منشورات دار الضحى

رقم : N°2018/ 31

بتاريخ: Date :2018 - 11 – 13

dareldouha2014@gmail.com

وثيقة نشر

بمقتضى الأمر رقم:16-96 المؤرخ في 02 جويلية 1996
بمقتضى المرسوم التنفيذي رقم 226-99 المؤرخ في 04أكتوبر1999
والمتضمنان توزيع رقم الإيداع القانوني والرقم الموحد للكتاب
من مصلحة الإيداع بالمكتبة الوطنية

نحن الناشر الموقع أدناه نشهد على أن:

Titre de livre :	**Exercices et solutions en mathématiques – TOME 1 –**	**عنوان الكتاب:**
Auteur :	**د/ رزاوي محمد منير ــ أ/ البار محمد**	**المؤلف:**
Date de naissance	**1981/06/17 عين وسارة – 1982/03/05 الجلفة**	**تاريخ الميلاد**
Editeur :	**دار الضحى للنشر والإشهار (الجلفة)**	**الناشر:**
Traducteur :	/	**المترجم:**
Dépôt légal:	**السداسي الثاني 2018**	**الإيداع القانوني:**
ISBN :	**978-9931-637-75-2**	**ر.د.م.ك:**

الطبعة الأولى سنة 2018

Première édition 2018

تأشيرة الناشر

المدير العام

أحمد دباب

ملاحظة:
يتحمل المؤلف والمطبعة مسؤولية محتوى مضمون الوثيقة

***Dr Mohamed Mounir REZAOUI**, né en 1981, a reçu son doctorat en génie électrique de l'École nationale polytechnique ENP d'Alger en 2015. En décembre 2010, il a rejoint l'Université Ziane Achour de Djelfa- Algérie. Il est associé à la faculté des sciences et de la technologie de l'Université de Djelfa en Algérie, il a enseigné plus de huit ans le Mathématique de 1ère année pour la formation d'ingénieur.*

***M. ELBAR Mohamed** est né à Djelfa (Algérie) en 1982. Il a obtenu en 2005 le diplôme d'ingénieur d'État en génie électrique de l'Université de Djelfa (Algérie), le Magister de l'école militaire polytechnique (EMP) d'Alger (Algérie), en 2008. Il prépare actuellement son doctorat en école polytechnique (ENP) à Alger, en Algérie. Il est actuellement enseignant au département des sciences et de la technologie à l'Université de Djelfa, en Algérie..*

ISBN: 978-9931-637-75-2

9789931637752

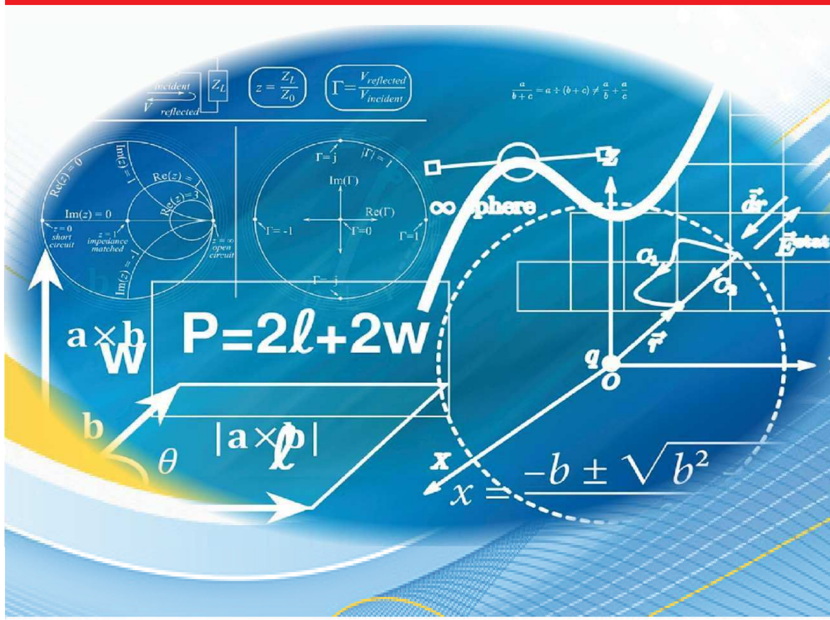
Exercices et Solutions en Mathématiques - Tome 1- *Dr. REZAOUI Mohamed Mounir / Mr. ELBAR Mohamed*

Exercices et Solutions en Mathématiques

- Tome 1-

Dr. REZAOUI Mohamed Mounir

Mr. ELBAR Mohamed



DAR LE DOUHA D'EDITION ET PUBLICITE

1ère Edition

2018

Exercices et Solutions
en
Mathématiques

- Tome 1 -

Dr. REZAOUI Mohamed Mounir

Mr. ELBAR Mohamed

1ère Edition

2018

DAR EL DOUHA D'EDITION ET PUBLICITE
DJELFA – ALGERIE
Dareldouha2014@gmail.com
027.92.24.92 / 07.74.93.36.70

1ère EDITION
2018

DL 2ème Semestre 2018
ISBN 978-9931-637-75-2

Conception - Mise en forme de l'ouvrage
m_nakmouche@yahoo.fr
messaoud.nakmouche@yahoo.fr

Sommaire

Introduction

Cet ouvrage est dédié aux étudiants premières années pour les disciplines:

- Sciences et technologies.
- Sciences de la Matières
- Maths et informatique.

Ce support va permettre aux étudiants de construire une base très forte en mathématiques en qualité d'observation, d'analyse et réflexion de calcul pour les réparés aux futures spécialités d'ingénieur, qui couvre l'ensemble des unités d'enseignement du programme pédagogique national de premier semestre.

Chapitre I:

Théorie des Ensembles

Rappel de Cours

Définitions :

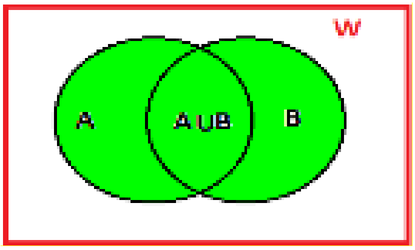
- Les objets mathématiques sont nommés **éléments**. Un **ensemble** est une *collection* ou un *groupement* d'éléments.
- L'assertion " a *appartient à* E " se note a∈E. L'assertion " b *n'appartient pas à* E " se note b∉E.
- Un ensemble est dit vide s'il n'a aucun élément et nous notons l'**ensemble vide** ϕ ou par $\{\}$.

Exemples d'ensembles

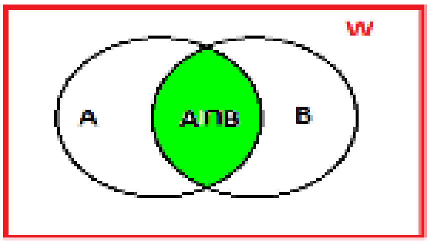
1. Les entiers naturels **0,1, 2, 3, ….** forment un ensemble qui se note N .
2. Les entiers relatifs **…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …** forment un ensemble qui se note $\Re$.
3. Les nombres rationnels (de la forme **p/q** où $q \in Z$ et $q \in N^*$) forment un ensemble noté Z
4. Les points du plan forment un ensemble.

On peut trouver quelques opérations importantes dans la théorie des ensembles :

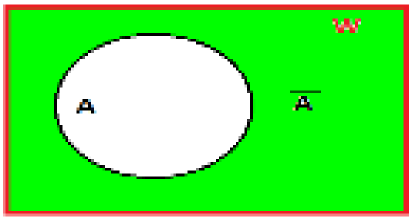
Réunion : La réunion de deux sous-ensembles A et B d'un ensemble W est l'ensemble des éléments de W qui appartiennent à A ou à B (ou aux deux). La réunion de A et B est notée $A \cup B$ qui est schématisé par la zone verte.

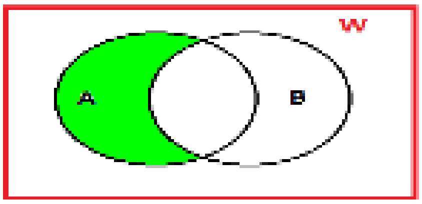


Intersection : L'Intersection de deux sous-ensembles A et B d'un ensemble W est l'ensemble des éléments de W qui appartiennent à A et à B au même temps. La réunion de A et B est notée $A \cap B$ qui est schématisé par la zone verte.



Complément : Si A est un sous-ensemble de W, le complémentaire de A dans W est l'ensemble des éléments de W qui n'appartiennent pas à E qui est notée A^c ou $\overline{A}$, ce dernier est schématisé par la zone verte.





Différence: La différence de deux sous-ensembles A et B d'un ensemble W est l'ensemble des éléments de W qui appartiennent à A et pas à B, qui est notée par A\B ou A-B.

Différence symétrique: La différence symétrique de deux sous-ensembles A et B d'un ensemble W est l'ensemble des éléments de W qui appartiennent à A et pas à B, ou qui appartiennent à B et pas à A noté par A∆B.

$$A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)= (A\setminus B)\cup(B\setminus A).$$

Cardinal : **On dit qu'un ensemble est fini lorsqu'il existe un entier naturel n_0 et une bijection de cet ensemble sur $[1, n_0]$. Dans le cas contraire, il est dit infini.**

Définition. **Soit** A un ensemble fini, on appelle cardinal de A, et on le note Card A ou ♯A, le nombre n_0 d'éléments de A. Si $A=\phi$, alors card A=0.

La **formule fondamentale** pour le calcul des cardinaux d'ensembles finis, est :

$$\text{Card }(A\cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card }(A\cap B)$$

Dans ce qui suit A et B sont des ensembles finis.

- Si A⊂B, alors card A≤ card F.
- Si A⊂B, et A≠B, alors card A<card B
- Card (A×B) = Card A × Card B.
- Si E est un ensemble fini à n éléments c'est-à-dire Card E=n, on note: P(E) l'ensemble de toutes les parties (de tous les sous-ensembles) de E et on a le résultat :

$$Card\left(P(E)\right)=2^n$$

Propriétés des opérations élémentaires

- L'intersection et la réunion sont idempotentes :

$$\forall A, A\cap A=A \;\; et \;\; A\cup A=A$$

- L'intersection et la réunion sont commutatives :

$$\forall A, \forall B, A\cap B=B\cap A \;\; et \;\; A\cup B=B\cup A$$

- L'intersection et la réunion sont associatives :

$$\forall A,\ \forall B,\ \forall C, \left(A\cap B\right)\cap C=A\cap\left(B\cap C\right)$$
$$\forall A,\ \forall B,\ \forall C,\ \left(A\cup B\right)\cup C=A\cup\left(B\cup C\right)$$

- L'intersection est distributive par rapport à la réunion :

$$\forall A,\ \forall B,\ \forall C,\ A\cap\left(B\cup C\right)=\left(A\cap B\right)\cup\left(A\cap C\right)$$

- La réunion est distributive par rapport à l'intersection :

$$\forall A,\ \forall B,\ \forall C,\ A\cup\left(B\cap C\right)=\left(A\cup B\right)\cap\left(A\cup C\right)$$

Série de TD N°01

Théorie des Ensembles

Exercice 01 : Trouver

$X \cap Y,\ X \cup Y,\ X - Y,\ Y \setminus X,\ X \setminus Y,\ X \times Y,\ Y \times X,\ X \,\Delta\, Y$

si : **1.** $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 5\},\ Y = \{\ 3,\ 7\},$

2. $X = \{2n,\ n \in N\},\ Y = \{3n,\ n \in N\},$

Exercice 02: Soient $A =]-\infty, 3], B =]-2, 7], C =]-5, +\infty[$

trois parties de $\Re$, Déterminer

$A \cap B,\ A \cup B,\ C \cap B,\ C \cup B,\ (\Re \setminus A) \cap\ (\Re \setminus B), (\Re \setminus (A \cup B)),$
$(A \cap B) \cup\ (A \cap C)\ et\ A \cap (C \cup B)$

Exercice 03: Soient *X* et *Y* deux ensembles. Démontrer les propositions suivantes:

$a)\quad X \subset Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y \Leftrightarrow X \cap Y = X$

$b)\quad (Z \subset X\ et\ Z \subset Y) \Leftrightarrow Z \subset (X \cap Y)$

$c)\quad (X \cap Y) \setminus (X \cap Z) = X \cap (Y \setminus Z)$

$d)\quad (X \cup Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$

Exercice 04: Soient *A, B* et *C* trois ensembles. Montrer que :

1. $C_A^{A\cap B} = (A\cup B)\backslash B$ 2. $A = A\cup(A\cap B)$

Exercice 05 : Soit **A, B, C** trois sous-ensembles de **E**. Montrer que :

1. $A = B \Leftrightarrow A\cup B = A\cap B$
2. $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$
3. $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$
4. $A\cap(B\setminus C) = (A\cap B)\setminus(A\cap C)$
5. $A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$
6. $A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\cap(A\setminus C)$
7. $(A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\cup C)$

Exercice 06 :

On rappelle que l'on note $A \vartriangle B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

1) Montrer que $(A\cap B)\cap\overline{(A\cap C)} = A\cap B\cap\bar{C}$

$(A\cap C)\cap\overline{(A\cap B)} = A\cap C\cap\bar{B}$

En déduire que $(A\cap B)\Delta(A\cap C) = A\cap(B\Delta C)$

2) Montrer que $(A\bigcup \boldsymbol{B})\bigcap\overline{(A\bigcup C)} = \bar{A}\bigcap \boldsymbol{B}\bigcap\overline{\boldsymbol{C}}$

$(A\bigcup \boldsymbol{C})\bigcap\overline{(A\bigcup B)} = \bar{A}\bigcap \boldsymbol{C}\bigcap\overline{\boldsymbol{B}}$

En déduire que $(A\bigcup \boldsymbol{B})\Delta(A\bigcup \boldsymbol{C}) = \bar{A}\bigcap(\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{C})$

<u>Exercice 07:</u> Soit $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ des sous-ensembles d'un ensemble $\boldsymbol{E}$.

