية المدة:**

$$V_n = a\,(1+i) \times \frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1} \Rightarrow V_n = a\,(1+i) \times \frac{(1+i)^n-1}{i}$$

مثال:

مؤسسة تودع في بداية كل سنة مبلغ 60000 دج في بنك، لمدة 6 سنوات.

أحسب جملة ما تجمع لهذه المؤسسة، إذا كان معدل الفائدة المركبة السنوي 7%.

$$V_n = a\,(1+i) \times \frac{(1+i)^n-1}{i} \Rightarrow V_n = 60000\,(1+0.07) \times \frac{(1+0.07)^6-1}{0.07}$$

$V_n = 459241.26$ DA

❖ حساب قيمة الدفعة a :

$$V_n = a\,(1+i) \times \frac{(1+i)^n-1}{i} \Rightarrow a = V_n \times (1+i)^{-1} \times \frac{i}{(1+i)^n-1}$$

مثال: من أجل تكوين رأس مال 56665 دج، لمدة 15 سنة.

أحسب قيمة الدفعة السنوية التي تسمح بذلك، والمودعة في بداية كل سنة، بمعدل فائدة مركبة 5%.

$$a = V_n \times (1+i)^{-1} \times \frac{i}{(1+i)^n-1} \Rightarrow a = 56665 \times (1+0.05)^{-1} \times \frac{0.05}{(1+0.05)^{15}-1}$$

$a = 2500$ DA.

❖ القيمة الحالية لدفعات بداية المدة:

$$V_0 = V_n\,(1+i)^{-n} \Rightarrow V_0 = a\,(1+i) \times \frac{(1+i)^n-1}{i}\,(1+i)^{-n}$$

$$V_0 = a\,(1+i) \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

مثال:

يودع شخص في حسابه للتوفير كل بداية شهر مبلغ 24000 دج، وهذا لمدة 26 شهر، بمعدل فائدة شهري 0.7%.

$a = 24000$, $i = 0.7\ \%$, $n = 26$ شهر

$$V_0 = a\,(1+i) \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 24000\,(1+0.007) \times \frac{1-(1+0.007)^{-26}}{0.007}$$

$V_0 = 572677.86$ DA

تمارين الفصل الخامس

التمرين الأول:

مؤسسة تنتج آلات وتبيعها بطرق ثلاثة.

1-الدفع نقدً

2-بالتقسيط لمدة 7 سنوات بمعدل فائدة مركبة 10 % سنويا.

3-بدفع ½ القيمة الحالية والباقي بعد نهاية 4 سنوات بفائدة مركبة 10 % سنويا.

مع العلم أن المؤسسة تستثمر أموالها في بنك بعد تسلمها للمبالغ في كل الحالات بمعدل 11 %سنويا، وسعر البيع الحالي للآلة يقدر بـ 100000 دج. حدد الحالة الأكثر إستفادة للمؤسسة.

الحل:

في الحالة الأولى:

$V_0 = 100000$ DA

$V_n = V_0 (1 + i)^n$

$V_7 = 100000 (1 + 0.11)^7 = 207616$ DA.

في الحالة الثانية: يتم الدفع بالتقسيط لمدة 7 سنوات، أي بدفعات ثابتة بقيمة a

$$V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow a = V_0 \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \Rightarrow a = 100000 \times \frac{0.1}{1-(1.1)^{-7}}$$

$a = 20540.5$

$$V_n = a \times \frac{(1+i)^n-1}{i} \Rightarrow V_n = 20540.5 \times \frac{(1+0.11)^7-1}{0.11} \Rightarrow V_n \simeq 200953.34 \text{ DA.}$$

في الحالة الثالثة:

$V_7 = 50000 (1 + 0.11)^7 + 50000 (1 + 0.1)^4 (1 + 0.11)^3$

$V_7 \simeq 203925.42$ DA.

وعند مقارنة الحالات الثلاث من خلال نتائج الجملة، نلاحظ أن الطريقة الأولى أحسن فائدة لأنها تعطي للمؤسسة إمكانية استثمار أموالها منذ البداية، بينما الطرق الأخرى تختلف من حيث عدم استعمال كل المبلغ بالمعدل 11% منذ التاريخ نفسه.

التمرين الثاني:

شخص يودع في بداية كل سنة مبلغا معينا لمدة 12 سنة، فبلغت جملته 235227.124 دج بمعدل فائدة سنوي 10%.

1- أحسب قيمة الدفعة الثابتة.

2- أحسب القيمة الحالية لهذه الدفعات

الحل:

$$V_n = a\,(1+i) \times \frac{(1+i)^n-1}{i} \Rightarrow a = V_n \times (1+i)^{-1} \times \frac{i}{(1+i)^n-1}$$

$$a = 235227.124 \times (1+0.1)^{-1} \times \frac{0.1}{(1+0.1)^{12}-1} \Rightarrow a \simeq 10000 \text{ DA.}$$

$$V_0 = a\,(1+i) \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$V_0 = 10000\,(1+0.1) \times \frac{1-(1+0.1)^{-12}}{0.1} \Rightarrow V_0 \simeq 74950.62$$

التمرين الثالث:

من أجل تكوين رأس مال مؤسسة تودع دفعات متساوية قيمة كل منها 80000 دج بحيث بلغت عدد منها إذا اعتبرناها دفعات بداية المدة 786451.1396 دج ، وإذا اعتبرناها دفعات نهاية المدة كانت جملتها لنفس العدد 724839.76 دج.

1- أحسب معدل الفائدة المطبق على الدفعات.

2- أحسب عدد الدفعات المحققة لهذه الجملة.

3- أحسب جملة رأس المال المكون بعد 10 دفعات.

4- أحسب مجموع الفوائد التي يحققها المودع في هذه العملية عند 10 دفعات.

الحل:

1- حساب معدل الفائدة:

$a = 80000$

$V_{n1} = 786451.1396$ جملة بداية المدة

$V_{n2} = 724839.76$ جملة نهاية المدة

$V_{n1} = V_{n2}\,(1+i)$

$$\frac{V_{n1}}{V_{n2}} = (1+i) = \frac{786451.1396}{724839.76} = 1.085 \Rightarrow i = 0.085 \Rightarrow i = 8.5\%$$

2- حساب عدد الدفعات:

$$V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$V_n \times i = a \times (1+i)^n - a \quad \Rightarrow V_n \times i + a = a \times (1+i)^n$$

$$\frac{V_n \times i + a}{a} = (1+i)^n$$

$$\mathrm{Ln}\frac{V_n \times i + a}{a} = \mathrm{Ln}(1+i)^n = n\,\mathrm{Ln}(1+i) \Rightarrow n = \frac{\mathrm{Ln}\,(V_n \times i + a) - \mathrm{Ln}\,a}{\mathrm{Ln}\,(1+i)}$$

$$n = \frac{\mathrm{Ln}\,(724839.76 \times 0.085 + 80000) - \mathrm{Ln}\,80000}{\mathrm{Ln}\,(1+0.085)}$$

$$n = \frac{0.57}{0.0815} \Rightarrow n \simeq 7$$ دفعات

3- حساب الجملة:

$$V_{10} = a \times \frac{(1+i)^{10} - 1}{i} = 80000 \times \frac{(1+0.085)^{10} - 1}{0.085}$$

$V_{10} \simeq 1186807.92$ DA.

4–حساب مجموع الفوائد:

$I = V_{10} - V_0$

$V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-10}}{i} = 80000 \times \frac{1-(1+0.085)^{-10}}{0.085} \Rightarrow V_0 = 524907.84$

$I = 1186807.92 - 524907.84 \Rightarrow$ I= 66190 DA.