الفصل الرابع: تكافئ الأوراق التجارية

1- تكافئ ورقتين تجاريتين: تكون ورقتين تجاريتين متكافئتين، إذا خصمت بتاريخ ما بنفس المعدل، وأنتجت نفس القيمة الحالية التجارية أو الحقيقية.

بافتراض أن القيمة الحالية التجارية للورقة التجارية الأولى: V_{ac1}

وأن القيمة الحالية التجارية للورقة التجارية الثانية: V_{ac2}

وللحصول على القيم الاسمية للورقتين، فيجب أن تحقق المعادلة : $V_{ac1} = V_{ac2}$

$$V_{ac1} = V_{n1} \times \frac{D - n1}{D} \qquad V_{ac2} = V_{n2} \times \frac{D - n2}{D}$$

$$V_{n1} \times \frac{D - n1}{D} = V_{n2} \times \frac{D - n2}{D}$$

$$V_{n1} \times (D - n_1) = V_{n2} \times (D - n_2) \quad \Rightarrow \quad V_{n1} = V_{n2} \times \frac{D - n2}{D - n1}$$

أو

$$V_{n2} = V_{n1} \times \frac{D - n1}{D - n2}$$

أما بالخصم الحقيقي فلدينا: $V_{a1} = V_{a2}$

$$V_{a1} = V_n \times \frac{D}{D + n1} \qquad V_{a2} = V_n \times \frac{D}{D + n2}$$

$$V_{n1} \times \frac{D}{D + n1} = V_{n2} \times \frac{D}{D + n2}$$

$$\frac{Vn1}{D + n1} = \frac{Vn2}{D + n2} \quad \Rightarrow \quad V_{n1} = V_{n2} \times \frac{D + n1}{D + n2}$$

$$V_{n2} = V_{n1} \times \frac{D + n2}{D + n1}$$

2- تكافئ عدة أوراق تجارية:

بنفس المبدأ في حالة تكافئ ورقتين، نغير عدد الأوراق، وبالتالي تكون القيمة الحالية للورقة المكافئة تساوي مجموع القيم الحالية للأوراق الأخرى.

$$V_{ac} = V_{ac1} + V_{ac2} + V_{ac3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + V_{acn}$$

$$V_{ac} = V_n \times \frac{D - n}{D}$$

$$V_n \times \frac{D - n}{D} = V_{n1} \times \frac{D - n1}{D} + V_{n2} \times \frac{D - n2}{D} + .. + V_{nn} \times \frac{D - nn}{D}$$

$$V_n \times (D - n) = V_{n1} \times (D - n_1) + V_{n2} \times (D - n_2) + \ldots\ldots\ldots + V_{nn} \times (D - n_n)$$

$$V_n = \frac{Vn1 \times (D - n1) + Vn2 \times (D - n2) + \cdots\ldots\ldots + Vnn \times (D - nn)}{D - n}$$

مثال:

مؤسسة مدينة لمورد بورقة تجارية قيمتها الاسمية 24710 دج ، تاريخ استحقاقها يوم 31 مارس، طلبت من هذا المورد بتاريخ 11 مارس تأخير تاريخ استحقاق الورقة التجارية إلى 20 ماي من نفس السنة. فإذا علمت أن معدل الخصم 10%.

أحسب القيمة الاسمية للورقة التجارية الجديدة.

نفترض أن القيمة الاسمية للورقة القديمة: V_{n1} ، والجديدة: V_{n2}

مدة الخصم للورقة الأولى: n_1 مدة الخصم للورقة الثانية: n_2

$n_1 = 31\text{-}11 = 20$ $n_2 = (31\text{-}11)+30+20 = 70$

$$D = \frac{36000}{10} \qquad D = 3600$$

$$V_{n2} = V_{n1} \times \frac{D - n1}{D - n2} \Rightarrow V_{n2} = 24710 \times \frac{3600 - 20}{3600 - 70}$$

$$V_{n2} = 25060$$

مثال:

شخص مدين بالمبالغ التالية:

4000 دج يستحق دفعها بعد 4 أشهر

8000 دج يستحق دفعها بعد 8 أشهر

5000 دج يستحق دفعها بعد 9 أشهر

فإذا طلب المدين استبدال هذه الديون الثلاثة، بدينين متساويين لهما نفس القيمة الاسمية، حيث أن الدين الأول يستحق بعد 6 أشهر، والدين الثاني بعد 12 شهرا.

ما هي قيمة كل من الدينين الجديدين، علما بأن معدل الخصم 9%.