Démontrer les lois de Morgan :

a. $\boldsymbol{A^c \cup B^c = (A \cap B)^c}$

b. $\boldsymbol{A^c \cap B^c = (A \cup B)^c}$

Corrigé type de la Série de TD N°01

Exercice 01 :

$X \cap Y,\ X \cup Y,\ X - Y,\ Y \setminus X,\ X \setminus Y,\ X \text{ x } Y,\ Y \text{ x } X,\ X \,\Delta\, Y$ si

1. $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 5\},\ Y = \{\ 3,\ 7\},$

$X \cap Y = \{3\}$

$X \cup Y = \{1,2,3,5,7\}$

$X\text{-}Y = \{1,2,5\}$

$Y \setminus X = \{7\}$ Ensemble de Y Sauf X

$X \setminus Y = \{1,2,5\}$ Ensemble de X Sauf Y

$X \times Y = \{(1,7),(1,3),(2,7),(2,3),(3,7),(3,3),(5,7),(5,3)\}$

$Y \times X = \{(7,1),(3,1),(7,2),(3,2),(7,3),(3,3),(7,5),(3,5)\}$

$X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) = \{1,2,5\} \cup \{7\} = \{1,2,5,7\}$

2. $X=\{2n,\ n\in N\},\ Y=\{3n,\ n\in N\},$

$$X=2n=\left\{0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,......\right\}$$

$$Y=3n=\left\{0,3,6,9,12,15,18,21,24,......\right\}$$

$$X\cap Y=\{0,6,12,18,24,...\}=\{6n,n\in N\}$$

$$X\cup Y=\{0,2,3,4,6,8,9,10,12,...\}$$

$$=N-\{1,5,7,11,13,17,19,...\}=N-\{6n\pm 1,n\in N\}$$

$$X-Y=\{2,4,8,10,14,16,,20,22,...\}$$

$$Y\setminus X=\{3,9,15,21,...\}$$

$$X\times Y=\{(2n,3n)\}$$

$$Y\times X=\{(3n,2n)\}$$

$$X\Delta Y=\{\ \},\ Le\ \Delta\ est\ appel\acute{e}\ la\ d\acute{e}ff\acute{e}rence\ sym\acute{e}trique$$

<u>Exercice 02:</u> Soient $A=]-\infty,3], B=]-2,7], C=]-5,+\infty[$ trois parties de $\mathbb{R}$.

$$A=]-\infty,3], B=]-2,7], C=]-5,+\infty[$$

$$A\cap B=]-2,3]$$

$$A\cup B=]-\infty,-2[\cup]-2,7]$$

$B \cap C =]-2,7]$

$B \cup C =]-5,-2[\cup]-2,+\infty[$

$A \cap C =]-5,3]$

$\Re \setminus A =]3,+\infty[$

$\Re \setminus B =]-\infty,-2[\cup]7,+\infty[$

$A \setminus B =]-\infty,-2]$

$(\Re \setminus A) \cap (\Re \setminus B) =]3,+\infty[\cap \left( ]-\infty,-2[\cup]7,+\infty[\right) =]7,+\infty[$

$(R \setminus (A \cup B)\ ) =]7,+\infty[$

$(A \cap B) \cup (A \cap C) =]-2,3] \cup]-5,3] =]-5,3]$

$\mathrm{A} \cap (B \cup C) =]-\infty,3] \cap \left( ]-5,-2[\cup]-2,+\infty[\right) =]-5,-2[\cup]-2,3]$

Exercice 03: Soient X et Y deux ensembles. Démonstration des propositions suivantes :

$a)\quad X \subset Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y \Leftrightarrow X \cap Y = X$

$X \subset Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y$

Supposons que $X \subset Y$

Si $x \in X \subset Y$, *alors* $x \in Y$, *alors* $x \in X \cup Y$,

par conséquent $X \cup Y = Y$. *Donc* $X \cup Y \subset Y$

On a montré que $X \subset Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y$

Supposons que $X \cup Y = Y$

Si $x \in X$, *alors* $x \in X \cup Y = Y$, *Donc* $x \in Y$

On a montré que $X \cup Y = Y \Leftrightarrow X \subset Y$

Finalement $X \subset Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y$

$X \subset Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y$

Supposons que $X \subset Y$

Si $x \in X \subset Y$, *alors* $x \in Y$, *alors* $x \in X \cup Y$,

par conséquent $X \cup Y = Y$. *Donc* $X \cup Y \subset Y$

On a montré que $X \subset Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y$

Supposons que $X \cup Y = Y$

Si $x \in X$, *alors* $x \in X \cup Y = Y$, *Donc* $x \in Y$

On a montré que $X \cup Y = Y \Leftrightarrow X \subset Y$

Finalement $X \subset Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y$

$X \subset Y \Leftrightarrow X \cap Y = X$

Supposons que $X \subset Y$

Si $x \in X \subset Y$, *alors* $x \in X$, *alors* $x \in X \cap Y$,

par conséquent $X \cap Y = X$

On a montré que $X \subset Y \Leftrightarrow X \cap Y = X$

Supposons que $X \cap Y = X$

Si $x \in X \cap Y$, *alors* $x \in X$, *Donc* $X \subset Y$

On a montré que $X \cap Y = X \Leftrightarrow X \subset Y$

Finalement $X \subset Y \Leftrightarrow X \cap Y = X$

$b)\quad (Z \subset X \ et \ Z \subset Y) \Leftrightarrow Z \subset (X \cap Y)$

Supposons que $Z \subset X$ *et* $Z \subset Y$

Si $x \in Z \subset Y$ *et* $x \in Z \subset Y$, *alors* $x \in X \cap Y$,

par conséquent $x \in Z \subset X \cap Y$

On a montré que $Z \subset X$ *et* $Z \subset Y \Leftrightarrow Z \subset X \cap Y$

Supposons que $Z \subset X \cap Y$

Si $x \in Z$, *alors* $x \in Z \subset X \cap Y$, *Donc* $Z \subset X$ *et* $Z \subset Y$

On a montré que $Z \subset X \cap Y \Leftrightarrow Z \subset X$ *et* $Z \subset Y$

Finalement $Z \subset X$ *et* $Z \subset Y \Leftrightarrow Z \subset X \cap Y$

$c)\quad (X\cap Y)\setminus(X\cap Z)=X\cap(Y\setminus Z)$

$$
\begin{aligned}
(X\cap Y)\setminus(X\cap Z)&=(X\cap Y)\cap\left(\overline{X\cap Z}\right)=(X\cap Y)\cap\left(\overline{X}\cup\overline{Z}\right)\\
&=\left((X\cap Y)\cap\overline{X}\right)\cup\left((X\cap Y)\cap\overline{Z}\right)\\
&=\left(X\cap Y\cap\overline{X}\right)\cup\left(X\cap Y\cap\overline{Z}\right)\\
&=\underbrace{\left(\underbrace{X\cap\overline{X}}_{\varnothing}\cap Y\right)}_{\varnothing}\cup\left(X\cap Y\cap\overline{Z}\right)\\
&=X\cap\left(Y\cap\overline{Z}\right)=X\cap(Y\setminus Z)
\end{aligned}
$$

Alors $\quad (X\cap Y)\setminus(X\cap Z)=X\cap(Y\setminus Z)$

Ou par une autre méthode :

$(X\cap Y)\setminus(X\cap Z)$

Supposons que $X\cap(Y\setminus Z)$

Si $x\in Z\subset Y$ *et* $x\in Z\subset Y$, *alors* $x\in X\cap Y$,

par conséquent $x\in Z\subset X\cap Y$

On a montré que $Z\subset X$ *et* $Z\subset Y\Leftrightarrow Z\subset X\cap Y$

Supposons que $(X\cap Y)\setminus(X\cap Z)$

Si $x\in Z$, *alors* $x\in Z\subset X\cap Y$, *Donc* $Z\subset X$ *et* $Z\subset Y$

On a montré que $Z\subset X\cap Y\Leftrightarrow Z\subset X$ *et* $Z\subset Y$

Finalement $Z\subset X$ *et* $Z\subset Y\Leftrightarrow Z\subset X\cap Y$

$d)\quad (X\setminus Z)\cup(Y\setminus Z)=(X\cup Y)\setminus Z$

$$(X\cup Y)\setminus Z=(X\setminus Z)\cup(Y\setminus Z)$$

$$*(X\setminus Z)\cup(Y\setminus Z)=\left(X\cap\overline{Z}\right)\cup\left(Y\cap\overline{Z}\right)$$

$$=(X\cup Y)\cap\overline{Z}=(X\cup Y)\setminus Z$$

$$*(X\cup Y)\setminus Z=(X\cup Y)\cap\overline{Z}=\left(X\cap\overline{Z}\right)\cup\left(Y\cap\overline{Z}\right)$$

$$=(X\setminus Z)\cup(Y\setminus Z)$$

Exercice 04: Soient *A, B* et *C* trois ensembles. Montre que :

1. $C_A^{A\cap B}=(A\cup B)\setminus B$

$$C_A^{A\cap B}=(A\cup B)\setminus B=(A\cap\overline{B})\cup\underbrace{(B\cap\overline{B})}_{\varnothing}=(A\cap\overline{B})=A\setminus B$$

2. $A=A\cup(A\cap B)$

$$A=A\cup(A\cap B)=A\cap\left(A\cup B\right)=$$

Exercice 05 : Soit $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ trois sous-ensembles de $\boldsymbol{E}$.Montre que :

1. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\Leftrightarrow A\cup B=A\cap B$

$A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$

Si $A = B$:

$$\begin{cases} A \cap A = A \\ A \cup A = A \end{cases}, \ Puisque\ A = B \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = A = B \\ A \cup B = A = B \end{cases}$$

$\Rightarrow A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$

On a montré que $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$

Si $A \cap B = A \cup B$:

Si $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \cup B$

Alors $(x \in A \ et\ x \in B) \Leftrightarrow (x \in A \ ou\ x \in B)$

Et finalement $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$

2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Si $x \in A \cap (B \cup C)$

Alors $(x \in A \ et\ x \in (B \cup C))$

Alors $(x \in A \ et\ (x \in B \ ou\ x \in C))$

Alors $(x \in A \ et\ x \in B)$ ou $(x \in A \ et\ x \in C)$

Alors $x \in (A \cap B)$ ou $x \in (A \cap C)$

Alors $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

On a montré que $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$Si\ x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$Alors\ x \in (A \cap B)\ ou\ x \in (A \cap C)$

$Alors\ (x \in A\ et\ x \in B)\ ou\ (x \in A\ ou\ x \in C)$

$Alors\ (x \in A\ ou\ x \in A)$ ou $(x \in A\ ou\ x \in C)$

et

$(x \in B\ ou\ x \in A)\ et\ (x \in B\ ou\ x \in C)$

$Alors\ x \in A\ et\ x \in (A \cup C)$

et

$x \in (B \cup A)\ \ et\ x \in (B \cup C)$

$Comme\ x \in A\ et\ x \in (A \cup C)\ \ et\ x \in (B \cup A)$

$entaine\ que\ x \in A,\ x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in A$

$et\ x \in (B \cup C) \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$

$On\ a\ montré\ que\ (A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

$Et\ finalement\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$Si\ x\in A\cup(B\cap C)$

$Alors\ \left(x\in A\ et\ x\in(B\cap C)\right)$

$Alors\ \left(x\in A\ ou\ \left(x\in B\ et\ x\in C\right)\right)$

$Si\ x\in A\ alors\ x\in\left(A\cup B\right)\ et\ x\in\left(A\cup C\right),$

$par\ conséquent\ x\in\left(A\cup B\right)\cap(B\cup C)$

$Si\ \left(x\in B\ et\ x\in C\ \right)\ alors\ x\in\left(A\cup B\right)\ et\ x\in\left(A\cup C\right)$

$Donc\ si\ \left(x\in A\ ou\ \left(x\in B\ et\ x\in C\ \right)\ \right)$

$alors\ x\in\left(A\cup B\right)\ et\ x\in\left(A\cup C\right)$

$Si\ x\in\left(A\cup B\right)\ et\ x\in\left(A\cup C\right)$

$alors\ \left(x\in\ \left(A\cup B\right)et\ x\in(A\cup C)\right)$

$x\in\left(A\cup B\right)\ et\ x\in\left(A\cup C\right)$

$\Leftrightarrow\ \left(\left(x\in\ A\ ou\ x\in B\right)\ et\ \left(x\in\ A\ ou\ x\in C\right)\right)$

$si\ \left(x\in\ A\ \text{et}\ \left(x\in\ A\ ou\ x\in C\right)\right)$

$\text{alors}\ x\in\left(A\cap A\right)\ ou\ x\in\left(A\ \cap C\right)$

$si\ \left(x\in\ B\ \text{et}\ \left(x\in\ A\ ou\ x\in C\right)\right)$

$\text{alors}\ x\in\left(B\cap A\right)\ ou\ x\in\left(B\ \cap C\right)$

$Alors\ x\in A\ ou\ x\in\left(A\ \cap C\right)\ ou\ x\in\left(B\cap A\right)$

$ou\ x\in\left(A\ \cap C\right)$

$Alors\ x\in A\ ou\ x\in\left(A\ \cap C\right)\ \subset A$

ou

$x\in\left(B\cap A\right)\ \subset A\ ou\ \ x\in\left(B\ \cap C\right)$

$Alors\ x \in A\ ou\ \ x \in (B\ \cap C)$

$Alors\ x \in A\ \cup (B\ \cap C)$

$On\ a\ montré\ que\ (A\ \cup B) \cap (A\ \cup C) \subset A\ \cup (B \cap C)$

$Et\ finalement\ A\ \cup (B \cap C) = (A\ \cup B) \cap (A\ \cup C)$

4. **$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.**

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$$

$$\begin{aligned}(A \cap B) \setminus (A \cap C) &= (A \cap B) \cap \left(\overline{A \cap C}\right) = (A \cap B) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{C}\right)\\ &= \left((A \cap B) \cap \overline{A}\right) \cup \left((A \cap B) \cap \overline{C}\right)\\ &= \left(A \cap B \cap \overline{A}\right) \cup \left(A \cap B \cap \overline{C}\right)\\ &= \underbrace{\left(A \cap \overline{A} \cap B\right)}_{\varnothing} \cup \left(A \cap B \cap \overline{C}\right) = \varnothing \cup \left(A \cap B \cap \overline{C}\right)\\ &= A \cap B \cap \overline{C} = A \cap B \setminus C = A \cap (B \setminus C)\end{aligned}$$

