

Matière : Mathématiques pour la physique –II-

SERIE N°1 : RAPPELS ET COMPLEMENTS

Exercice n°1 :

Soient A et B deux parties de E . Donner la négation des propositions suivantes:

$$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow [\forall x \in E (x \in A \wedge x \in B)], (x \in \complement_E^A) \Leftrightarrow \forall x (x \in E \wedge x \notin A)$$

Exercice n°2:

Soient A et B deux parties de E tel que :

$$E = \{-2, \sqrt{2}, -3, 4, 0, 6\}, A = \{\sqrt{2}, -3, 4\}, B = \{0, -3, \sqrt{2}, 6\}$$

1. Calculer $A \cap B, A \cup B, A - B, B - A, A \Delta B, A \times B, B \times A, \complement_E^A, \complement_E^B, \complement_E^{A \cap B}$ et $\complement_E^{A \cup B}$
2. Calculer $\complement(A), \complement(B)$ et $\complement(A) \cap \complement(B)$
3. Comparer entre $\complement_E^A \cap \complement_E^B$ et $\complement_E^{A \cup B}$ et entre $\complement_E^A \cup \complement_E^B$ et $\complement_E^{A \cap B}$.
4. Montrer l'une des relations précédentes.

Exercice n°3 :

Soit \mathfrak{R} une relation dans \mathbb{Z} définie comme suit :

$$x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow ((x - y) \text{ multiple de } 3)$$

1. Montrer que \mathfrak{R} est une relation d'équivalence.
2. Calculer l'ensemble des classes d'équivalence $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
3. Vérifier que les ensembles $\overset{\cdot}{0}, \overset{\cdot}{1}, \overset{\cdot}{2}$ forment une partition de \mathbb{Z} .

Exercice n°4 :

1. Soit \mathfrak{R} une relation dans \mathbb{R}^* définie comme suit :

$$x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow xy > 0$$

- Montrer que \mathfrak{R} est une relation d'équivalence.
 - Calculer l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation.
2. Soit \mathfrak{R}' une autre relation dans \mathbb{R} définie comme suit :

$$x \mathfrak{R}' y \Leftrightarrow xy \geq 0$$

- Montrer que \mathfrak{R}' n'est pas une relation d'équivalence.

Exercice n°5 :

Soit \mathfrak{R} une relation dans \mathbb{R} définie comme suit :

$$a\mathfrak{R}b \Leftrightarrow (a^3 - b^3 \geq 0)$$

1. Montrer que \mathfrak{R} est une relation d'ordre.
2. la relation \mathfrak{R} est-elle d'ordre total ?

Exercice n°6 :

Soit f l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} - \{1\} &\rightarrow \mathbb{R} - \{-2\} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{1-2x}{x-1} \end{aligned}$$

1. Montrer que l'application f est bijective, puis calculer son application inverse f^{-1} .

Exercice n°7 :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et g une fonction définie comme suit :

$$\begin{aligned} g :]a, +\infty[&\rightarrow]-\infty, b[\\ x &\mapsto g(x) = 2 - x^2 \end{aligned}$$

1. calculer a et b pour que g soit une application bijective.
2. dans ce cas calculer son application inverse g^{-1} .

Exercice n°8 :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application définie par :

$$f[(x, y, z)] = (2x + y - z, x + y + z)$$

1. f est-elle surjective ? f est-elle injective ?

Exercice n°9 :

Soit f une application de E vers F et A et B deux parties de F . Montrer que :

1. $(A \subset B) \Rightarrow (f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B))$
2. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
3. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
4. $f^{-1}\left(\underset{f^{-1}(F)}{\mathbb{C}}^A\right) = \underset{f^{-1}(F)}{\mathbb{C}}^{f^{-1}(A)}$

Exercice n°10:

Soit \circ une loi de composition interne (opération) dans l'ensemble $\mathbb{R} - \{2\}$, définie comme suit :

$$a \circ b = ab - 2(a + b) + 6$$

1. Montrer que $(\mathbb{R} - \{2\}, \circ)$ est groupe abélien (commutatif).
2. Montrer qu'il existe un élément λ de \mathbb{R} tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad a \circ \lambda = \lambda$$

Exercice n°11:

Soient x et y deux nombres réels de l'intervalle $D =]-1, 1[$

1. Vérifier que : $\forall (x, y) \in D^2 : 1 + xy > 0$.
2. Montrer que : $\forall (x, y) \in D^2 : -1 < \frac{x+y}{1+xy} < +1$.

Soit \circ une lois de composition interne dans l'ensemble D , définie comme suit :

$$x \circ y = \frac{x+y}{1+xy}$$

1. Montrer que (D, \circ) est un groupe abélien.

Exercice n°12:

On définit dans l'ensemble \mathbb{R}^2 deux lois de composition \oplus et \otimes de la façon suivante :

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$(x, y) \otimes (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$$

On pose $D = \mathbb{R} \times \{0\}$.

Soit f une application de \mathbb{R} vers D définie comme suit :

$$f(x) = (x, 0)$$

1. Montrer que f est isomorphisme de $(\mathbb{R}, +, \times)$ vers (D, \oplus, \otimes) .
2. On pose $(0, 1) = \alpha$ et $(x, 0) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout élément de \mathbb{R}^2 peut s'écrire sous forme $(x + \alpha y)$, avec $x, y \in \mathbb{R}$.