نفترض أن القيمة الاسمية لكل من الدينين الجديدين تساوي: X

$$V_{ac} = V_{ac1} + V_{ac2} + V_{ac3}$$

$$V_{ac} = V_{n1} - V_{n1} \times \frac{n1 \times i}{12} + V_{n2} - V_{n2} \times \frac{n2 \times i}{12} + V_{n3} - V_{n3} \times \frac{n3 \times i}{12}$$

$$V_{ac} = V_{n1} \times (1 - \frac{n1 \times i}{12}) + V_{n2} \times (1 - \frac{n2 \times i}{12}) + V_{n3} \times (1 - \frac{n3 \times i}{12})$$

$$V_{ac} = 4000 \times (1 - \frac{4 \times 0.09}{12}) + 8000 \times (1 - \frac{8 \times 0.09}{12}) + 5000 \times (1 - \frac{12 \times 0.09}{12})$$

$$V_{ac} = 16063.7 \text{ DA}$$

$$V_{ac} = X \times (1 - \frac{6 \times 0.09}{12}) + X \times (1 - \frac{12 \times 0.09}{12}) = 1.865$$

$$1.865\ X = 16063.7 \Rightarrow X = \frac{16063.7}{1.865} \Rightarrow X = 8613.24$$

3- تاريخ الاستحقاق المتوسط:

لإيجاد تاريخ الاستحقاق المتوسط، لعدد من الأوراق التجارية، نقوم بتطبيق علاقة تكافئ بين القيمة الحالية بمجموع القيم الاسمية ذات تاريخ متوسط محدد، والقيمة الحالية لمجموع الأوراق المعنية كل بمدة استحقاقها.

لدينا:

$$V_{ac} = V_{ac1} + V_{ac2} + V_{ac3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + V_{acn}$$

$$V_{ac} = V_n \times \frac{D - n}{D}$$

$$V_n - (V_n \times \frac{n}{D}) = V_{n1} - (V_{n1} \times \frac{n1}{D}) + V_{n2} - (V_{n2} \times \frac{n2}{D}) + \ldots + V_{nn} - (V_{nn} \times \frac{nn}{D})$$

$$V_n = V_{n1} + V_{n2} + V_{n3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + V_{nn}$$

$$(V_n \times \frac{n}{D}) = (V_{n1} \times \frac{n1}{D}) + (V_{n2} \times \frac{n2}{D}) + \ldots + (V_{nn} \times \frac{nn}{D})$$

$$V_n \times n = V_{n1} \times n1 + V_{n2} \times n_2 + \ldots\ldots\ldots + V_{nn} \times n_n$$

$$n = \frac{(Vn1 \times n1 + Vn2 \times n2 + \ldots\ldots\ldots + Vnn \times nn)}{Vn}$$

ملاحظة:

إن علاقة حساب تاريخ الاستحقاق المتوسط غير مرتبطة بمعدل الخصم t.

مثال: تاجر مدين بثلاث أوراق تجارية:

- **الورقة الأولى: 55000 دج تاريخ استحقاقها 23 جوان**
- **الورقة الثانية: 35000 دج تاريخ استحقاقها 19 جويلية**
- **الورقة الثالثة: 28000 دج تاريخ استحقاقها 18آوت**

تقدم هذا التاجر إلى دائنه بتاريخ 16 ماي لاستبدال الأوراق الثلاثة، بورقة واحدة لمجموع القيم الاسمية.

تحديد تاريخ استحقاق هذه الورقة.

حساب مدة استحقاق الأوراق الثلاثة:

$n_1 = (31-16)+23 = 38$ **يوم**

$n_2 = 15+30+19 = 64$ **يوم**

$n_3 = 15+30+31+18 = 94$ **يوم**

$$n=\frac{(55000 \times 38)+(35000 \times 64)+(28000 \times 94)}{118000}$$

$n = 59$ **يوم**

فيكون تاريخ الاستحقاق المتوسط، 59 يوما بعد تاريخ 16 ماي، أي يوم 14 جويلية.

4- تكافئ الأوراق التجارية بالفائدة المركبة:

يحصل التكافؤ بين ورقتين تجاريتين أو عدة أوراق تجارية، عندما تتساوى القيم الحالية للطرفين، في تاريخ محدد هو تاريخ التكافؤ.

فإذا كانت لدينا قيمتين اسميتين لورقتين تجاريتين، هما على التوالي: V_1 و V_2 تسددان بعد فترة زمنية n_1 و n_2 ، على التوالي.