5. **$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$**

$$\begin{aligned}(A \setminus B) \cup (A \setminus C) &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) = A \cap (\overline{B} \cup \overline{C})\\ &= A \cap (\overline{B \cap C}) = \mathrm{A} \setminus (\mathrm{B} \cap \mathrm{C})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A \setminus (B \cap C) &= A \cap (\overline{B \cup C}) = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C})\\ &= A \cap A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = \left(A \cap \overline{B}\right) \cap \left(A \cap \overline{C}\right)\\ &= (A \setminus B) \cap (A \setminus C)\end{aligned}$$

6. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

$$A \setminus (B \cup C) = A \cap (\overline{B \cup C}) = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = A \cap A \cap (\overline{B} \cap \overline{C})$$
$$= \left(A \cap \overline{B}\right) \cap \left(A \cap \overline{C}\right) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$
$$= A \cap \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right) = A \cap \left(\overline{B \cup C}\right) = A \setminus \left(B \cup C\right)$$

7. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

$$A \setminus (B \setminus C) = \left(A \cap \overline{B}\right) \setminus C = \left(A \cap \overline{B}\right) \cap \overline{C} = A \cap \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right)$$
$$= A \cap \left(\overline{B \cup C}\right) = A \setminus (B \cup C)$$

<u>Exercice 06 :</u> On rappelle que $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

1) Montre que $(A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)} = A \cap B \cap \overline{C}$

$$(A \cap B) \cap \left(\overline{A \cap C}\right) = (A \cap B) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{C}\right)$$
$$= \underbrace{\left((A \cap B) \cap \overline{A}\right)}_{\varnothing} \cup \left((A \cap B) \cap \overline{C}\right)$$
$$= (A \cap B) \cap \overline{C} = (A \cap B) \setminus C$$

Et que : $(A\cap C)\cap\overline{(A\cap B)} = A\cap C\cap\overline{B}$

$$\begin{aligned}(A\cap C)\cap\left(\overline{A\cap B}\right) &= (A\cap C)\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\\ &= \underbrace{\left((A\cap C)\cap\overline{A}\right)}_{\varnothing}\cup\left((A\cap C)\cap\overline{B}\right)\\ &= (A\cap C)\cap\overline{B} = (A\cap C)\setminus B\end{aligned}$$

La déduction que $(A\cap B)\Delta(A\cap C) = A\cap(B\Delta C)$

$$\begin{aligned}X\setminus Y &= \underbrace{(A\cap B)}_{X}\setminus\underbrace{(A\cap C)}_{Y} = (A\cap B)\cap\left(\overline{A\cap C}\right) = (A\cap B)\cap\overline{C}\\ &= A\cap(B\setminus C)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y\setminus X &= \underbrace{(A\cap C)}_{Y}\setminus\underbrace{(A\cap B)}_{X} = (A\cap C)\cap\left(\overline{A\cap B}\right)\\ &= (A\cap C)\cap\overline{B} = A\cap(C\setminus B)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X\Delta Y &= (X\setminus Y)\cup(Y\setminus X) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)\\ &= \left((A\cap B)\setminus C\right)\cup\left((A\cap C)\setminus B\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (A\cap B)\Delta(A\cap C) &= \left(A\cap(B\setminus C)\right)\cup\left(A\cap(C\setminus B)\right)\\ &= A\cap\left((B\setminus C)\cup(C\setminus B)\right) = A\cap(B\Delta C)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (A\cap B)\Delta(A\cap C) = A\cap(B\Delta C)$$

2) Montre que $(A \cup B) \cap \overline{(A \cup C)} = \bar{A} \cap B \cap \bar{C}$

$$(A \cup B) \cap \left(\overline{A \cup C}\right) = (A \cup B) \cap \left(\overline{A} \cap \overline{C}\right)$$

$$= \left(\underbrace{\left(A \cap \overline{A} \cap \overline{C}\right)}_{\varnothing} \cup \left(B \cap \overline{A} \cap \overline{C}\right)\right) = \overline{A} \cap B \cap \overline{C}$$

$(A \cup C) \cap \overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap C \cap \bar{B}$

$$(A \cup C) \cap \left(\overline{A \cup B}\right) = (A \cup C) \cap \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$= A \cap \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup C \cap \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$$

$$= \underbrace{\left(A \cap \overline{A} \cap \overline{B}\right)}_{\varnothing} \cup \left(C \cap \overline{A} \cap \overline{B}\right)$$

$$= \overline{A} \cap C \cap \overline{B}$$

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

La déduction que $(A\cup B)\Delta(A\cup C)=\bar{A}\cap(B\Delta C)$

$$\Rightarrow X\setminus Y=\underbrace{(A\cup B)}_{X}\setminus\underbrace{(A\cup C)}_{Y}=(A\cup B)\cap\left(\overline{A\cup C}\right)$$

$$=\overline{A}\cap B\cap\overline{C}=\overline{A}\cap(B\setminus C)$$

$$Y\setminus X=\underbrace{(A\cup C)}_{Y}\setminus\underbrace{(A\cup B)}_{X}=(A\cup C)\cap\left(\overline{A\cup B}\right)$$

$$=\overline{A}\cap C\cap\overline{B}=\overline{A}\cap(C\setminus B)$$

$$X\Delta Y=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)=(A\cup B)\Delta(A\cup C)$$

$$=\left(\overline{A}\cap(B\setminus C)\right)\cup\left(\overline{A}\cap(C\setminus B)\right)$$

$$=\overline{A}\cap\left((B\setminus C)\right)\cup\left((C\setminus B)\right)=\overline{A}\cap(B\Delta C)$$

$$\Rightarrow(A\cup B)\Delta(A\cup C)=\overline{A}\cap(B\Delta C)$$

<u>Exercice 07:</u> Soit $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ des sous-ensembles d'un ensemble $\boldsymbol{E}$.

Démontrer les lois de Morgan : $\boldsymbol{A^c\cup B^c=(A\cap B)^c}$

$$Soit\ x\in A^C\cup B^C\Rightarrow x\in A^C\quad ou\quad x\in B^C$$

$$\left.\begin{array}{ll} & \Rightarrow x\notin A^C\\ *\,si\ x\in A^C & \Rightarrow x\notin(A\cap B)\\ & \Rightarrow x\in\overline{A\cap B}\\ & \Rightarrow x\notin B^C\\ *\,si\ x\in B^C & \Rightarrow x\notin(A\cap B)\\ & \Rightarrow x\in\overline{A\cap B}\end{array}\right\}\Rightarrow A^C\cup B^C\subset\overline{A\cap B}$$

$$Soit\ x \in \left(\overline{A \cap B}\right) \Rightarrow x\ n'est\ pas\ élément\ commun\ à\ A\ et\ B$$

$$* si\ x \in A,\ \ x \notin B^C \Rightarrow x \in B^C \Rightarrow x \in \left(A^C \cup B^C\right)$$

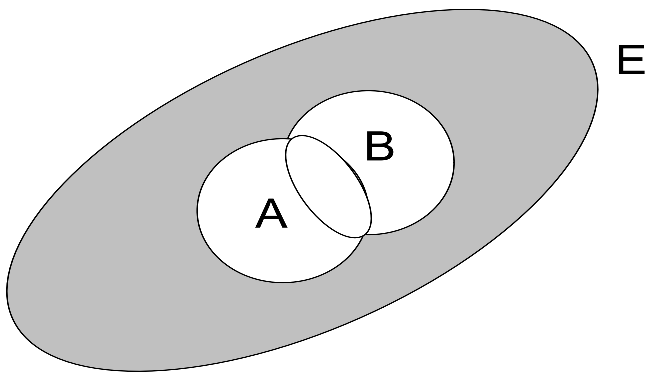
$$* si\ x \in B,\ \ x \notin A\ \ \Rightarrow x \in A^C \Rightarrow x \in \left(A^C \cup B^C\right)$$

$$* si\ x \notin A,\ \ x \notin B\ \ \Rightarrow x \in A^C\ \ et\ \ x \in B^C$$

$$\Rightarrow x \in \left(A^C \cup B^C\right)$$

$$\Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \left(A^C \cup B^C\right)$$

$$\Rightarrow \overline{A \cap B} = \left(A^C \cup B^C\right)$$



$$A^C \cup B^C = \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B} = \left(A \cap B\right)^C$$

$$\boldsymbol{A^c \cap B^c = (A \cup B)^c}$$

$$A^C \cap B^C = \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} = \left(A \cup B\right)^C$$

Chapitre II:

Raisonnement par Récurrence

Rappel de Cours

Raisonnement par Récurrence

Rappel :

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition $\left(P_n\right)$ est vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à un entier naturel n_0 fixé, on procède en trois étapes.

Avant de commencer, on note $\left(P_n\right)$ la proposition que l'on va démontrer.

- Étape 1 : Initialisation

On vérifier $\left(P_n\right)$ est vraie, c'est-à-dire que la proposition est vraie pour le premier indice n_0. On dit qu'on a initialisé la récurrence.

- Étape 2 : Hérédité

On suppose que pour un entier n quelconque $n > n_0$, $\left(P_n\right)$ est vraie, et sous cette hypothèse (dite de récurrence) on démontre que la proposition $\left(P_{n+1}\right)$ est vraie. On a ainsi prouvé que l'hypothèse de récurrence «$\left(P_n\right)$ vraie» est héréditaire.

- Étape 3 : Conclusion

Lorsque les deux premières étapes ont été réalisées, on conclut : par récurrence, la proposition $\left(P_n\right)$ est vraie pour tout entier naturel n $\left(n > n_0\right)$

Raisonnement par L'absurde

Rappel :

Le raisonnement par l'absurde est un raisonnement qui permet de démontrer qu'une affirmation est vraie en montrant que son contraire est faux. Il s'appuie sur règle logique que :

Si "non P" est fausse, alors P est vrai

Le raisonnement consiste à supposer que l'affirmation contraire est vraie et à tirer les conséquences que cela pourrait avoir **une seule conséquence absurde, manifestement fausse ou une contradiction** permet d'affirmer que l'affirmation contraire est fausse et donc d'en conclure que l'affirmation initiale est vraie.

Série de TD N°02

Raisonnement par Récurrence

Exercice 01 : Démontrer par **récurrence** que pour tout entier

$n \geq 1$:

1. $1 + 2 + 3 + \cdots.. + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots.. + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots.. + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
4. $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots.. + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Exercice 02: x est un réel positif.

Démontrer que pour tout entier naturel n, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$

Exercice 03: On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 3.$$

Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{-5}{2^n} + 6$.

Raisonnement par L'absurde

Exercice 04: Montrez en utilisant un raisonnement par l'absurde que :

1. $\forall n \in N, n^2 \text{ est pair } \Rightarrow n \text{ est pair}$
2. $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel ($\sqrt{2} \notin Q$)

Exercice 05: Montrez en utilisant un raisonnement par l'absurde que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : \sqrt{1+x^2} \neq 1 + \frac{x^2}{2}$$

Exercice 06 : Montrez en utilisant un raisonnement par l'absurde que :

1. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, ac \geq bc \text{ et } c > 0 \Rightarrow a \geq b$

Corrigé type de la Série de TD N°02

Raisonnement par Récurrence

Exercice 01:

Démonstration de la formule vue l'introduction, à l'aide du raisonnement par récurrence: Montre que pour tout entier naturel n

1. $P_n : 1+2+3+4+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

- Étape 1 : Initialisation

La proposition est vraie car (P_1) est vraie car $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$

La proposition est vraie car (P_2) est vraie car

$1+2 = \dfrac{2(2+1)}{2}$=3

On conçoit et on admet que si l'on sait démontrer que « (P_n) vraie » entraîne « (P_{n+1}) vraie », alors la proposition est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

- Étape 2 : Hérédité

Supposons donc que (P_n) est vraie pour un entier naturel n , c'est-à-dire que pour un entier naturel n :

$$P_n : \quad 1+2+3+4+...+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$P_{n+1} : \quad 1+2+3+4+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Comme (P_n) est vraie, alors dans la somme

$1+2+3+4+...+(n-1)+n$, on peut remplacer les n premiers termes par $\frac{n(n+1)}{2}$.

On obtient alors :

$$\underbrace{\underbrace{1+2+3+4+...+(n-1)+n}_{P_n}+(n+1)}_{P_{n+1}}=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$

$$=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Alors $1+2+3+4+...+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ est vraie, Donc (P_{n+1}) vraie

- Étape 3 : Conclusion

(P_n) est vraie pour tout entier naturel $n>0$, c'est-à-dire pour tout entier naturel n

$$1+2+3+4+\ldots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

2. $P_n : 1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- Étape 1 : Initialisation

La proposition est vraie car (P_1) est vraie car

$$1=\frac{1(1+1)(2+1)}{6}=1$$

La proposition est vraie car (P_2) est vraie car

$$1+2^2=\frac{2(2+1)(4+1)}{6}=5$$

On conçoit et on admet que si l'on sait démontrer que «(P_n) vraie » entraîne «(P_{n+1}) vraie », alors la proposition est vraie pour tout entier naturel $n\geq 1$.

