

UNIVERSITE ZIANE ACHOUR - DJELFA

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Physique

Support du Cours (Partie N°01)

Méthodes Mathématiques pour la physique II

Pour Master-1- Physique de la Matière Condensée

Continu de ce cours :

- 1) Rappels sur lois internes,
- 2) Structures algébriques,
- 3) Espaces Vectoriels,
- 4) Rappels sur les applications,
- 5) Applications linéaires,
- 6) Matrices,
- 7) Matrice d'une application linéaire,
- 8) Déterminants, Matrices inverses, Résolution des systèmes linéaires par différentes méthodes,
- 9) Diagonalisation des matrices, diagonalisation des matrices carrée, Applications.

Cours de Mr Yazid DEROUICHE, Enseignant Chercheur au
sein du Département de Physique

1. Structure d'espace vectoriel.
2. Sous espace vectoriels.
3. Sous espace vectoriel engendré par une partie.
4. Sommes de sous espaces vectoriels de E .
5. Sous espaces vectoriels supplémentaires.
6. Espace vectoriel quotient.
7. Espace vectoriel produit.
8. Indépendance linéaire. Partie libre. Partie liée.
9. Bases et dimension d'un espace vectoriel.
10. Sous espace vectoriels et bases.
11. Sommes directes et bases.

Révisions:

Relations : interne (أبواب, ألبواب).

→ La ~~relation~~ relation interne dans l'ensemble K est une application pour l'ensemble $K \times K$ dans K .

→ Soit $*$ et Δ deux lois internes dans K .

• $*$ est commutative si seulement si :

$$\forall (x, y) \in K^2 \quad x * y = y * x$$

• $*$ est associative si seulement si :

$$\forall (x, y, z) \in K^3$$

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

• $*$ est distributive par rapport à Δ si seulement si

$$x * (y \Delta z) = (x * y) \Delta (x * z)$$

$$(y \Delta z) * x = (y * x) \Delta (z * x)$$

• a élément neutre de \mathbb{K}^V si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{K}$$

$$x \# a = a \# x = x$$

• x' élément de \mathbb{K} élément symétrique pour $\#$ si et seulement si :

$$x \# x' = x' \# x = a$$

Structure algébrique :

• $(\mathbb{K}, \#)$ est un groupe si et seulement si :

1) $\#$ ~~commutative~~ associative.

2) existence de l'élément neutre de \mathbb{K} pour $\#$

3) à chaque $x \in \mathbb{K}$ existe pour élément symétrique $x' \in \mathbb{K}$.

→ En plus si $\#$ est commutative on dit que $(\mathbb{K}, \#)$ est groupe commutative.

• $(\mathbb{K}, \#, \Delta)$ est anneau

1) $(\mathbb{K}, \#)$ groupe commutatif

2) Δ associative

3) Δ distributive par rapport à $\#$

→ si en plus Δ commutative : on dit que $(\mathbb{K}, \#, \Delta)$ est un anneau commutatif.

→ si Δ admet un élément neutre de \mathbb{K} on dit que $(\mathbb{K}, \#, \Delta)$ est un anneau unitaire.

• $(\mathbb{K}, \#, \Delta)$ corps.

1) $(\mathbb{K}, \#, \Delta)$ division unitaire

2) $\mathbb{K} - \{a\} \neq \emptyset$ et chaque élément ~~admet~~ existe son inverse symétrique par rapport Δ (a élément neutre de $\#$)

si en plus Δ est commutative :

$(\mathbb{K}, \#, \Delta)$ est un corps commutatif.

Exo:

① $\#$ relation interne dans $\mathbb{R} - \{3\}$.

$$x \# y = xy - 2(x+y) + 6.$$

1) Montrer que $(\mathbb{R} - \{3\}, \#)$ groupe commutatif ?

2) Montrer $\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x : x \# \alpha = \alpha$.

② $\#, \Delta$ relations internes de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

$$(x, y) \# (x', y') = (xy' + x'y, yy')$$

$$(x, y) \Delta (x', y') = (xx', yy')$$

Montrer $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \#, \Delta)$ corps commutatif.

\neq, Δ deux relations internes de \mathbb{N}^2

$$(\alpha, \beta) \neq (\alpha', \beta') = (\alpha + \alpha', \beta + \beta')$$

$$(\alpha, \beta) \Delta (\alpha', \beta') = (\alpha\alpha' + \beta\beta', \alpha\beta' + \beta\alpha')$$

Montrer que $(\mathbb{N}^2, \neq, \Delta)$ est anneau commutatif et unitaire

Espace vectoriel

Definition: Soit A et B des ensembles. on appelle loi externe sur B une application

$$\vartheta: A \times B \rightarrow B$$

$$(\alpha, x) \mapsto \vartheta(\alpha, x) = \alpha \cdot x$$

Definition: Soit $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un corps, soit $(E, +)$ un groupe abélien. Soit aussi $\vartheta: \mathbb{K} \times E \rightarrow E$ une loi externe sur E . Le triplet $(E, +, \cdot)$ a une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{K} (ou de \mathbb{K} -espace vectoriel) si :

1. 1 désignant l'unité de la seconde loi de \mathbb{K} et $\forall x \in E: 1 \cdot x = x$
 2. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E: (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
 3. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in E: (\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$
- \mathbb{K} est appelé corps de base de l'espace vectoriel E

Remarque: par abus d'écriture, on notera E le \mathbb{K} -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$

Definition: Soit K un corps, un élément d'un K -espace vectoriel est appelé un vecteur.

Proposition: Soit K un corps, E est un K -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$. On note 0 le neutre de la loi $+$ sur K , 0 aussi le neutre de la loi $+$ sur E et 1 le neutre de la loi sur K , soient $v \in E$ et $\alpha \in K$, on a les propriétés suivantes:

1. $0 \cdot v = 0$

2. $-1 \cdot v = -v$

3. Si $\alpha \cdot v = 0$ et que $\alpha \neq 0$ alors $v = 0$

Démonstration:

1. On a: $v + 0 \cdot v = (1 + 0) \cdot v = v$. En soustrayant v des deux côtés de cette égalité, on obtient $0 \cdot v = 0$.

