Université ZIANE Achour de Djelfa
Faculté Sciences Exactes et Informatique
Département de Physique
1ère année Master : Matière Condensée

Matière : Mathématiques pour la physique –II-

SERIE N°8 SYSTEMES DIFFERENTIELS ET SYSTEMES DE SUITES

Exercice n°1:

Soient les matrices suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer P^{-1}.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$.
3. Déduire que A est diagonalisable.
4. Déduire les valeurs et les vecteurs propres de A .
5. Résoudre le système différentiel suivant:

$$(S): \begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -x + 2y \end{cases} \text{ avec } x' = \frac{dx}{dt},\ y = \frac{dy}{dt},\ t \in \mathbb{R}.$$

6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$
7. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ et les relations de récurrences :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2v_n \end{cases}$$

   a) Calculer u_n et v_n pour tout n , en utilisant la matrice A .

Exercice n°2:

Résoudre les systèmes différentiels suivants:

$$(S_1): \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 - x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases},\quad (S_2): \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 + x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \end{cases},\quad (S_3): \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 - 6x_2 + 6x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 - x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = -3x_1 - 6x_2 + 7x_3 \end{cases}$$

Exercice n°3:

Résoudre les équations différentielles suivantes:

$$y'' + y' + y = 0,\quad y'' - 2y' + y = 0,\quad y'' - y = 0$$

Exercice n°4:

soient les suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ définies par: $\begin{cases} u_{n+1} = -v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n - w_n \\ w_{n+1} = -u_n - v_n + 2w_n \end{cases}$, $u_0 = v_0 = w_0 = 1$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Diagonaliser A .

b) En déduire A^n .

c) Exprimer u_n, v_n, w_n en fonction de n .

Exercice n°5:

soient les suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ et la matrice A définies par:

$$\begin{cases} u_{n+1} = -2u_n - 2v_n - w_n \\ v_{n+1} = 4u_n + 3v_n \\ w_{n+1} = -3u_n - 2v_n \\ u_0 = v_0 = w_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et } A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer le polynôme caractéristique de A et déterminer ses racines.

b) Calculer A^n à l'aide du théorème de Cayley-Hamilton.

c) En déduire u_n, v_n, w_n en fonction de n .

Exercice n°6:

x, y, z Sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables. On veut résoudre le système différentiel:

$$\begin{cases} x' = 7x - 3y - 4z \\ y' = -4x + 6y + 4z \\ z' = 5x - 3y - 2x \end{cases} \quad \text{et soit } A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & 4 \\ 5 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Diagonaliser A .

b) Résoudre le système.

Exercice n°7:

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, montrer que A est

inversible et calculer son inverse.