- Étape 2 : Hérédité

Supposons donc que (P_n) est vraie pour un entier naturel n , c'est-à-dire que pour un entier naturel n :

$$P_n : \quad 1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$P_{n+1} : \quad 1^2+2^2+3^2+4^2+...+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Comme (P_n) est vraie, alors dans la somme

$1^2+2^2+3^2+4^2+...+(n-1)^2+n^2$, on peut remplacer les n premiers termes par $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

On obtient:

$$\underbrace{\underbrace{1^2+2^2+...+(n-1)^2+n^2}_{P_n}+(n+1)^2}_{P_{n+1}}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Alors

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

est vraie, Donc (P_{n+1}) est vraie

- Étape 3 : Conclusion

(P_n) est vraie pour tout entier naturel $n>0$, c'est-à-dire pour tout entier naturel n

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. $P_n : 1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

- Étape 1 : Initialisation

La proposition est vraie car (P_1) est vraie car $1=\dfrac{1(1+1)^2}{2}=1$

La proposition est vraie car (P_2) est vraie car

$$1+2^3=\frac{2^2(2+1)^2}{2}=9$$

On conçoit et on admet que si l'on sait démontrer que «$\left(P_n\right)$ vraie » entraîne «$\left(P_{n+1}\right)$vraie », alors la proposition est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

- Étape 2 : Hérédité

Supposons donc que $\left(P_n\right)$ est vraie pour un entier naturel n , c'est-à-dire que pour un entier naturel n :

$$P_n : \quad 1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$P_{n+1} : \quad 1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Comme $\left(P_n\right)$ est vraie, alors dans la somme :

$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3$, on peut remplacer les n premiers termes par $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

On obtient alors :

$$\underbrace{\underbrace{1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+(n-1)^3+n^3}_{P_n}+(n+1)^3}_{P_{n+1}}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3$$

$$=\frac{(n+1)^2\left[n^2+4n+4\right]}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Alors $1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+(n+1)^3=\dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ est vraie, Donc (P_{n+1}) vraie

- Étape 3 : Conclusion

(P_n) est vraie pour tout entier naturel $n>0$, c'est-à-dire pour tout entier naturel n

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

4. $P_n:\ (1 \text{ x } 2)+(2 \text{ x } 3)+\ldots+(n \text{ x } (n+1))=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

- Étape 1 : Initialisation

La proposition est vraie car (P_1) est vraie car :

$(1 \text{ x } 2)=\dfrac{1(1+1)(1+2)}{3}=2$

La proposition est vraie car (P_2) est vraie car :

$(1 \text{ x } 2)+(2 \text{ x } 3)=\dfrac{2(2+1)(2+2)}{3}=8$

On conçoit et on admet que si l'on sait démontrer que « (P_n) vraie » entraîne « (P_{n+1}) vraie », alors la proposition est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

- <u>Étape 2 : Hérédité</u>

Supposons donc que (P_n) est vraie pour un entier naturel n , c'est-à-dire que pour un entier naturel n :

$$P_n : \quad (1 \text{ x } 2)+(2 \text{ x } 3)+...+(n \text{ x } (n+1))=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$P_{n+1} : (1 \text{ x } 2)+(2 \text{ x } 3)+...+((n+1) \text{ x } (n+2))=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

Comme (P_n) est vraie, alors dans la somme

$(1 \text{ x } 2)+(2 \text{ x } 3)+(3 \text{ x } 4)+...+(n \text{ x } (n+1))$, on peut remplacer les n premiers termes par $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

On obtient alors :

$$\underbrace{\underbrace{(1 \text{ x } 2)+\ldots+(n \text{ x } (n+1))}_{P_n}+((n+1) \text{ x } (n+2))}_{P_{n+1}}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}+((n+1)(n+2))$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{3}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

Alors $(1 \text{ x } 2)+(2 \text{ x } 3)+(3 \text{ x } 4)+\ldots+((n+1)(n+2))=\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$ est vraie, Donc (P_{n+1}) vraie.

- Étape 3 : Conclusion

(P_n) est vraie pour tout entier naturel $n>0$, c'est-à-dire pour tout entier naturel n

$$(1 \text{ x } 2)+(2 \text{ x } 3)+(3 \text{ x } 4)+\ldots+(n \text{ x } (n+1))=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Exercice 02: x est un réel positif.

Démontrons que pour tout entier naturel n,

La proposition (P_n) : $(1+x)^n \geq 1+nx$

Méthode 01 : Raisonnement par récurrence

- Étape 1 : Initialisation

La proposition est vraie car (P_0) est vraie car :

$(1+x)^0 \geq 1+0.x \Rightarrow 1 \geq 1$

La proposition est vraie car (P_1) est vraie car : $(1+x)^1 \geq 1+x$

La proposition est vraie car (P_2) est vraie car :

$(1+x)^2 = x^2 + 2x + 1 \geq 1 + 2x$

On conçoit et on admet que si l'on sait démontrer que « (P_n) vraie » entraîne « (P_{n+1}) vraie », alors la proposition est vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$.

- Étape 2 : Hérédité

Supposons donc que (P_n) est vraie pour un entier naturel n , c'est-à-dire que pour un entier naturel n :

$$P_n : \quad (1+x)^n \geq 1+nx$$
$$P_{n+1} : \quad (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$

Comme (P_n) est vraie, alors dans l'inégalité (P_n) en multiplier les deux cotés par $(1+x)$ pour avoir le terme $(1+x)^{n+1}$.

On obtient alors :

$$\underbrace{\underbrace{(1+x)^n}_{P_n}.(1+x)}_{P_{n+1}} \geq (1+nx).(1+x)$$
$$\Leftrightarrow (1+x)^{n+1} \geq nx^2+(n+1)x+1 = nx^2+(n+1)x+1 \geq (n+1)x+1$$
$$\Rightarrow (1+x)^{n+1} \geq (n+1)x+1$$

Alors $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ est vraie, Donc (P_{n+1}) vraie.

- Étape 3 : Conclusion

(P_n) est vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$, c'est-à-dire pour tout entier naturel n

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Méthode 02 : Triangle magique

$(1+x)^1 = 1+1x$

$(1+x)^2 = 1+2x+1x^2$

$(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+1x^3$

$(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+1x^4$

$(1+x)^5 = 1+5x+10x^2+10x^3+5x^2+1x^5$

$\vdots \quad = 1+\dots x+\dots x^2+\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\vdots \quad = 1+\dots x+\dots x^2+\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$(1+x)^n = 1+nx+\dots\dots\dots\dots\dots\dots+nx^{n-1}+1x^5$

$(1+x)^n = 1+nx+\dots\dots\dots\dots\dots\dots+nx^{n-1}+1x^5$

$Alors\ (1+x)^n = 1+nx+\dots\dots\dots\dots\dots\dots+nx^{n-1}+1x^5 \geq 1+nx$

$Donc: \quad (1+x)^n \geq 1+nx$

Exercice 03: On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3.$$

Montre que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{-5}{2^n} + 6$

- Étape 1 : Initialisation

La proposition est vraie car (P_0) est vraie car :

$$u_0 = \frac{-5}{2^0} + 6 = 1 \Rightarrow u_0 = 1$$

On conçoit et on admet que si l'on sait démontrer que « (P_n) vraie » entraîne « (P_{n+1}) vraie », alors la proposition est vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$.

- Étape 2 : Hérédité

Supposons donc que u_n est vraie pour un entier naturel n , et montre que u_{n+1} est vraie:

$$P_n : \quad u_n = \frac{-5}{2^n} + 6$$

$$P_{n+1} : \quad u_{n+1} = \frac{-5}{2^{n+1}} + 6$$

Comme (P_n) est vraie, alors on va introduire la formule $u_n = \dfrac{-5}{2^n} + 6$ dans la formule $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + 3$, On obtient alors :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 = \frac{1}{2}\left(\frac{-5}{2^n} + 6\right) + 3 = \left(\frac{-5}{2^{n+1}} + 3\right) + 3 = \frac{-5}{2^{n+1}} + 6$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \frac{-5}{2^{n+1}} + 6$$

Alors $u_{n+1} = \frac{-5}{2^{n+1}} + 6$ est vraie, Donc (P_{n+1}) vraie

- Étape 3 : Conclusion

(P_n) est vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$, c'est-à-dire pour tout entier naturel n

$$u_n = \frac{-5}{2^n} + 6$$

Raisonnement par L'absurde

Exercice 04 : En utilisant un raisonnement par l'absurde que:

1. Montre que $\forall n \in N,\ n^2 \ est\ pair \ \Rightarrow n \ est\ pair$

Raisonnement par l'absurde,

$\forall n \in N,\ n \ est\ impair \Rightarrow n^2 \ est\ pair$

Supposons que :

$$n = 2.k + 1 \text{ est } impair \Rightarrow n^2 = (2.k+1)^2 = 4k^2 + 4.k + 1 = \underbrace{\underbrace{4(k^2+k)}_{nombre\ pair} + 1}_{\text{Nombre impair}}$$

$\Rightarrow$ *Une contradiction*

$$n = 2.k + 1 \text{ est } impair \Rightarrow n^2 = (2.k+1)^2 = 4k^2 + 4.k + 1 = \underbrace{\underbrace{4(k^2+k)}_{nombre\ pair} + 1}_{\text{Nombre impair}}$$

$\Rightarrow$ *Une contradiction*

Alors la formule : $\forall n \in N,\ n^2\ est\ pair\ \Rightarrow n\ \ est\ pair$ est vraie

2. $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel $\left(\sqrt{2} \notin \mathrm{Q}\right)$

Raisonnement par l'absurde, Supposons $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel $\left(\sqrt{2} \in \mathrm{Q}\right)$

On sait que les nombres de l'ensemble Q s'écrivent a/b

Telle que le $p\gcd(a,b)=1$ (i.e. : a et b sont premiers entre eux), $a,b\in\mathbb{N}^2$

Donc $\sqrt{2}=a/b$ avec $p\gcd(a,b)=1$

$\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(a/b\right)^2 \Rightarrow a^2=2.b^2$

➔ Donc a^2 est un nombre pair➔ $\boxed{a^2=2.b^2\ldots\ldots\ldots\ldots(1)}$

Sans oublier la proposition déjà montrée,

$\forall \mathrm{n}\in\mathbb{N},\mathrm{n}^2\ \textit{est pair}\ \Rightarrow n\ \textit{est pair}$

Donc $\forall \mathrm{n}\in\mathbb{N},\ \mathrm{a}^2\ \textit{est pair}\ \Rightarrow a\ \textit{est pair}$

Puisque a est un nombre pair ➔ $a=2.k$ $\boxed{a\quad pair\ldots\ldots\ldots(2)}$

➔ Donc $a^2=\left(2.k\right)^2=4.k^2$ ➔ $\boxed{a^2=2.k^2\ldots\ldots\ldots\ldots(3)}$

$(3)\ \textit{dans}\ (1)\Rightarrow a^2=2.b^2=4.k^2$

$\Leftrightarrow b^2=2.k^2\ \textit{donc}\ \ b^2\ \textit{est pair}\Rightarrow b\ \textit{est pair}$ $\boxed{b\quad pair\ldots\ldots\ldots(4)}$

De (2) *et* $(4)\Rightarrow$ *Les nombres* a,b *se divisent par deux,*

ce qui nous ramène à une contradiction, puisque $p\gcd(a,b)=1$

$\Rightarrow$ *Alors* $\sqrt{2}\in Q$

Donc : $\sqrt{2}$ *est un nombre irrationnel* est vraie.

Exercice 05 : En utilisant un raisonnement par l'absurde que :

$$\forall x \in \Re^* : \sqrt{1+x^2} \neq 1+\frac{x^2}{2}$$

Raisonnement par l'absurde, Montre que :

$$\forall x \in \Re^* : \sqrt{1+x^2} \neq 1+\frac{x^2}{2}$$

$$\sqrt{1+x^2} = 1+\frac{x^2}{2} \Rightarrow \left(\sqrt{1+x^2}\right)^2 = \left(1+\frac{x^2}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 1+x^2 = \left(1+x^2+\frac{x^4}{4}\right)$$

$$\Rightarrow 1+x^2 = 1+x^2+\frac{x^4}{4} \Leftrightarrow 0 = \frac{x^4}{4}$$

$\Rightarrow$ *Contradiction puisque* $x \in \Re^*$

Donc : $\forall x \in \Re^* : \sqrt{1+x^2} \neq 1+\frac{x^2}{2}$ est vraie.

Exercice 06 : En utilisant le raisonnement par l'absurde :

$\forall\ a,\ b,\ c \in \Re,\ \ a \le b \Rightarrow a + c \le b + c$

$a + c > b + c,\ soustraire\ le\ c\ des\ deux$ cotés

$\Rightarrow a > b\left(\ mais\ nous\ avons\ a \le b\right)$

→Alors une contradiction.

Donc : $\forall\ a,\ b,\ c \in \Re,\ \ a \le b \Rightarrow a + c \le b + c$ est vraie.

$\forall\ a,\ b,\ c \in \Re,\ \ \left(a.c \ge b.c\ et\ c > 0\right) \Rightarrow a \ge b$

$a < b,\ multiplions$ les deux cotés de l'inégalité par c

et $\left(\right.$ puisque $\left. c > 0\right)$ $\Rightarrow a.c < b.c\left(\right.$ mais nous avons $\left. a.c \ge b.c\right)$

Alors une contradiction.

Donc : $\forall\ a,\ b,\ c \in \Re,\ \ \left(a.c \ge b.c\ et\ c > 0\right) \Rightarrow a \ge b$ est vraie.

Chapitre III:

Applications et
Relations binaires

Rappel de Cours

Les Applications

Définition :

Soient E et F deux ensembles quelconques et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application

- **Application Injective :** Nous disons que f est une application **injective** ou est une **injection** si deux éléments quelconques de E ayant même image par f sont nécessairement égaux, c'est-à-dire: $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
- **Application Surjective:** Nous disons que f est une application **surjective** ou est une **surjection** si tout élément y de F possède au moins un antécédent par f, c'est-à-dire :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x) \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} On\ peut\ ecrire\ x \\ en\ fonction\ de\ y \end{matrix} \right\rangle$$

$$\Updownarrow$$

$$x = f^{-1}(y)$$

Application Bijective : Nous disons que f est une application **bijective** ou est une **bijection** si elle est à la fois injective et surjective.