2. ~~$0 \cdot v = 0$~~ $0 = 0 \cdot v = (1 - 1) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = v + (-1) \cdot v$
 $-1 \cdot v$ est donc l'opposé de v et alors égal à $-v$.

3. Si $\alpha \cdot v = 0$ et que $\alpha \neq 0$ alors α^{-1} existe dans K .

On peut multiplier les deux membres de notre égalité de départ par α^{-1} , cela donne

$$v = \alpha^{-1} \cdot 0 = 0$$

Definition: Soit K un corps et E un K -espace vectoriel.
Soit V un sous ensemble de E . V est un sous espace vectoriel de E si :

- $(V, +)$ est sous groupe de $(E, +)$
- Si $\alpha \in K$ et si $x \in V$ alors $\alpha x \in V$

Rappel: def d'un sous groupe:

Une partie d'un groupe qui elle-même est un groupe relativement à la même loi s'appelle sous groupe.

~~est~~ $(E, +)$ est groupe

ou: $(V, +)$ est un sous groupe de $(E, +)$ si

il suffit seulement si:

il suffit $\forall x, y \in V: x + (-y) \in V$

Proposition: Soit K un corps, un sous espace vectoriel d'un K -espace vectoriel est K -espace vectoriel

Démonstration: Il suffit de vérifier les axiomes définissant des K -espaces vectoriels.

Proposition: Soient K un corps, E un K -espace vectoriel et V un sous ensemble de E .

V est un sous espace vectoriel de E si et seulement si \Leftrightarrow
si: $\forall \alpha, \beta \in K; \forall x, y \in V; \alpha x + \beta y \in V$

Familles libres, Familles génératrices:

Definition: soit I un ensemble et soit $A = \{A_i, i \in I\}$

($A = \{d_1, d_2, \dots, d_i\}$) une partie indexée par I .

On dit que A est support fini si l'ensemble des éléments i de I tels que d_i est non nul est de cardinal fini

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in I, d_i \neq 0 \\ \text{card}(I) = \beta \in \mathbb{N} \text{ fini} \end{cases}$$

Definition: soit E un K -espace vectoriel. Soit A une partie de E . On suppose que $A = \{x_i; i \in I\}$ où I est un ensemble permettant d'indexer A . On appelle combinaison linéaire des éléments de A tout élément de E donné par
$$x = \sum_{i \in I} d_i x_i = d_1 x_1 + d_2 x_2 + \dots + d_n x_n$$

où $\{d_i; i \in I\}$ est une famille à support fini de scalaires de K .

Remarque: Comme la famille de d_i est à support fini, il n'y a pas de problème de convergence de la somme précédente.

Definition - Proposition, ^{Théorème 1} soit E un K -espace vectoriel. Soit A un sous ensemble de E . L'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A est un sous ensemble espace vectoriel de E appelé sous espace vectoriel de E engendré par A .

On notera $\text{Vect}(A)$ le sous espace vectoriel engendré par A .

De plus, si $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ (~~ensemble fini~~), on notera

$$\text{Vect}(A) = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$$

$\text{Vect}\langle A \rangle$: plus petit espace qui contient A .

Théorème 1: Soit A une partie d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E .
Le plus petit espace vectoriel engendré par A est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient A .

Démonstration (Théorème 1):

Soit x et $y \in E$ qui s'écrivent comme une combinaison linéaire d'éléments de A . Il existe donc des scalaires λ_i et α_i de \mathbb{K} pour tout $i \in I$, tels que :

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i$$

Soit λ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Le vecteur $\lambda x + \alpha y$ s'écrit :

$$\lambda x + \alpha y = \sum_{i \in I} (\lambda \lambda_i x_i + \alpha \alpha_i y_i)$$

qui est encore une combinaison linéaire d'éléments de A . $\lambda x + \alpha y$ est donc élément du plus petit espace vectoriel engendré par A et cela permet de conclure.

Démonstration 2 (Théorème 2): Tout sous-espace contenant A contient toute combinaison linéaire de vecteurs de A .

Donc le plus petit espace vectoriel engendré par A est inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant A .

Définition: Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit aussi V un sous-espace vectoriel de E (qui peut éventuellement être égal à E). Soient A une famille de vecteurs de V . Cette famille est une partie génératrice de V ou génératrice dans V si l'espace engendré par A est égal à V , ou autrement dit si $\text{Vect}(A) = V$. On dit encore que A engendre V .

$$V = \langle A \rangle = \text{Vect}(A)$$

Definition: Soit A une partie de E un espace vectoriel sur K .
Indexons les éléments de A par l'ensemble I . A est appelée
~~libre~~ partie libre de E ou famille indépendante de
vecteurs de E si pour tout ensemble fini $\{i, i \in I\}$
de K , l'égalité $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0 \rightarrow \lambda_i = 0 \forall i \neq 0$

• Dans le cas contraire la partie A est dite :
partie liée ou famille dépendante de vecteurs de
 E .

Proposition: si E est un espace vectoriel et que A
est une partie liée de vecteurs de E alors l'un des
vecteurs de cette partie s'écrit comme combinaison
linéaire de autres vecteurs de A .

Démonstration: Pour $A = \{x_i, i \in I\}$. La ~~partie~~ ^{sous} partie A
est liée dans E , on peut trouver un ensemble de
scalaires $\{\lambda_i, i \in I\}$ de K non tous nuls, tels que
$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$$

Soit $m \in I$ tq $\lambda_m \neq 0$. L'égalité précédente peut
se ré-écrire :

$$\lambda_m x_m = - \sum_{i \in I, i \neq m} \lambda_i x_i$$

Soit en multipliant à droite et à gauche par λ_m^{-1} :

$$x_m = - \sum_{i \in I, i \neq m} \lambda_m^{-1} \lambda_i x_i$$

On a ainsi bien écrit un des vecteurs de A comme combinaison
linéaire de autres vecteurs de A .

Base d'un espace vectoriel.

Def: Soit E un K -espace vectoriel. Soit I un ensemble et soit $A = \{x_i; i \in I\}$ une famille d'éléments de E . Cette famille est une base de E si elle est à la fois libre dans E et génératrice de E tout entier. On notera généralement les bases sous forme d'une suite de vecteurs $\{x_i\}_{i \in I}$.

