Université ZIANE Achour de Djelfa
Faculté Sciences Exactes et Informatique
Département de Physique
1ere année Master : Matière Condensée

Matière : Mathématiques pour la physique –II-

SERIE N°6 : DETERMINANTS

Exercice n°1:

Calculer les déterminants suivants :

1) $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) \\ \cos(a) & 1 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} a-b & b^2 \\ -1 & a+b \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix}$

6) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ a & 1 & c \\ a & b & 1 \end{vmatrix}$

8) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

Exercice n°2 : Résoudre les équations suivantes :

1) $\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 2) $\begin{vmatrix} 3 & x & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & x & 6 \end{vmatrix} = 0$ 3) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 4 & 2 & x \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$

Exercice n°3 :

Calculer le plus simplement possible:

1) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 7 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}$

Exercice n°4 :

Démontrer, sans calculer les déterminants, que

1) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0$

2) $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$

Exercice n°5 :

Montrer que les déterminants suivants sont nuls $\forall\ a,b,c \in \mathbb{R}$.

1) $\begin{vmatrix} b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \\ a+b & c & 1 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 1 & \sin^2(a) & \cos^2(a) \\ 1 & \sin^2(b) & \cos^2(b) \\ 1 & \sin^2(c) & \cos^2(c) \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 2a & 0 & a \\ 0 & 2b & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Exercice n°6 :

Factoriser :

1) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} a^2c & b^2c & c^2b \\ a & b & c \\ ab & bc & ab \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos 2a \\ 1 & \sin b & \cos 2b \\ 1 & \sin c & \cos 2c \end{vmatrix}$

6) $\begin{vmatrix} \sin x & \sin y & \sin z \\ \sin 2x & \sin 2y & \sin 2z \\ \sin^2 x & \sin^2 y & \sin^2 z \end{vmatrix}$

Exercice n°7 :

Vérifier les identités:

1) $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} b_1c_1 & c_1a_1 & a_1b_1 \\ b_2c_2 & c_2a_2 & a_2b_2 \\ b_3c_3 & c_3a_3 & a_3b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2a_3 & a_3a_1 & a_1a_2 \\ b_2b_3 & b_3b_1 & b_1b_2 \\ c_2c_3 & c_3c_1 & c_1c_2 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$

4) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$

5) $\begin{vmatrix} a-p & a & a \\ b & b-p & b \\ c & c & c\text{-}p \end{vmatrix} = p^3$ avec $2p = a+b+c$

Exercice n°8 :

On considère les deux matrices (3,3) à coefficients réels suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice A est inversible.
2. Calculer A^{-1} avec la méthode des déterminants.
3. Déduire la solution du système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = -1 \\ 3y + z = 4 \\ -2x - 3y + 5z = 2 \end{cases}$$

4. Retrouver cette solution en utilisant la méthode de Cramer.