Les Relations binaires

Relation d'équivalence: Pour que la relation soit une Relation d'équivalence, il faut satisfaire les conditions suivantes :

- Réféxive
- Symétrique
- Transitive

Relation d'ordre : Pour que la relation soit une Relation d'équivalence, il faut satisfaire les conditions suivantes :

- Réféxive
- Anti- Symétrique
- Transitive

Série de TD N°03

Les Applications

Exercice 01 : Voir si les fonctions suivantes sont des fonctions bijectives ?

- $\begin{cases} f:\ \Re \to \Re, \\ f(x) = x^2 \end{cases}$
- $\begin{cases} f:\ \Re \to \Re^+, \\ f(x) = x^2 \end{cases}$
- $\begin{cases} f:\ \Re \to \Re, \\ f(x) = x \end{cases}$
- $\begin{cases} f:\ \Re^+ \to \Re, \\ f(x) = 2x \end{cases}$
- $\begin{cases} f:\ \Re \to \Re, \\ f(x) = 8x + 354 \end{cases}$
- $\begin{cases} f:\ \Re \to \{14\}, \\ f(x) = 14 \end{cases}$
- $\begin{cases} f:\ \Re^+ \to \Re, \\ f(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

Exercice 02 : Soient f et *g* deux applications définie de *IN* dans *IN* par :

$$f(x)=2x \quad , \quad g(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2} & si\ \ x\,est\ \ pair \\ \dfrac{x-1}{2} & si\ \ x\,est\ impair \end{cases}$$

a) Est-ce que f , g sont surjectives ? Injectives ?

b) Calculer $f\circ g$, $g\circ f$

Exercice 03: Soient f et *g* deux applications définie de *IR* dans *IR* par :

$$f(x)=3x+5 \ \ , \ \ g(x)=\frac{1}{2}x-1$$

a) Montrer que f , g sont des applications bijectives.

b) Calculer les applications suivantes :

$f^{-1}, g^{-1}, (f^{-1}\circ g^{-1}), (g^{-1}\circ f^{-1})$

c) Montrer que $f\circ g$ et $g\circ f$ sont des applications bijectives.

d) Vérifier que : $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$ et $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

Exercice 04: Soit *f* une application définie par :

$$f:\ IR \rightarrow IR$$
$$x \mapsto f(x) = |x| + 2x$$

1. Montrer que *f* est bijective.
2. Déterminer l'application réciproque f^{-1}.

Les Relations binaires

Exercice 05: Soit $\Re$ une relation définie dans Z par :

$\forall (x, y) \in Z^2 : x \Re y \Leftrightarrow (x - y)$ est un multiple de 5.

a) Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.

b) Trouver l'ensemble quotient $Z/5Z$.

Exercice 06 : On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\boldsymbol{\rho}$,

$$(x, y)\rho(x', y') \Leftrightarrow x + y = x' + y'$$

1) Montrer que $\boldsymbol{\rho}$ est une relation d'équivalence.

2) Trouver la classe d'équivalence du couple $(0,0)$.

Exercice 07 :

1. Soit $\Re$ une relation dans IR^* définie par :

$$x \Re y \Leftrightarrow x.y > 0$$

a) Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.

b) Calculer l'ensemble des classes d'équivalence.

2. Soit $\Re'$ une autre relation dans IR définie par :

$$x \Re' y \Leftrightarrow x.y > 0$$

Montrer que $\Re'$ n'est pas une relation d'équivalence.

Exercice 08 : Soit $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x + 2}$ et soit $\boldsymbol{S}$ la relation dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\boldsymbol{x\, S\, y \Leftrightarrow f(x) = f(y)}$$

Montrer que $\boldsymbol{S}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 09: Soit $\Re$ une relation dans IR définie comme suit :

$$a \Re b \Leftrightarrow a^3 - b^3 \geq 0$$

a) Montrer que $\Re$ est une relation d'ordre.

b) Cette relation, est-elle d'ordre total ?

Exercice 10: Soit dans $\mathbb{R}^2$ la relation définie par

$$(x,y)\, S\, (x',y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y'.$$

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?

Corrigé type de la Série de TD N°03

Les Applications

Exercice 01 : Voir si les fonctions suivantes sont des fonctions bijectives ?

1. $\begin{cases} f : \Re \to \Re, \\ f(x) = x^2 \end{cases}$

La Surjectivité : $\forall y \in \Re, \exists x \in \Re, y = f(x)$

$$y = f(x) = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$$

Le domaine de définition de y : $y \in [0, +\infty[$

Mais d'après l'énoncé de l'exercice y est définie dans $\Re$, alors y n'est pas définie dans $\Re^-$ ce qui nous ramène à dire que *f(x) n'*est pas surjective.

L'injectivité $\forall x, x' \in \Re, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

$f(x) = f(x') \Leftrightarrow x^2 = x'^2 \Rightarrow x = \pm x'$: Donc il existe deux valeurs de x, Ce qui nous ramène à dire que *f(x) n'*est pas Injective.

Alors f(x) : ni surjective ni injective→f(x) n'est pas bijective

2. $\begin{cases} f : \Re \to \Re^+, \\ f(x) = x^2 \end{cases}$

<u>**La Surjectivité :**</u> $\forall y \in \Re^+, \exists x \in \Re, y = f(x)$

$$y = f(x) = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$$

Le domaine de définition de y : $y \in [0, +\infty[$

Le même domaine de définition de l'énoncé de l'exercice y est définie dans $\Re^+$, ce qui nous ramène à dire que *f(x)* est surjective.

<u>**L'injectivité**</u> $\forall x, x' \in \Re, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

$f(x) = f(x') \Leftrightarrow x^2 = x'^2 \Rightarrow x = \pm x'$: Donc il existe deux valeurs de x

Ce qui nous ramène à dire que *f(x) n'*est pas Injective.

Alors f(x) : est surjective et non injective→f(x) n'est pas bijective

3. $$\begin{array}{l} f:\ \Re \to \Re, \\ f(x) = x \end{array}$$

La Surjectivité : $\forall y \in \Re, \exists x \in \Re, y = f(x)$

$$y = f(x) = x \Rightarrow x = y$$

Il existe une valeur de y définie dans $\Re$, ce qui nous ramène à dire que *f(x)* est surjective.

L'injectivité $\forall x, x' \in \Re, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

$$f(x) = f(x') \Leftrightarrow x = x' \ :$$

Ce qui est identique à la définition, en peut dire que *f(x)* est Injective.

Alors f(x) : est surjective et injective→f(x) est bijective

4. $$\begin{cases} f:\ \Re^+ \to \Re, \\ f(x) = 2x \end{cases}$$

La Surjectivité : $\forall y \in \Re, \exists x \in \Re^+, y = f(x)$

$$y = f(x) = 2x \Rightarrow x = \frac{y}{2}$$

Si y=0, alors le x prend la valeur de zéro, mais le $x \in \Re^{+}$, ce qui nous ramène à dire que *f(x) n'*est pas surjective.

<u>L'**injectivité**</u> $\forall x, x' \in \Re, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

$$f(x) = f(x') \Rightarrow 2x = 2x' \Rightarrow x = x'$$

Ce qui est identique à la définition, en peut dire que *f(x)* est Injective.

Alors f(x) : n'est pas surjective et injective→f(x) n'est pas bijective

5. $\begin{cases} f : \Re \to \Re, \\ f(x) = 8x + 354 \end{cases}$

<u>**La Surjectivité :**</u> $\forall y \in \Re, \exists x \in \Re^{+}, y = f(x)$

$$y = f(x) = 8x + 354 \Rightarrow x = \frac{y - 354}{8}$$

Il existe une valeur de y définie dans $\Re$, ce qui nous ramène à dire que *f(x)* est surjective.

<u>L'**injectivité**</u> $\forall x, x' \in \Re, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

$$f(x) = f(x') \Leftrightarrow 8x + 354 = 8x' + 354 \Rightarrow x = x'$$

Ce qui est identique à la définition, en peut dire que *f(x)* est Injective.

Alors f(x) : est surjective et injective→f(x) est bijective

6. $f:\ \Re \to \{14\},$
$f(x) = 14$

La Surjectivité : $y = 14, \exists x \in \Re, y = f(x)$

$$y = f(x) = 14 \Rightarrow y = 14$$

Identique au domaine de définition y=14, ce qui nous ramène à dire que *f(x)* est surjective.

L'injectivité : $\forall x, x' \in \Re, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

$$f(x) = f(x') \Leftrightarrow 14 = 14$$

En peut pas écrire f(x) en fonction de x, en peut dire que *f(x) n'*est pas Injective.

Alors f(x) : est surjective et non pas injective→f(x) n'est pas bijective

7. $\begin{cases} f : \Re^{+} \to \Re, \\ f(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

<u>La Surjectivité :</u> $\forall y \in \Re, \exists x \in \Re^{+}, y = f(x)$

$$y = f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$$

Domaine de définition : $x \in \Re^{+}, y \in \Re$

Avec x=1/y ; sa domaine de définition est $y \in \Re^{+}$ problème de y=0, ce qui nous ramène à dire que *f(x) n'*est pas surjective.

<u>L'injectivité</u> : $\forall x, x' \in \Re^{+}, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

$$f(x) = f(x') \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{x'} \Rightarrow x = x'$$

En peut dire que *f(x)* est Injective.

Alors f(x) : injective et n'est pas surjective →f(x) n'est pas bijective

Exercice 02 : Soient f et *g* deux applications définie de *IN* dans *IN* par :

$$f(x) = 2x \quad , \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & si \;\; x \, est \;\, pair \\ \dfrac{x-1}{2} & si \;\; x \, est \; impair \end{cases}$$

a) **1ère partie :**

Pour la fonction $f(x) = 2x$

- **La Surjectivité** :

$$\forall y \in N, \exists x \in N, y = f(x)$$
$$y = f(x) = 2x \Rightarrow x = y/2$$

Donc il existe une solution, mais si y prend une valeur impaire implique que le prend des valeurs non naturelle. ce qui n'est pas logique puisque $x \in N$. Alors ***f(x) n'*est pas surjective.**

- L'**injectivité :** $\forall x, x' \in N, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

$f(x) = f(x') \Leftrightarrow 2x = 2x' \Rightarrow x = x'$: *f(x)* est une Fonction Injective.

Alors f(x) : injective et n'est pas surjective →f(x) n'est pas bijective

Pour la fonction $y = g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & si \;\; x \; est \; pair \\ \dfrac{x-1}{2} & si \;\; x \; est \; impair \end{cases}$

- **La Surjectivité** :

$$\forall y \in N, \exists x \in N, y = g(x)$$

$$y = g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & si \;\; x \; est \; pair \\ \dfrac{x-1}{2} & si \;\; x \; est \; impair \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 2y \\ 2y+1 \end{cases}$$

Deux valeur de x en fonction de y sans condition. Alors

***f(x) n'*est pas surjective.**

- L'**injectivité :** $\forall x, x' \in N, g(x) = g(x') \Rightarrow x = x'$

g(x) est une Fonction Injective.

Alors g(x) : injective et n'est pas surjective

→g(x) n'est pas bijective

b) Calculer $f \circ g \, , g \circ f$

$$(fog)(x) = \begin{cases} x & si \;\; x \; est \; pair \\ x-1 & si \;\; x \; est \; impair \end{cases}$$

$$(gof)(x)=\begin{cases} x & si\ \ x\ est\ pair \\ \dfrac{2x-1}{2} & si\ \ x\ est\ impair \end{cases}$$

<u>*Exercice 03:*</u> Soient f et *g* deux applications définie de *IR* dans *IR* par :

$$f(x)=3x+5\ \ ,\ \ g(x)=\frac{1}{2}x-1$$

a) Montre que f , g sont des applications bijectives. **ok**

b) Calculons les applications suivantes :

$f^{-1}, g^{-1}, (f^{-1}\circ g^{-1}), (g^{-1}\circ f^{-1})$

$$f(x)=3x+5,\ g(x)=\frac{1}{2}x-1$$

- $y=f(x)=3x+5 \Rightarrow x=\dfrac{y-5}{3}=f^{-1}(y)$
- $y=g(x)=\dfrac{1}{2}x-1=\dfrac{x-2}{2} \Rightarrow x=g^{-1}(y)=2y+2$

$$(f^{-1}\circ g^{-1})(x)=\left(g\circ f\right)^{-1}(y)=\left(\frac{3x+3}{2}\right)^{-1}\Rightarrow\left(g\circ f\right)^{-1}(y)=\frac{2y-3}{3}$$

-

$$(g^{-1}\circ f^{-1})(x)=(f\circ g)^{-1}(y)=\left(\frac{3x+4}{2}\right)^{-1}\Rightarrow(f\circ g)^{-1}(y)=\frac{2y-4}{3}$$

c) Montre que $f\circ g$ et $g\circ f$ sont des applications bijectives.

$$\left(g\circ f\right)(x)=\left(\frac{3x+3}{2}\right)$$

$$(f\circ g)(x)=\left(\frac{3x+4}{2}\right)$$

Vérifions que : $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$ et

$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

$(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$

d)

$$\begin{cases}(f\circ g)^{-1}=\left(\dfrac{3x+4}{2}\right)^{-1}=\dfrac{2y-4}{3}\\[2ex] g^{-1}\circ f^{-1}\Rightarrow\begin{cases}g^{-1}=2y+2\\ f^{-1}=\dfrac{y-5}{3}\end{cases}\Rightarrow g^{-1}\circ f^{-1}=2\left(\dfrac{y-5}{3}\right)+2=\dfrac{2y-4}{3}\end{cases}$$

$$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$$

$$\begin{cases} (g\circ f)^{-1}=\left(\dfrac{3x+3}{2}\right)^{-1}=\dfrac{2y-3}{3} \\ f^{-1}\circ g^{-1}\Rightarrow\begin{cases} g^{-1}=2y+2 \\ f^{-1}=\dfrac{y-5}{3}\end{cases}\Rightarrow f^{-1}\circ g^{-1}=\dfrac{(2y+2)-5}{3}=\dfrac{2y-3}{3}\end{cases}$$

<u>Exercice 04:</u> Soit *f* une application définie par :

$$f:\ IR\to IR$$

$$x\ \mapsto f(x)=|x|+2x=\begin{cases}3x & si\ x\geq 0\\ x & si\ x<0\end{cases}$$

a. Montre que *f* est bijective.