Def: Soit E un K -espace vectoriel. Soit I un ensemble, une famille $\{x_i; i \in I\}$ est dite

- libre maximale dans E si elle est libre dans E et que pour tout vecteur y de E différent de $x_i; i \in I$, la famille $\{x_i; i \in I, y\}$ est liée dans E .

- génératrice minimale si elle engendre E tout entier et si, quand on la prive d'un de ses éléments, elle n'engendre plus E .

théorème: Soit E un K -espace vectoriel. Soit I un ensemble et $A = \{x_i; i \in I\}$ une famille de vecteurs de E . On a équivalence entre:

1. A est une base.
2. A est libre maximale dans E .
3. A est génératrice minimale dans E .
4. A est génératrice de E et libre dans E .

Definition - théorème: Soit E un K -espace vectoriel. Soit $\{e_i\}_{i \in I}$ une base de E . Pour un élément x de E il existe une famille unique à support fini $\{\lambda_i; i \in I\}$ de scalaires de K telle que

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$$

Le scalaire α_i s'appelle la i ème coordonnée α relativement à la base $\{e_i\}_{i \in I}$.

Dimension d'un espace vectoriel:

Def: Soit K un corps et E un K -espace vectoriel. E est K -espace vectoriel de dimension finie si il possède une famille génératrice de cardinal fini. Dans le cas contraire, E est dit de dimension infinie.

théorème: Soit E un espace vectoriel sur un corps K . On suppose que E est de dimension finie. Alors E possède une base. De plus cette base est de cardinal fini.

Remarque: Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont même cardinal. Ce cardinal sera appelé la dimension de l'espace vectoriel.

Lemme: Soit E un espace vectoriel sur un corps K . Soit e_1, \dots, e_n des vecteurs de E formant une base de E . Soient aussi v_1, \dots, v_m des vecteurs de E . Supposons que $m > n$. Alors v_1, \dots, v_m forme une famille liée de vecteurs de E .

théorème: Soit K un corps et soit E un K -espace vectoriel. Si E est de dimension finie alors toutes les bases de E ont même cardinal.

Def: Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps. Si E est réduit à son élément nul alors on dit que la dimension de E est 0 . Si non, on appelle dimension de E et note $\dim E$, le cardinal d'une base de E .

théorème de la base incomplète:

Soient K un corps et un espace vectoriel de dimension finie sur K . Soit $n = \dim E$ et soit $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ une famille libre de E . On suppose que $m < n$. On peut alors trouver des vecteurs f_{m+1}, \dots, f_n dans E tels que $\{e_1, \dots, e_m, f_{m+1}, \dots, f_n\}$ soit une base de E . On dit qu'on a complété la famille e en une base de E .

Sous espace vectoriel, sous espaces supplémentaires et somme directe de sous-espaces vectoriels

• Comment montrer que la famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ est une base de E ?

En utilisant l'une des propositions suivantes :

1. la définition : la famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ est une famille libre et génératrice de E .

2. une seule propriété suffit si on possède un renseignement sur la dimension :

a) $\left\{ \begin{array}{l} \dim(E) = p \\ \text{la famille } \{v_1, \dots, v_p\} \text{ est libre} \end{array} \right. \Rightarrow \text{la famille } \{v_1, \dots, v_p\} \text{ est une base}$

b) $\left\{ \begin{array}{l} \dim(E) = p \\ \text{la famille } \{v_1, \dots, v_p\} \text{ est génératrice} \end{array} \right. \Rightarrow \text{la famille } \{v_1, \dots, v_p\} \text{ est une base}$

k désigne un corps.

Def: Soit E un k -espace vectoriel et soit V un sous-espace vectoriel de E . Une base de sous-espace vectoriel V est une base de V tout qu'espace vectoriel.

Def: On dit qu'un sous-espace vectoriel est de dimension finie si il est engendré, en tant qu'espace vectoriel, par une famille de cardinal fini.

Def: La dimension d'un sous-espace vectoriel de dimension finie est le cardinal d'une base de ce sous-espace vectoriel.

Def: Soit V et V' sont deux sous-espaces vectoriels d'un k -espace vectoriel E . On note $V+V'$ l'ensemble somme de ces deux sous-espaces vectoriels V et V' .

$$V+V' = \{ v+v' \mid v \in V, v' \in V' \}$$

Théorème: Si V et V' sont deux sous-espaces vectoriels d'un k -espace vectoriel E alors $V+V'$ est aussi un sous-espace vectoriel de E .

Def: Soit E un k -espace vectoriel et soient V et V' deux sous-espaces vectoriels de E . ~~On note~~ On dit que V et V' sont en somme directe si $V \cap V' = \{0\}$. On note $V \oplus V'$ le sous-espace somme de deux sous-espaces supplémentaires.

Def: Soient V et V' deux sous-espaces vectoriels d'un k -espace vectoriel E . On suppose que V et V' sont en somme directe dans E et que $V \oplus V' = E$ alors V et V' sont dit supplémentaires dans E . V est un supplémentaire de V' dans E .

Théorème: Soit E un k -espace vectoriel de dimension finie. Soit V un sous-espace vectoriel de E . Alors V possède un ~~base~~ supplémentaire dans E .

Théorème: Si V et V' sont deux sous-espaces vectoriels de dimension finie du k -espace vectoriel E alors $\dim V + \dim V' = \dim(V+V') + \dim(V \cap V')$.