لتحقيق التكافؤ في حالة ورقتين تجاريتين يجب:

$$V_{n1}(1+i)^{-n_1} = V_{n2}(1+i)^{-n_2}$$

وأما في حالة عدة أوراق، يجب تحقق المعادلة التالية:

$$V_{n1}(1+i)^{-n_1} = V_{n2}(1+i)^{-n_2} + V_{n3}(1+i)^{-n_3} + \ldots\ldots\ldots + V_{nn}(1+i)^{-n_n}$$

مثال:

شخص مدان لمؤسسة بمبلغ 700.000 دج، يسدده بعد 6 سنوات، اتفق معه بطلب التسديد بعد مرور سنة كاملة، أن يقلص مدة الدين إلى 4 سنوات عوض 6 سنوات.

أحسب القيمة الاسمية للدين إذا كان معدل الفائدة المركبة 8% سنويا.

$$V_{n1}(1+i)^{-n_1} = V_{n2}(1+i)^{-n_2}$$

$$700.000(1+0.08)^{--5} = V_{n2}(1+0.08)^{-3}$$

$$V_{n2} = \frac{700.000}{1.08^5} \times 1.08^3 \Rightarrow V_{n2} = 600137.17$$

تمارين الفصل الرابع

التمرين الأول:

شخص مدين بالمبالغ التالية:

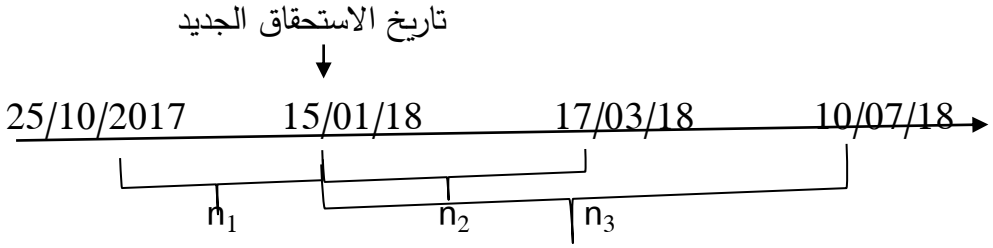
54000دج يستحق دفعها في 25 أكتوبر 2017.

72000دج يستحق دفعها في 17مارس 2018.

82800دج يستحق دفعها في 10 جويلية 2018.

وأراد المدين أن يستبدل هذه الديون الثلاثة بدين واحد يستحق الدفع في 15 جانفي 2018.

إيجاد قيمة الدين الجديد، مع العلم أن معدل الفائدة 5%.



n_1=(31−25)+30+31+15= 82 يوم تأخير في الدفع لمدة

n_2= (31−15)+28+17= 61يوم تقديم في الدفع لمدة

n_2= (31−15)+28+31+30+31+30+10= 176يوم تقديم في الدفع لمدة

$$V_{ac} = V_{n1} + V_{n1} \times \frac{n1 \times i}{360} + V_{n2} - V_{n2} \times \frac{n2 \times i}{360} + V_{n3} - V_{n3} \times \frac{n3 \times i}{360}$$

$$V_{ac} = (54000 + 54000 \times \frac{82 \times 0.05}{360}) + (72000 - 72000 \times \frac{61 \times 0.05}{360}) + (82800 - 82800 \times \frac{176 \times 0.05}{360})$$

$$V_{ac} = 54615 + 71390 + 80776$$

$$V_{ac} = 206781 \text{ DA.}$$

التمرين الثاني:

شخص مدين بالمبالغ التالية:

60000 دج يستحق دفعها بعد 6 أشهر.

90000 دج يستحق دفعها بعد 8 أشهر.

40000 دج يستحق دفعها بعد 9 شهر.

فإذا طلب من المدين استبدال هذه الديون الثلاثة بثلاث ديون أخرى لها نفس القيمة الاسمية، بحيث الدين الأول يستحق الدفع بعد 8 أشهر، والدين الثاني بعد 9 أشهر، والدين الثالث بعد 12 شهر.

أحسب قيم الديون الجديدة، علما بأن معدل الفائدة المستعمل 9%.