Application Surjective

$$\forall y\in F,\exists x\in E, y=f(x)$$

$$y=\begin{cases}3x & si\ x\geq 0\\ x & si\ x<0\end{cases}\Rightarrow x=\begin{cases}\dfrac{y}{3} & si\ x\geq 0\\ \mathrm{y} & si\ x<0\end{cases}$$

Donc il existe une solution, Alors *f(x)* est surjective.

Application Injectives

$$\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

$$f(x) = f(x') \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 3x' & si\ x \geq 0 \\ x = x' & si\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' & si\ x \geq 0 \\ x = x' & si\ x < 0 \end{cases}$$

f(x) est une Fonction Injective.

Alors la fonction est bijective

b. Déterminons l'application réciproque f^{-1}.

$$y = \begin{cases} 3x & si\ x \geq 0 \\ x & si\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{y}{3} & si\ x \geq 0 \\ \mathrm{y} & si\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}|y|$$

Les Relations binaires

Exercice 05: Soit $\Re$ une relation définie dans Z par :

$$\forall(x,y)\in Z^2 : x\Re y \Leftrightarrow (x-y) \text{ est un multiple de 5.}$$

a) Montre que $\Re$ est une relation d'équivalence.

$\text{Re}\mathit{lation\ d'équivalence}:$

$\textit{Réféxive}:\ Soit\ x\in Z \qquad x - x = 5k \Leftrightarrow\ 0=5k \quad Donc\ x\ \Re\ x$

$\textit{symétrique}:\ Soitent\ x,\ y\in Z:$

$$x\ \Re\ y:\ x - y = 5k,\ multiplions\ par\ -1 \Rightarrow y - x = 5k'$$

$$Donc\ \ y\ \Re\ x$$

$$Transitive:\begin{cases} x\ \Re\ y:\ x - y = 5k..............(1)\\ y\ \Re\ z:\ y - z = 5k'..............(2)\end{cases}$$

$(1)+(2)\Rightarrow x - z = 5k'' \qquad Donc\ x\ \Re\ z$

b) L'ensemble quotient de $Z/5Z$.

$$\overset{*}{x}=\{y\in Z|\ \ y\Re x\}$$

$$\overset{*}{0}=\{y\in Z|\ \ y\Re 0\}\Rightarrow y-0=5k\Rightarrow y=5k$$

$$\overset{*}{1}=\{y\in Z|\ \ y\Re 1\}\Rightarrow y-1=5k\Rightarrow y=5k-1$$

$$\overset{*}{2}=\{y\in Z|\ \ y\Re 2\}\Rightarrow y-2=5k\Rightarrow y=5k-2$$

$$\overset{*}{3}=\{y\in Z|\ \ y\Re 3\}\Rightarrow y-0=5k\Rightarrow y=5k-3$$

$$\overset{*}{4}=\{y\in Z|\ \ y\Re 4\}\Rightarrow y-0=5k\Rightarrow y=5k-4$$

Exercice 06 : On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation ρ ,

$$(x,y)\rho(x',y') \Leftrightarrow x+y=x'+y'$$

1) Montre que ρ est une relation d'équivalence.

$$(x,y)\rho(x',y') \Leftrightarrow x+y=x'+y'$$

$Relation\ d'équivalence:$

$Réféxive:\ Soit\ x\in\Re \qquad x+y=x+y \quad Donc\ x\ \Re\ y$

$symétrique:\ Soitent\ x,\ y\in\Re:$

$$(x,y)\Re(x',y'):\ x+y=x'+y' \Leftrightarrow x'+y'=x+y$$

$$Donc\ \ (x',y')\Re(x,y)$$

$$Transitoire:\begin{cases}(x,y)\Re(x',y') \Leftrightarrow x+y=x'+y'..............(1)\\(x',y')\Re(z,u) \Leftrightarrow x'+y'=z+u.............(2)\end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow x+y=z+u \qquad Donc\ (x,y)\Re(z,u)$

2) Trouver la **classe d'équivalence** du couple (0,0) .

$$C(x,y)=\{(x',y')\in\Re\ |\ x+y=x'+y'\}$$

$$C(x,y)=\{(x',y')\in\Re\ |\ f(x,y)=f(x',y')\}$$

$$f(x,y)=x+y$$

$$Alors\ \ f(0,0)=x+y=x'+y'=0 \Rightarrow x'+y'=0 \Rightarrow x'=-y'$$

$$Ensemble=\{(1,-1),(2,-2),(3,-3),....\}$$

Exercice 07 :

1. Soit $\Re$ une relation dans IR^* définie par :

$$x \Re y \Leftrightarrow x.y > 0$$

a) Montre que $\Re$ est une relation d'équivalence.

$$\text{Re}\textit{lation d'équivalence} : x \Re y \Leftrightarrow x.y > 0$$

$$\textit{Réféxive} : \ Soit\ x \in \Re \qquad x.x = x^2 > 0 \quad Donc\ x\ \Re\ x$$

$$\textit{symétrique} : \ Soitent\ x,\ y \in \Re :$$

$$x\ \Re\ y :\ x.y > 0 \Rightarrow y.x > 0 \ \ Donc\ \ y\ \Re\ x$$

$$Transitive : \begin{cases} x\ \Re\ y :\ x.y > 0..............(1) \\ y\ \Re\ z :\ y.z > 0..............(2) \end{cases}$$

$$(1)*(2) \Rightarrow \frac{x.y^2.z}{y^2} > \frac{0}{y^2} \quad \Leftrightarrow \quad x.z > 0 \qquad Donc\ x\ \Re\ z$$

b) L'ensemble des classes d'équivalence.

$$C(x) = \{(y) \in \Re \mid x \; \Re \; y\}$$

$$C(x) = \{(y) \in \Re \mid x.y > 0\}$$

$$Alors \quad f(x,y) = x.y > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \quad et \quad y > 0 \\ \quad ou \\ x < 0 \quad et \quad y < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in \left]0, +\infty\right[\quad et \quad y \in \left]0, +\infty\right[\\ \quad ou \\ x \in \left]-\infty, 0\right[\quad et \quad y \in \left]-\infty, 0\right[\end{cases}$$

$$L'esnemble = \{..., (-2,-2), (-1,-1), (1,1), (2,2), ...\}$$

2. Soit $\Re'$ une autre relation dans IR définie par :

$$x \Re' y \Leftrightarrow x.y > 0$$

$\Re'$ n'est pas une relation d'équivalence puisque nous travaillons sur IR (Donc c'est possible que x et y prend la valeur zéro).

Exercice 08 : Soit $f : \Re \to \Re$ définie par $f(x) = x^3 - 3x + 2$ et soit S la relation dans $\Re$ définie par : $x \; S \; y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

- Montre que S est une relation d'équivalence.

Relation d'équivalence : $x \Re y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x^3 - 3x = y^3 - 3y$

Réféxive : Soit $x \in \Re$ $\quad x^3 - 3x = x^3 - 3x \quad$ Donc $x \Re x$

symétrique : Soitent $x, y, z \in \Re$:

$$x \Re y : x^3 - 3x = y^3 - 3y \Rightarrow y^3 - 3y = x^3 - 3x \quad Donc \ y \Re x$$

$$Transitive : \begin{cases} x \Re y : x^3 - 3x = y^3 - 3y ....(1) \\ y \Re z : y^3 - 3y = z^3 - 3z ....(2) \end{cases}$$

$(1) + (2) \Rightarrow x^3 - 3x = z^3 - 3z \qquad$ Donc $x \Re z$

Puisque les trois conditions sont satisfait, donc on peut dire que $x \Re y$ est une Relation d'équivalence

Exercice 09: Soit $\Re$ une relation dans IR définie comme suit :

$$a \Re b \Leftrightarrow a^3 - b^3 \geq 0$$

a) Montre que $\Re$ est une relation d'ordre.

$\text{Relation } d'\acute{e}quivalence : a\,\Re\, b \Leftrightarrow a^3 - b^3 \geq 0$

$R\acute{e}f\acute{e}xive :\ Soit\ a \in \Re \qquad a^3 - a^3 \geq 0 \quad Donc\ a\ \Re\ a$

$Anti-sym\acute{e}trique :\ Soitent\ \mathrm{a},\ \mathrm{b}, c \in \Re :$

$$\left.\begin{array}{l} a\,\Re\, b \Leftrightarrow a^3 - b^3 \geq 0 \Rightarrow a^3 \geq b^3 \Leftrightarrow a \geq b \\ b\,\Re\, a \Leftrightarrow b^3 - a^3 \geq 0 \Rightarrow b^3 \geq a^3 \Leftrightarrow b \geq a \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow a = b \Rightarrow \text{Relation } Anti-sym\acute{e}trique$$

$$Transitive : \begin{cases} a\,\Re\, b \Leftrightarrow a^3 - b^3 \geq 0 ....(1) \\ b\,\Re\, c \Leftrightarrow b^3 - c^3 \geq 0 ....(2) \end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow a^3 - c^3 \geq 0 \qquad Donc\ a\ \Re\ c$

b) Cette relation, est-elle d'ordre total ?

Exercice 10: Soit dans $\mathbb{R}^2$ la relation définie par

$$(x,y)\ S\ (x',y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y'$$

Montre qu'il s'agit d'une relation d'ordre. L'ordre est-il total :

$\text{Re}\textit{lation d'ordre}:$

$\textit{Réféxive}:\ Soit\ x \in \Re \qquad (x,y)S(x,y) \Leftrightarrow x \leq x\ et\ y \leq y$

$Donc\ x\ \Re\ y$

$\textit{Anti}-\textit{symétrique}:\ Soitent\ \text{x, y} \in \Re$

$$\left.\begin{array}{l} a(x,y)S(x',y'):\ x \leq x'\ et\ y \leq y' \\ (x',y')S(x,y):\ x' \leq x\ et\ y' \leq y \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow x = x'\ et\ y = y' \Rightarrow \text{Relation } \textit{Anti}-\textit{symétrique}$

$\textit{Transitoire}:\ \text{x, y}, z \in \Re\ et\ \text{x', y'}, z' \in \Re:$

$$\begin{cases} a(x,y)S(x',y'):\ x \leq x'\ et\ y \leq y' \text{..............(1)} \\ a(x',y')S(z,z'):\ x' \leq z\ et\ y' \leq z' \text{..............(2)} \end{cases}$$

$(1)*(2) \Rightarrow x \leq z\ et\ y \leq z'. \qquad Donc\ (x,y)\Re(z,z)$

Chapitre IV:

Les Fonctions réelles à une variable réelle

Rappel de Cours

Domaine de définition:

1) $Arc\sin(x)$ définie sur $[-1,1]$

2) $Arc\cos(x)$ définie sur $[-1,1]$

3) $Arctg(x)$ définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

4) $Argsh(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ définie sur $[1,+\infty[$

5) $Argch(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ définie sur $\Re$

6) $Argth(x)=\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ définie sur $]-1,1[$

7) $Sh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $\quad Ch(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $\quad Th(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

Les limites:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\mathrm{e}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg(x)}{x}=1$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=1$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$

7) $\lim\limits_{x\to 0^{+}}x^{x}=1$

8) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$

9) $\lim\limits_{x\to 0+}x\ln(x)=0$

10) $\lim\limits_{x\to -\infty}xe^{x}=0$

11) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$

12) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$

La continuité d'une fonction :

$$\lim_{x \xrightarrow[<]{>} a} f(x)=f(a)$$

La dérivabilité d'une fonction :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Note :

Rappel :

Si f(x) est dérivable ➔f(x) est continue

La réciproque n'est pas toujours valable.

Règle de l'Hôpital :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Théorème des accroissements finis

Soit f une application de l'intervalle $[a,\ b]$ dans $\Re$ vérifiant les conditions suivantes :

1. f est continue sur $[a,\ b]$,
2. f est dérivable sur $]a,\ b[$.

Alors il existe $c \in]a,\ b[$ tel que

$$f(b)-f(a)=(a-b)f'(c)$$

Théorème de Rolle

Soit f une fonction numérique sur $[a,\ b]$ et dérévable sur $]a,\ b[$ telle que $f(b)=f(a)$

Alors, il existe un point c de tel que $f'(c)=0$

Développement de Maclaurin

Définition : On appelle Polynôme de Maclaurin d'une fonction $f\left(x\right)$ qui admet des dérivées de tous ordres en x=0, l'expression :

$$m_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}\left(0\right)}{k!}x^k$$

Ou $f^{(k)}\left(0\right)$ exprime la k$^{\text{ième}}$ dérivée de la fonction $f\left(x\right)$ en x=0.

Définition : On appelle Polynôme de Taylor d'une fonction $f\left(x\right)$ qui admet des dérivées de tous ordres en x=a, l'expression

$$t_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}a}{k!}\left(x-a\right)^k$$

Ou $f^{(k)}\left(a\right)$ exprime la k$^{\text{ième}}$ dérivée de la fonction $f\left(x\right)$ en x=a.