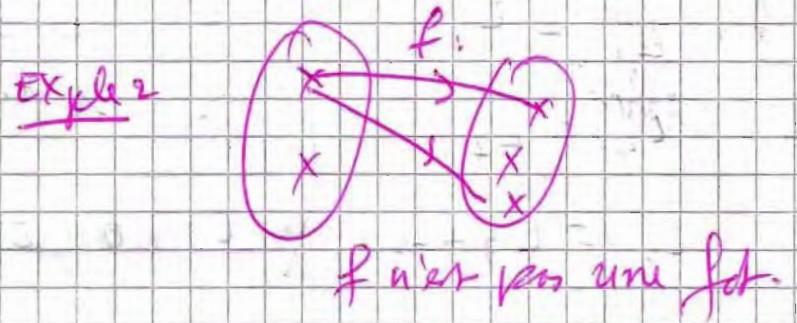
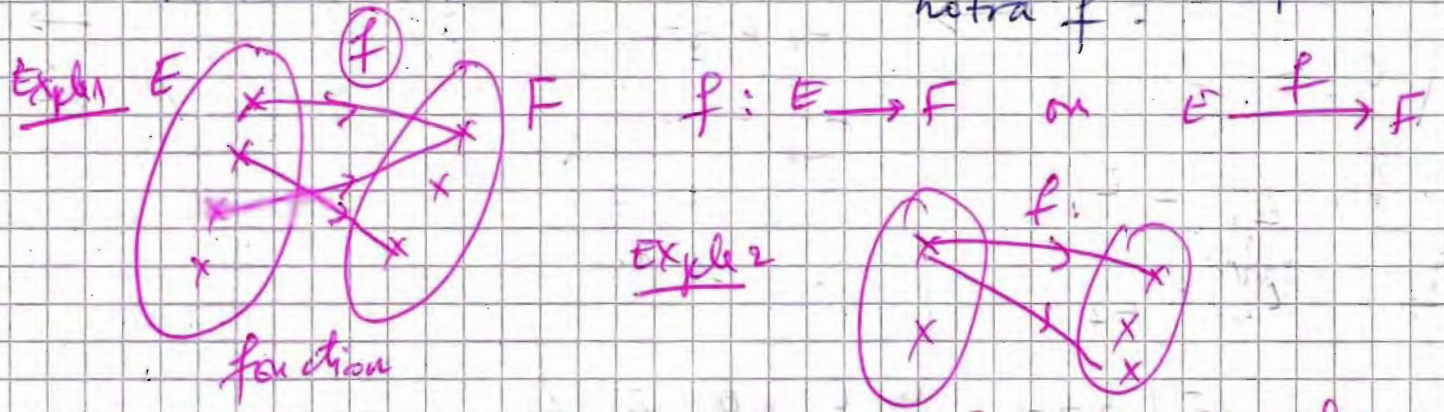
Def: Soit p un ^{entier} positif. On appelle rang d'un système de vecteurs v_1, \dots, v_p de l'espace vectoriel E la dimension de $\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_p) = \langle v_1, v_2, \dots, v_p \rangle$.

Applications linéaires.

Def: (Rappel sur les applications.)

1. fonctions et applications:

Soient E et F deux ensembles, si à tout élément x de E , on peut lui associer au plus un élément y de F , on dira qu'on a défini une fonction f de E vers F qu'on ~~notera~~ notera f .



Domaine de définition d'une fct f : c'est l'ensemble $D(f)$ ou D_f .

defini $D(f) = \mathcal{D}_f = \{x \in E / \exists y \in F, y = f(x)\} \subset E$.

• si $D(f) = E$ on dira que f est une application.

Autrement dit f une fct application; puis à tout élément x de E possède une image $f(x)$ de F .

le graphe d'une fct application:

$$\Gamma(f) = \Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in E\}, \quad \Gamma(f) \subset E \times F.$$

si $E = F = \mathbb{R}$ le graphe de f s'identifie à la courbe représentative de f .

• Soit f et g deux fcts $E \xrightarrow{f, g} F$

$$f = g \Leftrightarrow \begin{cases} D(f) = D(g) = D \\ f(x) = g(x) \quad \forall x \in D \end{cases}$$

Composition d'applications:

Soit $f: E \rightarrow F$, $g: F \rightarrow G$ deux applications

$$g \circ f: E \rightarrow G$$

$$x \mapsto g \circ f(x) = g[f(x)].$$

• En général $f \circ g \neq g \circ f$.

Soit \mathcal{F} l'ensemble des applications

~~(\mathcal{F}, \circ) est un groupe } $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$~~

$f: E \rightarrow F$, $g: F \rightarrow G$, $h: G \rightarrow H$ 3 app

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Image directe et Image réciproque d'une partie par application:

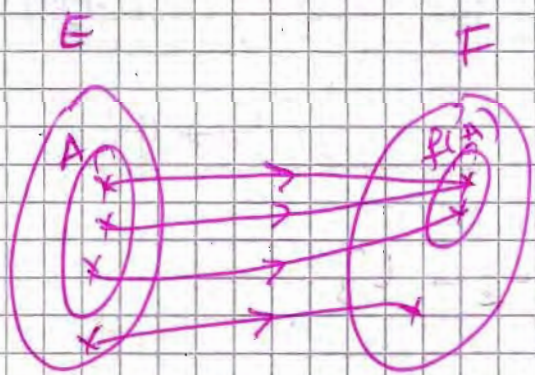
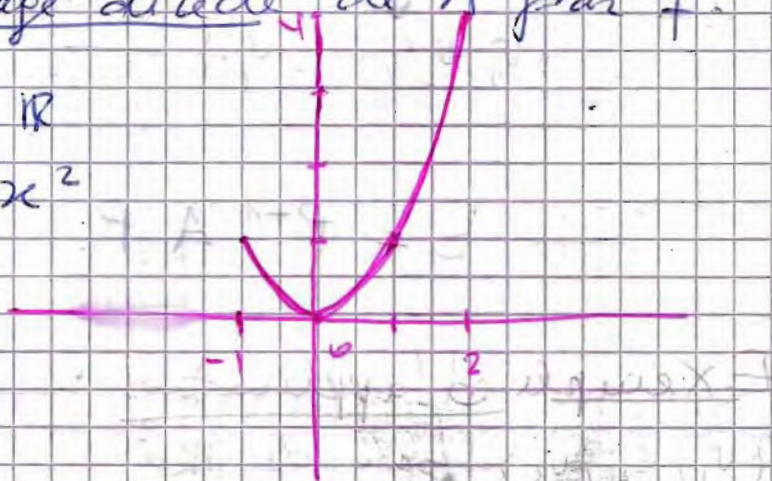
Soit $f: E \rightarrow F$ une application, $A \subseteq E$
on définit $f(A) = \{ f(x) / x \in A \}$.

$$= \{ y \in F / \exists x \in A, y = f(x) \}$$

$f(A)$ sera appelée Image directe de A par f .