الحل:

القيم الحالية للديون القديمة = القيم الحالية للديون الجديدة

القيم الحالية للديون القديمة: V_{ac1}

$$V_{ac1} = \left(V_{n1} - V_{n1} \times \frac{n1 \times i}{12} \right) + \left(V_{n2} - V_{n2} \times \frac{n2 \times i}{12} \right) + \left(V_{n3} - V_{n3} \times \frac{n3 \times i}{12} \right)$$

$$V_{ac1} = \left(60000 - 60000 \times \frac{6 \times 0.09}{12}\right) + \left(90000 - 90000 \times \frac{8 \times 0.09}{12}\right) + \left(40000 - 40000 \times \frac{9 \times 0.09}{12}\right)$$

$$V_{ac1} = 57300 + 84600 + 37300 = 179200 \text{ DA}$$

القيم الحالية للديون الجديدة: V_{ac2}

$$V_{ac2} = \left(X - X \times \frac{n1 \times i}{12} \right) + \left(X - X \times \frac{n2 \times i}{12} \right) + \left(X - X \times \frac{n3 \times i}{12} \right)$$

$$V_{ac2} = \left(X - X \times \frac{8 \times 0.09}{12}\right) + \left(X - X \times \frac{9 \times 0.09}{12}\right) + \left(X - X \times \frac{12 \times 0.09}{12}\right)$$

$$V_{ac2} = (X - X \times 0.06) + (X - X \times 0.0675) + (X - X \times 0.09)$$

$$V_{ac2} = 3X - 0.2175X = 2.7825X$$

$$V_{ac1} = V_{ac2} \Rightarrow 179200 = 2.7825\,X \Rightarrow X = \frac{179200}{2.7825} \Rightarrow X = 64402.5157$$

التمرين الثالث:

بتاريخ 05 أوت، طلب تاجر من مورده استبدال 3 أوراق تجارية لها نفس القيمة الاسمية 158400دج، تاريخ استحقاقها 14 سبتمبر، 09 نوفمبر، و06 ديسمبر من نفس السنة على التوالي، بورقة تجارية وحيدة قيمتها الاسمية 475200دج، وبمعدل خصم 8%.

إيجاد تاريخ الاستحقاق الجديد؟

الحل:

$$\mathbf{n} = \frac{(\boldsymbol{V_{n1} \times n1 + V_{n2} \times n2 + V_{n3} \times n3})}{\boldsymbol{Vn}}$$

$$\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{158400 \times 40 + 158400 \times 65 + 158400 \times 93})}{\mathbf{475200}}$$

n =66يوم

تاريخ الاستحقاق الجديد يأتي بعد 66 يوم من تاريخ 05 أوت أي هو 10 نوفمبر من نفس السنة.

التمرين الرابع:

شخص مدان لمؤسسة بمبلغ 600.000 دج، يسدده بعد 7 سنوات، اتفق مع المؤسسة على أن يقلص مدة الدين إلى 5 سنوات عوض 7 سنوات.

أحسب القيمة الاسمية للدين إذا كان معدل الفائدة المركبة 6% سنويا.

الحل:

$$V_{n1}(1+i)^{-n_1} = V_{n2}(1+i)^{-n_2}$$

$$600.000(1+0.06)^{--7} = V_{n2}(1+0.06)^{-5}$$

$$V_{n2} = \frac{600.000}{1.06^{-5}} \times 1.06^{-7} \Rightarrow V_{n2} = \frac{600.000}{1.06^{7}} \times 1.06^{5}$$

$$V_{n2} = \frac{600.000}{1.06^{2}} \Rightarrow V_{n2} = \frac{600.000}{1.1236} \Rightarrow V_{n2} = 533997.864 \text{ DA}$$

التمرين الخامس:

ثلاث مبالغ 80000 دج ، 150000 دج و 100000 دج مستحقة الدفع بعد 10، 15 و05 سنة على التوالي. معدل فائدة مركبة 6 %.

أحسب مدة التكافؤ المتوسط.

الحل:

$V_n\,(1+i)^{-n} = V_{n1}(1+i)^{-n_1} + V_{n2}(1+i)^{-n_2} + V_{n3}(1+i)^{-n_3}$

$330000\,(1+0.06)^{-n} = 80000(1+0.06)^{-10} + 150000(1+0.06)^{-15} + 100000(1+i)^{-5}$

$330000\,(1+0.06)^{-n} = 181987.158 \;\Rightarrow\; \frac{330000}{1.06^n} = 181987.158$

$1.06^n = \frac{330000}{181987.158} \;\Rightarrow 1.06^n \simeq 1.8133 \;\Rightarrow \mathrm{Ln}1.06^n = \mathrm{Ln}1.8133$

$n\mathrm{Ln}1.06 = \mathrm{Ln}1.8133 \Rightarrow n = \frac{Ln\ 1.8133}{\mathrm{Ln}\ 1.06} \Rightarrow n \simeq 10.22$ سنوات