Série de TD N°04

Les Fonctions

Exercice 01 : Donner **le domaine de définition** des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)$

2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}$

3) $f(x)=x^x$

4) $f(x)=Arc\sin\left(1-x^2\right)$

5) $f(x)=\sqrt{-x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

6) $f(x)=\sqrt{\cos(2x)}$

7) $f(x)=\sqrt{tg(x)}$

8) $f(x)=\log\left(\dfrac{1+x}{3-x}\right)$

9) $f(x)=th\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

10) $f(x)=arctg\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)$

11) $f(x)=\arg sh(3x+2)$

12) $f(x)=\arg th\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$

Exercice 02 : calculer **les limites** suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{1-x}$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(2x)}{x}$

6) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-sin(x)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

9) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1}{x}\,log\dfrac{(e^x-1)}{x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x sin(x)}{1-\cos(x)}$

11) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin(x)-sin(2x)}{x^2}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{\sin(x)}$ 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{|x|}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}$ 16) $\lim\limits_{x\to 0}\log\dfrac{(e^x-1)}{x}$

Exercice 03 : Etudier **la continuité** des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si\ x\leq 2 \\ 5-x & si\ x>2 \end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} -2x-3 & si\ x\leq -1 \\ x & si\ -1<x\leq 1 \\ -3x & si\ x>1 \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} 0 & si\ \ x<0 \\ x & si\ \ 0\leq x<1 \\ -x2+4x-2 & si\ \ 1\leq x<3 \\ 4-x & si\ \ x\geq 3 \end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & si\ \ x\neq 2 \\ 3 & si\ \ x=2 \end{cases}$ 6) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si\ \ x<0 \\ x-1 & si\ \ x\geq 0 \end{cases}$

Exercice 04: Peut-on **prolonger par la continuité** (au point $x_0=0$) les fonctions suivantes :

- $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$
- $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$
- $f(x)=x.\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
- $f(x)=\dfrac{1}{x}.\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
- $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\ e^{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}$
- $f(x)=\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}$

<u>Exercice 05 :</u> Etudier la **continuité et la dérivabilité** des fonctions suivantes

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x^2e^{-x^2} & si \quad |x|\le 1 \\ \dfrac{1}{e} \quad si \quad |x|>1 & \end{cases}$$

$$f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{e^{x\sin x}-\cos\left(2x\right)}{x} & si\ \ x\neq 0 \\ 0 & si\ \ x=0 \end{cases}$$

$$f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{\left|x^2+x\right|}{x+1} & si\ \ x\neq -1 \\ -1 & si\ \ x=-1 \end{cases}$$

Exercice 06 : Soit $f(x)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x^3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & si\ x\neq 0 \\ 0 & si\ x=0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa fonction dérivée.
2. Ecrire $f'(x)$ sous sa forme prolongée.

Exercice 07 : En utilisant **la Règle d'Hôpital**, calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\log x}{e^x-e}$

3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$

5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^p}$

6) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x\ln(x)-x+1}{(x-1)\ln(x)}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos(x))\,\mathrm{ctan}(x)$

Exercice 08 :

1- En utilisant **le théorème accroissement fini**, montrer que :

* $\forall x , y \in IR \quad ; \ \left|\sin x - \sin y\right| \le \left|x - y\right|$

* $\forall x \in IR^+ \quad ; \ 0 \le \log\left(1+x\right) < x$

* $\forall x \in IR \quad : e^x > 1 + x$

* $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[\left(x+1\right).e^{\frac{1}{x+1}} - x.e^{\frac{1}{x}}\right] = 1$

* $Pour\ tout\ 0 < \alpha < 1,\ et\ i \in IN \quad : \dfrac{\alpha}{\left(i+1\right)^{1-\alpha}} \le \left(i+1\right)^{\alpha} - i^{\alpha} \le \dfrac{\alpha}{\mathrm{i}^{1-\alpha}}$

* $\forall x \in IR^+ \quad ; \ \dfrac{x}{x^2+1} \le Arctg\left(x\right) \le x$

* $0 \le x < 1 \ ; \ x \le Arc\sin\left(x\right) \le \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ tq: $Arc\sin\left(x\right)\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

* $\forall x \in IR^+ \;;\; \dfrac{1}{x+1} < \log(1+x) - \log(x) < x$

* $\forall x \in IR \;:\; |\sin(x)| \leq |x|$

* $\forall x \in IR \;:\; 0 \leq Arctg(x+1) - Arctg(x) \leq 1$

2- a) En utilisant le **théorème des valeurs intermédiaires** monter que l'équation $xe^{\sin x} = \cos x$

Admet au moins une solution dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

b) Par le **théorème de Rolle**, montrer que cette solution est unique

Exercice 09 : Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition et calculer **la dérivée** :

$f_1(x) = ln(\sqrt{x^2+1})$ $\qquad f_2(x) = \sqrt{1 + x^2 cos^2(x)}$

$f_3(x) = \dfrac{exp\left(\dfrac{1}{x}\right) - 1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\qquad f_4(x) = ln(\dfrac{1+sin(x)}{1-sin(x)})$

$$f_5(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad\qquad f_6(x) = \frac{sin(x^3+1)}{cos(2x+1)}$$

Exercice 10 :

1-Calculer les dérivées n[ièmes] des fonctions :

$$f(x) = xe^x \qquad f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad f(x) = x^2 \sin x$$

2-Montrer que la dérivée n[ième] de la fonction f(x) :

$$f : \left]-1,1\right[\to IR \text{ définie par } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$s'écrit \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{\left(1-x^2\right)^{n+\frac{1}{2}}}, \forall x \in \left]-1,1\right[\quad ou \quad P_n(x)$$

est le polynome de degré n

Exercice 11 :

1- En utilisant le **Développement de Mac Laurin**, donner le développement des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sin x \qquad f(x) = \cos x \qquad f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \qquad f(x) = e^x$$

2- Calculer $\sqrt{e}$ avec 3 chiffres exacts en utilisant le D de Mac Laurin

En utilisant **le développement limité** quand $x \to 0$. Calculer les fonctions suivantes

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \qquad h(x) = \frac{\sin x - tgx}{x(\cos x - 1)} \qquad g(x) = \frac{e^x \sin x - x}{3x^2 + x^5}$$

Corrigé type de la Série de TD N°04

Exercice 01: Domaine de définition:

$$1)\ f(x)=\ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)\Rightarrow 1-x^2>0\Leftrightarrow x\in\left]-1,1\right[$$

$$2)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}\Rightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ 2-x\geq 0\\ \sqrt{x}+\sqrt{2-x}\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ x\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow x\in[0,2]$$

$$3)\ f(x)=x^x=e^{\ln\left(x^x\right)}=e^{x\ \ln(x)}\Rightarrow x>0\Leftrightarrow x\in\left]0,+\infty\right[$$

$$4)\ f(x)=Arc\sin\left(1-x^2\right)\Rightarrow -1\leq 1-x^2\leq 1\Leftrightarrow -1\leq x^2-1\leq 1$$

$$\Rightarrow 0\leq x^2\leq 2\Leftrightarrow x\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$$

$$5)\ f(x)=\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}\Rightarrow\begin{cases}-x\geq 0\\ 1-x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leq 0\\ x<1\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,0\right]$$

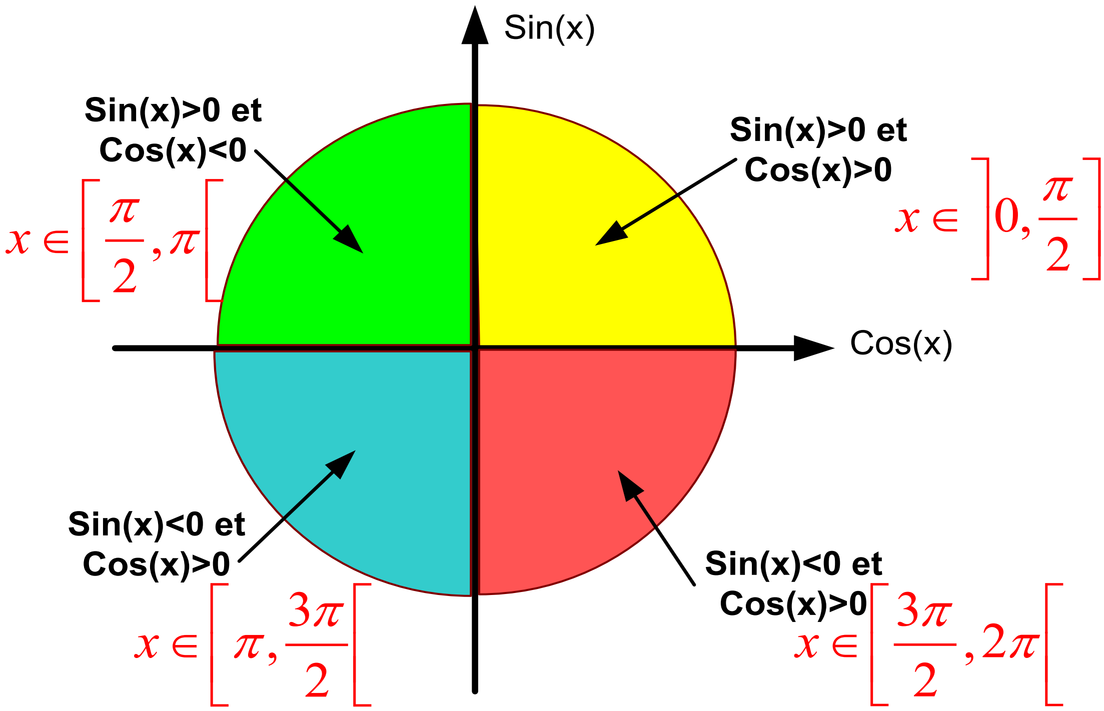
$$6)\ f(x)=\sqrt{\cos(2x)} \Rightarrow \cos(2x)\geq 0 \Rightarrow \frac{-\pi}{2}\leq 2x\leq\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{-\pi}{4}\leq x\leq\frac{-\pi}{4} \Rightarrow x\in\left[\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$$

$$7)\ f(x)=\sqrt{tg(x)}=\sqrt{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}} \Rightarrow \begin{cases}\sin(x).\cos(x)\geq 0\\ \cos(x)\neq 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sin(x)\geq 0\ et\ \cos(x)>0\\ \qquad Ou\\ \sin(x)\leq 0\ et\ \cos(x)<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow x\in[0,\pi/2[\cup[\pi,3\pi/2[$$



Alors le domaine de définition est $\Rightarrow x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$

Une autre méthode pour trouver le domaine de définition :

$$Puisque \begin{cases} \sin(x).\cos(x) \geq 0 \\ \cos(x) \neq 0 \end{cases}$$

$0 \qquad \pi/2 \qquad \pi \qquad 3\pi/2 \qquad 2\pi$

Cos(x)	+	-	-	+
Sin(x)	+	+	-	-
$\sin(x).\cos(x) > 0$	+	-	+	-

Alors le domaine de définition est $\Rightarrow x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$

$$8)\ f(x)=\log\left(\frac{1+x}{3-x}\right)\Rightarrow(1+x)(3-x)>0\Rightarrow x\in\left]-1,3\right[$$

$$9)\ f(x)=th\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)=\frac{e^{\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}-e^{-\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}}{e^{\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}+e^{-\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}}\Rightarrow\begin{cases}e^{\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}+e^{-\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}\neq 0\\ x^2+1\neq 0\end{cases}$$

$$\textit{les deux conditions sont toujours conclues}\quad\Rightarrow x\in\Re$$

Exercice 02 : Calcul des limites:

$$1)\ \lim_{x\xrightarrow[<]{>}1}\frac{x}{1-x}=\pm\infty$$

$$2)\lim_{x\to1}\frac{x}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}=\lim_{x\to1}\left(\frac{-x}{x-1}+\frac{3}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{-1}{x-1}\left(x-\frac{3}{x^2+x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x-1}\left(\frac{x^3+x^2+x-3}{x^2+x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-1}{x-1}\left(\frac{(x-1)(x^2+2x+3)}{x^2+x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{-(x^2+2x+3)}{x^2+x+1}\right)=-2$$

$$3)\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{4x^3+2x^2-2x-1}=\frac{1}{4}$$

$$4)\lim_{x\to 2}\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)}.\left[\frac{1}{x(x-2)}-\frac{1}{x-1}\right]$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)}.\left[\frac{-x^2+3x-1}{x(x-1)(x-2)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}.\left[\frac{-x^2+3x-1}{x(x-1)}\right]=+\infty$$

$$Alors \qquad \lim_{x\xrightarrow[<]{>}2}\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-3x+2}=\pm\infty$$

$$5)\lim_{x\to 0}\frac{tg(2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}.\frac{2}{\cos(2x)}=2$$

$$6)\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin(x)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2};on\ pose\ y=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-y,$$

$$si\ x\to\frac{\pi}{2}\Rightarrow y\to 0,$$

$$Donc\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin(x)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}=\lim_{y\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{y^2}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos(y)}{y^2}\cdot\frac{1+\cos(y)}{1+\cos(y)}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos^2(y)}{y^2}\cdot\frac{1}{1+\cos(y)}$$

$$=\lim_{y\to 0}\underbrace{\left(\frac{\sin(y)}{y}\right)^2}_{+1}\cdot\frac{1}{1+\cos(y)}=\frac{1}{2}$$

$$Alors\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin(x)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}=\frac{1}{2}$$

$$7)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}\cdot\frac{\sqrt{x^2+b^2}+b}{\sqrt{x^2+b^2}+b}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a^2}+a}{\sqrt{x^2+a^2}+a}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+b^2}+b}{\sqrt{x^2+a^2}+a}=\frac{b}{a}$$

$$Alors\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}=\frac{b}{a}$$

$$8)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt[3]{x^2+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+1\right)^{1/2}-1}{\left(x^2+1\right)^{1/3}-1}; on\ pose\ que :$$

$$y=\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{6}}\Rightarrow\begin{cases}y^6=\left(x^2+1\right)\\ y^3=\left(x^2+1\right)^{1/2}, \quad si\ x\longrightarrow 0\Rightarrow y\longrightarrow 1,\\ y^2=\left(x^2+1\right)^{1/3}\end{cases}$$

$$Alors=\lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^2-1}=\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)\left(y^2+y+1\right)}{(y-1)(y+1)}=\lim_{y\to 1}\frac{\left(y^2+y+1\right)}{(y+1)}=\frac{3}{2}$$

$$Alors \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt[3]{x^2+1}-1}=\frac{3}{2}$$

$$9)\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log\left(\frac{e^x-e^0}{x-0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log\left(\left(e^x\right)'\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(e^x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\log(e)}{x}=1$$

$$Alors \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=1$$

$$10)\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}.\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x)}{\sin^2(x)}.(1+\cos(x))$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x)}{\sin^2(x)}.(1+\cos(x))$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)}.(1+\cos(x))$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{1}}.(1+\cos(x))=2$$