Exemple: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow x^2$

$$A = [-1, 2], \quad f(A) = [0, 4]$$



propriété: $f: E \rightarrow F$ une application

$A \subseteq E, B \subseteq E$

i) $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$

ii) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

iii) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

Image réciproque: Soit $f: E \rightarrow F$ une application, soit $B \subseteq F$ on appelle image réciproque de B par l'appel f , qu'on note $f^{-1}(B)$.

$$f^{-1}(B) = \{ x \in E / f(x) \in B \} \subseteq E$$

Exemple:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow x^2$$

$$B_1 = [-1, 0[$$

$$B_2 = [1, 4]$$

$$f^{-1}(B_1) = \emptyset, \quad f^{-1}(B_2) = [-2, -1] \cup [1, 2]$$

Propriétés: $f: E \rightarrow F$, appl, $B \subset F, B' \subset F$

i) $B \subset B' \Rightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$

ii) $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$

iii) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$

iv) $f^{-1}(C_F^B) = C_E^{f^{-1}(B)}$

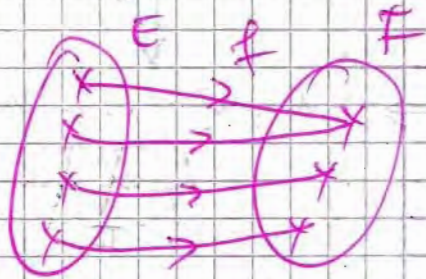
Application surjective, injective et bijective:

Soit $f: E \rightarrow F$ une application, on dira que f est surjective si l'une des propriétés suivantes est vérifiée.

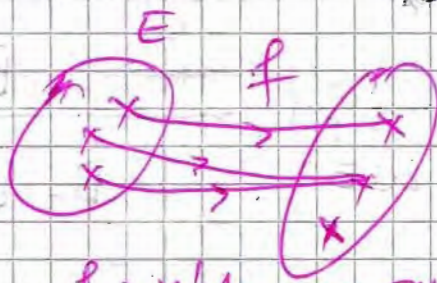
i) $f(E) = F$

ii) $\forall y \in F, \exists x \in E$ tq $y = f(x)$

iii) $\forall y \in F$ l'éq. $y = f(x)$ possède au moins une solution.



f : surjective



f : n'est pas surjective.

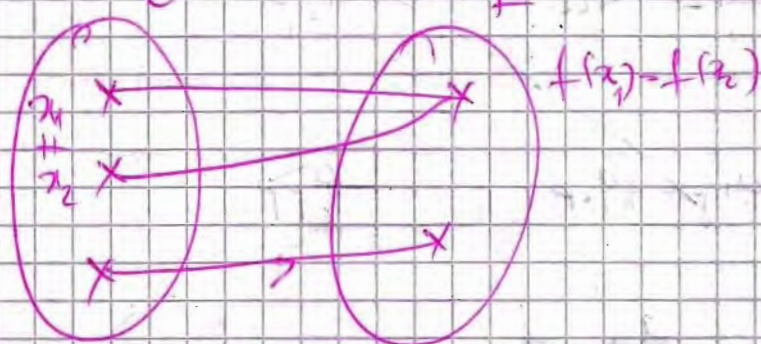
Application injective: Soit $f: E \rightarrow F$ app f inj si

l'une des propriétés \forall vérifiées

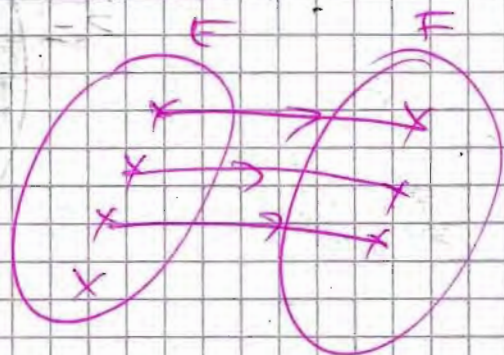
i) $\forall x \in A, \forall x' \in A, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

ii) $\forall x \in E, \forall x' \in E \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

iii) $\forall y \in F$ l'eq $y = f(x)$ possède au plus une solution



n'est pas surjective
Injective

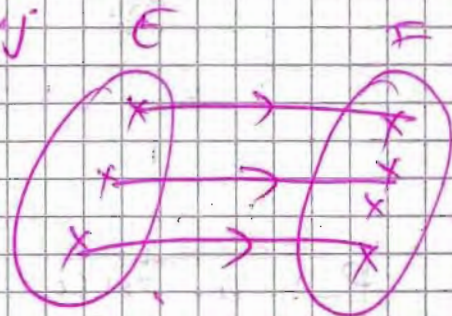


n'est pas une appli

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$

$f(-1) = f(1)$

n'est inj



injective

Application bijective :

$f: E \rightarrow F$ app on dira que f est bijective. Si :

i) f est à la fois surj et inj

ii) $\forall y \in F \quad \exists x \in E \text{ tq } y = f(x)$

iii) $\forall y \in F$ l'eq $y = f(x)$ possède une et seule solution

Propriétés: $f: E \rightarrow F, g: F \rightarrow G$

1) si f et g inj \Rightarrow $g \circ f$ inj

2) si f et g surj \Rightarrow $g \circ f$ surj

3) si f et g bijs \Rightarrow $g \circ f$ bijs

Soit f une appl. bij. de $E \rightarrow F$

$\exists!$ $f^{-1}: F \rightarrow E$ bi.

$$f \circ f^{-1} = \text{id}_F, \quad f^{-1} \circ f = \text{id}_E, \quad f^{-1} = f^{-1}$$

A ajouter relations d'équivalence

Applications Linéaires

Soyent E et F deux k -espace et soit $f: E \rightarrow F$ une application.

Def: On dira que f est linéaire (application linéaire) si:

i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in E$

ii) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, $\forall x \in E, \lambda \in k$

Ceci est équivalent à dire: $\forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in k$

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Def: si f est bijective, dans ce cas f est appelé isomorphisme (et on dit également E et F sont isomorphisme).

• si $E = F$ on dira que f est endomorphisme

• si $E = F$ et si f est bi. on dira que f est un automorphisme.

Notation: $\mathcal{L}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Exemple: \textcircled{a} $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y, z) \longmapsto (x-z, x-y+z) = f(x, y, z)$$

$E = \mathcal{C}([a, b])$ [toute fonction continue bornée sur $[a, b]$ est un \mathbb{R} -v. ?]

