Université ZIANE Achour de Djelfa
Faculté Sciences Exactes et Informatique
Département de Physique
1ere année Master : Matière Condensée

Matière : Mathématiques pour la physique –II-

SERIE N°5 : APPLICATIONS LINEAIRES

Exercice n°1 :

Considérons $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ comme espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et soit : $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une fonction définie par :

$$f(x,y,z) = (2x + y - z, x + y + z).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Caractériser le noyau de f et trouver sa dimension.
3. Caractériser l'image de f et trouver sa dimension.
4. f est-elle surjective ? f est-elle injective?

Exercice n°2 :

On considère $\mathbb{R}^3$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f(x,y,z) = (-x, x + y + z, -y - z).$$

1. Vérifier que f définie bien une application linéaire.
2. Ecrire la matrice A de f par rapport à la base canonique $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.
3. Caractériser le noyau de f et trouver sa dimension.
4. Caractériser l'image de f et trouver sa dimension.
5. f est-elle bijective ? Comment appelle-t-on l'application f .
6. On considère les vecteurs suivants dans $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v}_1 = (0,-1,0),\ \vec{v}_2 = (1,0,1),\ \vec{v}_3 = (1,0,0).$$

- Montrer que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$
- Ecrire la matrice B de f , par rapport à la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

Exercice n°3:

On considère $\mathbb{R}^3$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme défini par :

$$f(x, y, z) = (x + 2y, -z, 2x - 3y + 4z, -7y + 6z).$$

1. Ecrire la matrice de f, par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. déterminer une base de $\ker f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.
3. Calculer $\dim(\ker f)$ et $\dim(\operatorname{Im} f)$.

Exercice n°4:

On considère $\mathbb{R}^4$ comme espace vectoriel sur $\Re$ et $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorphisme défini par :

$$f(x, y, z, t) = (y + z, x + y, x, t).$$

1. Ecrire la matrice de f, par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner une base de $\operatorname{Im} f$.
3. On considère les vecteurs :

$$\vec{v}_1 = (0,1,1,0), \vec{v}_2 = (1,0,1,0), \vec{v}_3 = (1,1,0,0), \vec{v}_4 = (0,0,0,2).$$

   - Montrer que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

4. Ecrire la matrice P, de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^4$, à la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$.
5. Calculer : $P^2 - P$.
6. Ecrire la matrice de f, par rapport à la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ de $\mathbb{R}^4$.

Exercice n°5:

On considère un corps commutatif $\mathbb{k}$. On suppose que la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

représente l'application linéaire $f : \mathbb{k}^4 \to \mathbb{k}^3$ par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{k}^4$ et $\mathbb{k}^3$.

1. On suppose que $\mathbb{k} = \mathbb{R}$. Déterminer, dans ce cas, les dimensions du noyau de f et de l'image de f.
2. On suppose que $\mathbb{k} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Déterminer, dans ce cas, les dimensions du noyau de f et de l'image de f.

Exercice n°6:

Considérons $\mathbb{R}^3$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soient α un nombre réel et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme défini par :

$$f(x,y,z) = (x+y+z, x+\alpha\ y+z, x+y+\alpha^2 z).$$

1. Ecrire la matrice de f, par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer, suivant les valeurs de α, une base de $\operatorname{Im} f$.
3. Déterminer, suivant les valeurs de α, une base de $\ker f$.

Exercice n°7:

Considérons $\mathbb{R}^3$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice, par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\sin\theta \\ 1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } \theta \text{ est un nombre réel.}$$

1. Déterminer le noyau de g, l'image de g et calculer leur dimension.
2. Calculer A^2 et A^3. En déduire que : $\operatorname{Im}(g \circ g) = \ker g$.
3. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le vecteur : $\vec{v} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ .Montrer que $\{\vec{v}, g(\vec{v}), g(g(\vec{v}))\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Ecrire la matrice de g par rapport à la base : $\{\vec{v}, g(\vec{v}), g(g(\vec{v}))\}$.