Exemple 2

$$\phi: E = \mathcal{C}([a, b]) \longrightarrow F = \mathbb{R}$$

$$f \longmapsto \phi(f) = \int_a^b f(t) dt.$$

$$\phi(f+g) = \int_a^b (f+g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt = \phi(f) + \phi(g)$$

$$\phi(\lambda f) = \int_a^b \lambda f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt = \lambda \phi(f).$$

Exemple 3: $E = E_1 \times E_2$ (E_1, E_2 : 2 k - e.v.)
 $F = E_1$

$$f: E_1 \times E_2 \longrightarrow E_1$$

$$(x, y) \longmapsto f(x, y) = x \quad \text{est application linéaire}$$

appelée projection de E sur E_1 , notée par $P_1 = f$.

$$\text{ii) } P_2: E_1 \times E_2 \longrightarrow E_2$$

$$(x, y) \longmapsto P_2(x, y) = y.$$

Conséquences:

i) $f(0_E) = 0_F$.

$$f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E) \quad \text{après simplification}$$

on aura $f(0_E) = 0_F$.

ii) $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_p f(x_p)$

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_p \in E, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in k.$$

Operations on the application lineaires

i) somme de 2 applications lineaires et une application lineaire

$$\text{si } \left. \begin{array}{l} f \in \mathcal{L}(E, F) \\ \text{et } g \in \mathcal{L}(E, F) \end{array} \right\} \Rightarrow f+g \in \mathcal{L}(E, F)$$

ii) si $\left. \begin{array}{l} f \in \mathcal{L}(E, F) \\ \text{et } \lambda \in \mathbb{K} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda f \in \mathcal{L}(E, F)$

D'après (i) et (ii) on deduit que $\mathcal{L}(E, F)$ est \mathbb{K} espace vectoriel

iii) $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors

$$g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$$

```
graph LR; E -- f --> F; F -- g --> G; E -- "g \circ f" --> G
```

• En effet $\forall x \in E, \forall y \in E$

$$\begin{aligned} g \circ f(x+y) &= g[f(x+y)] = g[f(x) + f(y)] \\ &= g[f(x)] + g[f(y)] = g \circ f(x) + g \circ f(y) \end{aligned}$$

• $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \exists x \in E$ alors $g \circ f(\lambda x) = g[f(\lambda x)]$

$$g[f(\lambda x)] = g[\lambda f(x)] = \lambda g[f(x)] = \lambda g \circ f(x)$$

• $g \circ f$ est une application lineaire [$g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$]

Noyau, Image d'une application linéaire.

Def₁: $f \in \mathcal{L}(E, F)$; on appelle noyau de f qu'on note $\text{Ker } f$ l'ensemble :

$$\text{Ker } f = \{x \in E / f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$$

Def₂: $f \in \mathcal{L}(E, F)$; on appelle Image de f qu'on note $\text{Im } f$ l'ensemble de vecteurs de F obtenus par

$$\text{Im } f = \{y \in F / \exists x \in E \quad y = f(x)\} = \{f(x) / x \in E\}$$

Exemple:

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = f(x, y, z) = (x - y, y + z)$$

$$\text{Ker } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = (0, 0)\}$$

$$= \{(x, y, z), x - y = y + z = 0\} = \{(x, x, -x), x \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x(1, 1, -1), x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, -1) \rangle$$

$$\text{Im } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = (x, y)\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } \begin{cases} x = x - y \\ y = y + z \end{cases}\}$$

On admette le théorème suivant:

Théorème: si E est engendré par la famille $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ alors $\text{Im} f$ est engendré par $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$.

$$E = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle \Rightarrow \text{Im} f = \langle f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n) \rangle$$

$$E = \mathbb{R}^3 = \langle e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1) \rangle$$

$$\text{Im} f = \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3) \rangle = \langle (1, 0), (-1, 1), (0, 1) \rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Im} f = \langle (-1, 1), (0, 1) \rangle = \mathbb{R}^2$$

} dim $\text{Im} f = 2$
} donc $\text{Im} f = \mathbb{R}^2$

Théorème:

Soit f une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors

- 1) L'image directe de tout p.e.v. E' de E est un p.e.v. de F ; En particulier $\text{Im} f$ est p.e.v. de F .
- 2) Si E' est engendré par $A \subset E$ alors $f(E') = \langle f(A) \rangle$.
- 3) L'image réciproque de tout p.e.v. F' de F est s.e.v. de E . En particulier $\text{Ker} f$ est s.e.v. de E .

~~4) $\text{Ker} f$ est toujours p.e.v. de E .~~

4) f est injective $\Leftrightarrow \text{Ker} f = \{0_E\}$.

5) f surjective $\Leftrightarrow \text{Im} f = F$.

6) si f bijective, f^{-1} est aussi une application linéaire

$$f^{-1} \in \text{Iso}(E, F)$$

7) $f \in \text{Iso}(E, F)$ "bij" et $\dim E = \dim F \Leftrightarrow$

$$f \text{ bij} \Leftrightarrow f \text{ inj} \Leftrightarrow f \text{ surj} \Leftrightarrow \text{Ker } f = \left\{ \vec{0}_E \right\}$$

8) $f, g \in \mathcal{L}(E)$, E K -espace vectoriel.

a) $f \circ g = g \circ f \Rightarrow g(\text{Ker } f) \subset \text{Ker } f$

b) $\text{Ker}(f \circ f) = \text{Ker } f \Leftrightarrow \text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\}$

c) $\text{Im } f = \text{Im}(f \circ f) \Leftrightarrow E = \text{Ker } f + \text{Im } f$

Exple:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (x+y, x+y-3z, -x-y)$$

• f - Linéaire

• $\text{Ker } f, \text{Im } f$

• Nature de f .

Soit $v = (x, y, z), v' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$

$$f(v+v') = f((x, y, z) + (x', y', z')) = f(x+x', y+y', z+z')$$

$$= (x+x'+y+y', x+x'+y+y'-3z-3z', -x-x'-y-y')$$

$$= ((x+y) + (x'+y'), (x+y-3z) + (x'+y'-3z'), (-x-y) + (-x'-y'))$$

$$= (x+y, x+y-3z, -x-y) + (x'+y', x'+y'-3z', -x'-y')$$

$$= f(x, y, z) + f(x', y', z') = f(v) + f(v')$$

$$f(dv) = f(d(x, y, z)) = f(dx, dy, dz) = (dx+dy, dx+dy-3dz, -dx-dy)$$

$$= d(x+y, x+y-3z, -x-y) = d f(x, y, z) = d f(v)$$

f est une application linéaire.

$$\text{Ker } f = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = (0, 0, 0) \right\}$$

$$f(x, y, z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+y = 0 \\ x+y-3z = 0 \\ -x-y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ker } f = \left\{ (-y, y, 0) \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y(-1, 1, 0) \mid y \in \mathbb{R} \right\}$$

$= \langle (-1, 1, 0) \rangle$, $\text{Ker } f \neq \{(0, 0, 0)\}$ donc f n'est pas injective.

$$\text{Im } f: \text{ on a } E = \mathbb{R}^3 = \langle e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1) \rangle$$

$$\text{Im } f = \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3) \rangle$$

$$\text{Im } f = \langle (1, 1, -1), (1, 1, -1), (0, -3, 0) \rangle = \langle (1, 1, -1), (0, -3, 0) \rangle$$

~~car~~ $\dim(\text{Im } f) = 2$ $\text{Im } f \neq \mathbb{R}^3$ f n'est pas surjective.

Rang d'une application linéaire :

Espace Quotient

Def. théorème : Soit E un K -espace vectoriel. Soit V un sous-espace V de E . Sur E , on considère la relation d'équivalence suivante. Si $x, y \in E$, $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in V$. (\sim une relation d'équivalence sur E). On note E/V l'ensemble des classes d'équivalences de cette relation. E/V a une structure de K -espace vectoriel.

2) rang d'une app. li. : $\text{rg } f = \dim f(E) = \dim(\text{Im } f)$

Théorème :

1) $E/\text{Ker} f$ est isomorphe à $\text{Im} f$

$$2) \text{rg} f = \dim f(E) = \dim [E / f^{-1}(\{0\})] = \dim E - \dim(\text{Ker} f)$$

$$\dim E = \dim(\text{Im} f) + \dim(\text{Ker} f).$$

Théorème : $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\dim E = p$, $\dim F = n$, alors

a) $\text{rg} f = \dim(\text{Im} f) = \dim(f(E)) \leq n$

b) $\text{rg} f = p \Leftrightarrow f$ injective

c) $\text{rg} f = n \Leftrightarrow f$ surjective

d) $\text{rg} f = n = p \Leftrightarrow f$ bijective.

Théorème : $\alpha \in \text{Iso}(E, F)$, $\dim E = \dim F$ alors,

a) L'image d'une base de E est une base de F

b) L'image réciproque d'une base F est une base de E

EXO 1: $P_2(x)$ e.v. des polynômes de degrés ≤ 2

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

$$\boxed{P_2(x) = ax^2 + bx + c}$$

$$f: P_2(x) \longrightarrow P_2(x)$$
$$P \longmapsto xP' + P''$$

Montrer que f est linéaire, calculer $\text{Ker} f$, $\text{Im} f$.

EXO 2: $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \longmapsto (x+2y, y-z, x+z)$$

trouver une base et la dimension de $\text{Im} f$.

EXO3: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \mapsto (x+2y, y-z, x+z)$$

linéarité, bi, et trouver f^{-1} si tel \exists .

EXO4: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \mapsto (y+z, x+z, x+y)$$

a) Démontrer que f est un isomorphisme et déterminer f^{-1}

b) Soit $E = \{(x, y, z) ; x+y+z=0\}$

• Montrer que E est s.e.v. de \mathbb{R}^3 , que peut on dire de $f(E)$

c) quel est le noyau de la restriction de f à E .

CH. IV: Matrices

Soit K un corps commutatif, En pratique $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

On appelle matrice de type (n, p) à coefficients de K ,

une application de $\{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, p\} \rightarrow K$
 $(i, j) \mapsto a_{ij}$

on note l'application par

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

où n est le

$$A = (a_{ij})$$

n : nombre de lignes,

$$\begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p \end{matrix}$$

p : nombre de colonnes,

On désigne par $M_{(n,p)}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type (n, p) .

1) Si $A \in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$, $B \in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, n \\ \forall j = 1, \dots, p.$$

2) On définit la transposée de A qu'on note tA la matrice obtenue en échangeant les lignes avec les colonnes (chaque ligne devient une colonne).

$$\text{Si } A \in M_{(n,p)}(\mathbb{K}) \Rightarrow {}^tA \in M_{(p,n)}(\mathbb{K}).$$

Quelques matrices particulières :

une matrice A est dite carrée si le nbre de lignes = nb de colonnes ($n = p$).

une matrice carrée est dite symétrique si :

$${}^tA = A \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$$

une matrice carrée est dite antisymétrique si :

$${}^tA = -A \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji}$$

Dans une matrice antisymétrique les éléments diagonaux sont nuls ($a_{ii} = 0 \quad \forall i, 1 \leq i \leq n$).

Opérations sur les matrices

Soient $A, B \in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

On définit $A+B$:

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1p} + b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix}$$

$$A+B \in M_{(n,p)}(K)$$

Propriétés de la somme

- 1) $E(A+B) = EA + EB$
- 2) $A+B = B+A$
- 3) $(A+B)+C = A+(B+C)$

$\lambda \in K$ et $A \in M_{(n,p)}(K)$

On définit produit d'une matrice par un scalaire λ par λA .

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \dots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}, \quad \lambda A \in M_{(n,p)}(K)$$

Proposition : $M_{(n,p)}(K)$ est K e.v. de dimension np

En effet $A \in M_{(n,p)}(K)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots + a_{ij} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots + a_{np} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij} E_{ij}$$

E_{ij} est la matrice dont tous les éléments sont nuls, à l'exception de l'élément qui se trouve pour l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1

$$M_{(n,p)}(\mathbb{K}) = \langle E_{11}, E_{12}, \dots, E_{np} \rangle$$

$$\lambda_{11} E_{11} + \lambda_{12} E_{12} + \dots + \lambda_{np} E_{np} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \dots & \lambda_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\lambda_{11} = \lambda_{12} = \dots = \lambda_{n1} = \dots = \lambda_{np} = 0$$

Les matrices E_{11}, \dots, E_{np} sont L.I., elle forme une base de $M_{(n,p)}(\mathbb{K})$ et donc $\dim M_{(n,p)}(\mathbb{K}) = n \cdot p$.

Remarque:

• $M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de type (n,n)

• " $(p=n)$ " \rightarrow dans $M_n(\mathbb{K})$ est \mathbb{K} e.v. de $\dim = n^2$

• $S_n(\mathbb{K})$ l'ensemble matrices symétriques

• $A_n(\mathbb{K})$ l'ensemble " antisymétriques

• $M_n(\mathbb{R})$ est \mathbb{R} e.v. de $\dim = n^2$

• $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont deux espaces vectoriels supplémentaires dans $M_n(\mathbb{R})$ de dimensions respectives $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$

theoreme: toute matrice carrée s'écrit comme la somme de deux matrices l'une est symétrique et l'autre est anti-symétrique.

$$\begin{aligned}
 B &= S + A \\
 {}^t B &= {}^t S + {}^t A = S - A \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{B + {}^t B}{2} \\ A = \frac{B - {}^t B}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

cette décomposition est unique.

Produit de deux matrices:

$$A \in M_{(n,p)}(K), B \in M_{(p,m)}(K) \quad (B \in M_{(p,m)}(K))$$

$$A \cdot B \in M_{(n,m)}(K) \text{ défini par:}$$

$$C = AB = (c_{ij})$$

$1 \leq i \leq n$
 $1 \leq j \leq m$

$$c_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ip}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix}$$

$$= a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj}$$

$$\boxed{c_{ij} = \sum_p a_{ip} \cdot b_{pj}}$$

Exple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & -1 \\ 3 & 0 \\ 17 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriétés:

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$$

$$C \times (A + B) = C \times A + C \times B$$

$${}^t(A \cdot B) = {}^tB \times {}^tA, \quad [{}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB]$$

En general : $A \cdot B \neq B \cdot A$.

rang d'une matrice : Soit A une matrice, $A \in M_{\begin{smallmatrix} (n,p) \\ (m,p) \end{smallmatrix}}(K)$ le nombre de lignes linéairement indépendantes égale (-) au nombre de colonnes (L, I) de A , le nombre commun est appelé rang de la matrice est noté ($\text{rg } A$).

→ De cette définition on a également :

$$\text{rg}({}^tA) = \text{rg}(A).$$

Matrices carrées inversibles : Soit $A \in M_{\begin{smallmatrix} (n,n) \\ (n,n) \end{smallmatrix}}(K)$ une matrice carrée, on dira que A est inversible si il existe

$$B \in M_{\begin{smallmatrix} (n,n) \\ (n,n) \end{smallmatrix}}(K) \quad \text{t.q.} \quad A \cdot B = B \cdot A = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [\text{on note } B = A^{-1}]$$

En réalité il suffit de vérifier $A \cdot B = I_n$.

Théorème : A est inversible si $\text{rg } A = n$.



On peut transformer A par des opérations élémentaires jusqu'à obtenir une matrice triangulaire dont les éléments

diagonaux sont tous non nuls.

Exple :

$$A = \begin{pmatrix} L_1 & \textcircled{2} & 1 & -2 \\ L_2 & 0 & 3 & 1 \\ L_3 & -2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} L'_1 = L_1 \\ L'_2 = L_2 \\ L'_3 = L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & \textcircled{3} & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L''_1 = L'_1 \\ L''_2 = L'_2 \\ L''_3 = L'_3 + \frac{2}{3}L'_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

les lignes sont linéairement indépendantes $\Rightarrow A$ est inversible ($\text{rg} A = 3$).

Comment calculer l'inverse d'une matrice carrée ?

On a plusieurs méthodes :

a) $AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$

Donc pour trouver la matrice A^{-1} l'inverse de A il suffit de résoudre le système $AX = Y$.

Exple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = ?$$

On résout le système : $AX = Y$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$$AX = Y \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = y_1 \\ 0x_1 + 3x_2 + x_3 = y_2 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & y_1 \\ 0 & 3 & 1 & y_2 \\ -2 & -3 & 5 & y_3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & y_1 \\ 0 & 3 & 1 & y_2 \\ 0 & -2 & 3 & y_3 + y_1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & y_1 \\ 0 & 3 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} & y_3 + y_1 + \frac{2}{3}y_2 \end{array} \right)$$

$$\frac{11}{3} x_3 = y_1 + y_2 + \frac{2}{3} y_2 \Rightarrow x_3 = \frac{3}{11} y_1 + \frac{2}{11} y_2 + \frac{3}{11} \frac{y_2}{3}$$

$$3x_2 + 2x_3 = y_2 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{11} y_1 + \frac{3}{11} y_2 - \frac{1}{11} y_3$$

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = y_1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{18}{11} y_1 + \frac{1}{11} y_2 + \frac{7}{11} y_3 \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{18}{22} & \frac{1}{22} & \frac{7}{22} \\ -\frac{1}{11} & \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

b) $A^{-1} = T^{-1} U$ avec

T : matrice triangulaire ~~supérieure~~ ? *sup*

U : matrice triangulaire ~~inférieure~~ ? *sup*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = (A | I_3) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} & 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{array} \right) =$$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$T^{-1} = ?$ $TX = Y \Leftrightarrow X = T^{-1}Y.$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{3}{11} y_3 \\ x_2 = \frac{1}{3} y_2 - \frac{1}{11} y_3 \\ x_1 = \frac{1}{2} y_1 - \frac{1}{6} y_2 + \frac{7}{22} y_3 \end{cases}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{22} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{11} \\ 0 & 0 & \frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = T^{-1} \cdot U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{22} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{11} \\ 0 & 0 & \frac{3}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{18}{22} & \frac{1}{22} & \frac{7}{22} \\ -\frac{2}{22} & \frac{6}{22} & -\frac{2}{22} \\ \frac{6}{22} & \frac{4}{22} & \frac{6}{22} \end{pmatrix}$$

Matrice d'une application lineaire :

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire où E et F sont des espaces vectoriels de dimension p et m respectivement.

Soit $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ une base de E
 et $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ une base de F