Alors $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}=2$

$$11)\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{x}{x^2}+\sqrt{\frac{x}{x^2}}}}}{\sqrt{1+1/x}}=1$$

$$12)\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\sin(2x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-2\sin(x).\cos(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\xrightarrow[<]{>}0}\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{1}.\frac{1-2\cos(x)}{x}=\mp\infty$$

$$13)\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)/e^x}{\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\underset{1}{\frac{e^x-1}{x}}.\underbrace{\frac{x}{\sin(x)}}_{1}.\frac{1}{e^x}=1$$

$$14)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{|x|}.\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{|x|}.\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0+}x=0\\[2ex]\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0-}-x=0\end{cases}$$

$$15)\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}\cdot\frac{\sqrt{1+\cos(x)}}{\sqrt{1+\cos(x)}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x).\cos(x)}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}.\sqrt{1+\cos(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x).\cos(x)}{\sin(x)}.\sqrt{1+\cos(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}2\cos(x)\sqrt{1+\cos(x)}=2\sqrt{2}$$

Alors $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}=2\sqrt{2}$

$$16)\lim_{x\to 0}\log\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\log\left(\frac{e^x-e^0}{x-0}\right)=\lim_{x\to 0}\log\left(e^x\right)'=\lim_{x\to 0}\log\left(e^x\right)=1$$

Exercice 03 : Etude de **la continuité** des fonctions suivantes :

$$\lim_{x \xrightarrow[<]{>} a} f(x) = f(a)$$

$$1)\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si\ x \leq 2 \\ 5 - x & si\ x > 2 \end{cases}$$

Domaine de définition $\Re$,

Par l'application de la regle de continuité, *on trouve que* :

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2}(5 - x) = 3 \\ f(2) = (2^2 - 1) = 3 \end{cases}$$

Donc $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$, *Alors* $f(x)$ *est continue au* $x_0 = 2$

$$2)\ f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & si\ x \leq -1 \\ x & si\ -1 < x \leq 1 \\ -3x & si\ x > 1 \end{cases}$$

Domaine de définition $\Re$,

Par l'application de la regle de continuité, on trouve que :

Pour $x_0 = \text{-}1$:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}\left(x\right) = -1 \\ f(-1) = \left(-2(-1)-3\right) = -1 \end{cases}$$

Donc $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1)$, *Alors* $f(x)$ *est continue au* $x_0 = \text{-}1$

Pour $x_0 = +1$:

$$\lim_{x\to +1} f(x) = f(+1) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to +1} f(x) = \lim\limits_{x\to +1}\left(3x\right) = 3 \\ f(+1) = \left(+1\right) = +1 \end{cases}$$

Donc $\lim\limits_{x\to +1} f(x) \neq f(+1)$,

Alors $f(x)$ *n'est pas continue au* $x_1 = +1$

Exercice 04 : **Prolongement par la continuité** (au point $x_0 = 0$) des fonctions suivantes:

1) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

Domaine de définition $\Re^*$,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{1}{1+e^{+\infty}} = 0 \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{1}{1+e^{-\infty}} = 1 \end{cases}$$

Alors, on ne peut pas prolonger la continuité de la f^{ct} $f(x)$ *au* $x_0 = 0$

2) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

Domaine de définition $\Re^*$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1;$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

$3)\ f(x) = x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Leftrightarrow \ -x \ \leq x.\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

$$\Rightarrow \ \underbrace{-\lim_{x\to 0} x}_{0} \ \leq \lim_{x\to 0} x.\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \underbrace{\lim_{x\to 0} x}_{0}$$

Domaine de définition $\Re^*$; $f(x) = \begin{cases} x \ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

$4)(x) = \frac{1}{x}.\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Leftrightarrow \ -\frac{1}{x} \ \leq x.\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \ \underbrace{-\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}}_{-\infty} \ \leq \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}.\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}}_{+\infty}$$

On ne *peut pas prolonger la continuité de cette fonction*

$5)\ f(x)=\frac{1}{x^2}\ e^{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}$

changement de variable $y=\frac{1}{x^2}$, *Alors si* $x\to 0\Rightarrow y\to+\infty,$

Donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ e^{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty} y\ e^{-y}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^y}{y}}=0$

Domaine de définition $\Re^*$,; $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}\ e^{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} & si\ x\neq 0\\ 0 & si\ x=0\end{cases}$

$6)(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)}=e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$

$\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}=e$

Domaine de définition $x\in\Re^*$; $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}} & si\ x\neq 0\\ \mathrm{e} & si\ x=0\end{cases}$

Exercice 05 : Etude da la **continuité et la dérivabilité** des fonctions suivantes :

1-

$$f(x)=\begin{cases} x^2e^{-x^2} & si \quad |x|\le 1 \\ \frac{1}{e} \quad si \quad |x|>1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\begin{cases} x^2e^{-x^2} & si \quad x\in[-1,+1] \\ \frac{1}{e} \quad si \quad x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[\end{cases}$$

Domaine de définition est $\Re$;

La continuité :

$$f(x)=\begin{cases} x^2e^{-x^2} & si \quad x\in[-1,+1] \\ \frac{1}{e} & si \quad x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[\end{cases} \qquad \lim_{x\to a} f(x)=a$$

$$\left.\begin{aligned} x_0=-1: \quad & \lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\left(x^2e^{-x^2}\right)=\frac{1}{e} \\ x_0'=-1: \quad & \lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(x^2e^{-x^2}\right)=\frac{1}{e} \end{aligned}\right\}$$

Alors $f(x)$ *est continue au* -1 *et* $+1$

La dérivabilité : On revient à la définition, et on cherche si le taux d'accroissement admet une limite en x_0.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

$x_0 = \pm 1$:

$$\lim_{x \to \pm 1} \frac{f(x)-f(-1)}{x \mp 1} = \lim_{x \to \pm 1} \frac{x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{e}}{x \mp 1}$$

$$= \lim_{x \to \pm 1} \frac{\left(x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{e}\right)'}{(x \mp 1)'} = \lim_{x \to \pm 1} 2x.\left(1-x^2\right).e^{-x^2} = 0$$

Lorsque $x \to x_0$. La fonction est donc dérivable en x_0, de dérivée 0

$$f'(x) = \begin{cases} 2x.\left(1-x^2\right).e^{-x^2} & si \quad |x| \le 1 \\ 0 \quad si \quad |x| > 1 \end{cases}$$

2-

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x \sin x} - \cos(2x)}{x} & si \ x \neq 0 \\ 0 & si \ x = 0 \end{cases}$$

Domaine de définition est $\Re^*$

La continuité :

$$\lim_{x \to a} f(x) = a$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x\sin x} - \cos(2x)}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

$$x_0 = 0 : \quad \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\sin x} - \cos(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{x\sin x} - \cos(2x)\right)'}{(x)'}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\left(\sin(x) + x\cos(x)\right)e^{x\sin x} + 2\sin(2x)\right) = 0$$

Alors $f(x)$ *est continue au* 0

La dérivabilité : On revient à la définition, et on cherche si le taux d'accroissement admet une limite en x_0.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x\sin x} - \cos(2x)}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

$$f'(x) = \left(\sin(x) + x\cos(x)\right)e^{x\sin x} + 2\sin(2x) \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$x_0 = 0: \quad \lim_{x\to\pm1} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0} \frac{\left(\dfrac{e^{x\sin x}-\cos(2x)}{x}-0\right)}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\left(e^{x\sin x}-\cos(2x)\right)'}{\left(x^2\right)'}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\left(\sin(x)+x\cos(x)\right)e^{x\sin x}+2\sin(2x)}{2x}$$

$$= \lim_{x\to0} \left(\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{1}+\underbrace{\cos(x)}_{1}\right)\underbrace{e^{x\sin x}}_{1}+4\underbrace{\frac{\sin(2x)}{2x}}_{4} = 6$$

Lorsque x→0. La fonction n'est pas dérivable en $x_0=0$

Exercice 06 : *f(x)* une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^3.\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

1. Montre la dérivabilité de la fonction f(x) sur $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} x^3.\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & si\ x\neq 0 \\ 0 & si\ x=0 \end{cases}$$

Domaine de définition est $\Re^*$

La continuité :

$$\lim_{x\to a} f(x)=a$$

$$f(x)=\begin{cases} x^3.\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & si\ x\neq 0 \\ 0 & si\ x=0 \end{cases}$$

$$x_0=0: \quad \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x^3.\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

$$a\ cause\ que: \quad -1\leq \cos\left(\frac{1}{x}\right)\leq 1 \Rightarrow -x^3\leq \cos\left(\frac{1}{x}\right)\leq x^3$$

$$On\ se\ dérige\ vers\ les\ \lim ites: \ \Rightarrow \underbrace{\lim_{x\to 0} -x^3}_{0}\leq \lim_{x\to 0} x^3.\cos\left(\frac{1}{x}\right)\leq \underbrace{\lim_{x\to 0} x^3}_{0}$$

Alors $f(x)$ *est continue au* 0

La dérivabilité : Si f(x) est dérivable ➔f(x) est continue

Alors, du moment où *f(x)* est continue➔f(x) est dérivable au $x_0=0$

2. Ecriture de la fonction $f'(x)$ sous sa forme prolongée au point $x_0=-1$.

$$f'(x)=\begin{cases} 3.x^2.\cos\left(\frac{1}{x}\right)+x.\sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x\neq 0 \\ 0 & si\ x=0 \end{cases}$$

Exercice 07 : Calcul des limites par l'utilisation de **la Règle de l'Hôpital** :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$A=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\right)=\frac{0}{0}\quad Cas\text{ indéterminée}$$

$$Par\ l'application\ de\ la\ règle\ d'Hopital\ on\ trouve\ que:$$

$$A=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x^3)'}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x}{3x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-1}{3}.\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{+1}\right)=\frac{-1}{3}$$

$$B=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1+\log x}{e^x-e}=\frac{0}{0}\quad Cas\text{ indéterminée}$$

Par l'application de la règle d'Hopital on trouve que :

$$B=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1+\log x}{e^x-e}=\lim_{x\to1}\frac{\left(2x+\frac{1}{x}\right)}{e^x}=\frac{3}{e}$$

$$C=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}=\frac{0}{0}\quad Cas\text{ indéterminée}$$

Par l'application de la règle d'Hopital on trouve que :

$$C=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)'}{\left(1-2\cos x\right)'}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{2\sin(x)}=\frac{1}{2.\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$D=\lim_{x\to0}\frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}=\frac{0}{0}\quad Cas\text{ indéterminée}$$

Par l'application de la règle d'Hopital on trouve que :

$$D=\lim_{x\to0}\frac{\cos(\alpha x)-\cos(\beta x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\cos(\alpha x)-\cos(\beta x)\right)'}{\left(x^2\right)'}$$

$$D=\lim_{x\to 0}\frac{\beta.\sin(\beta x)-\alpha.\sin(\alpha x)}{2x}=\frac{0}{0}\quad \textit{Cas}\ \text{indéterminée}$$

Par l'application de la règle d'Hopital une deuxième fois, on trouve que :

$$D=\lim_{x\to 0}\frac{\beta.\sin(\beta x)-\alpha.\sin(\alpha x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\beta.\sin(\beta x)-\alpha.\sin(\alpha x))'}{(2x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\beta.\cos(\beta x)-\alpha.\cos(\alpha x)}{2}=\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$E=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^p}=\frac{+\infty}{+\infty}\quad \textit{Cas}\ \text{indéterminée}$$

Par l'application de la règle d'Hopital on trouve que :

$$E=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^p}=\lim_{x\to +\infty}\frac{(e^x)'}{(x^p)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{p.x^{p-1}}=\frac{+\infty}{+\infty}\quad \textit{Cas}\ \text{indéterminée}$$

Par l'application de la règle d'Hopital plusieur fois, puisque à chaque fois on trouve que la limmite *reste toujours* indéterminée:

$$E=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^p}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{p.x^{p-1}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{(e^x)''}{(x^p)''}=\lim_{x\to +\infty}\frac{(e^x)'''}{(x^p)'''}=\ldots$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{p.(p-1).(p-2).....1.x^{p-p}}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{p.(p-1).(p-2).....1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{p!}=+\infty$$

$$F=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x\ln(x)-x+1}{(x-1)\ln(x)}\right)=\frac{0}{0}\quad Cas\ \text{indéterminée}$$

Par l'application de la règle d'Hopital on trouve que :

$$F=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x\ln(x)-x+1}{(x-1)\ln(x)}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x\ln(x)-x+1\right)'}{\left((x-1)\ln(x)\right)'}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln(x)}{\ln(x)+(\frac{x-1}{x})}\right)=\frac{0}{0}\quad Cas\ \text{indéterminée}$$

Par l'application de la règle d'Hopital une deuxième fois, on trouve que :

$$F=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x\ln(x)-x+1}{(x-1)\ln(x)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln(x)}{\ln(x)+(\frac{x-1}{x})}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\left(\ln(x)\right)'}{\left(\ln(x)+1-\frac{1}{x}\right)'}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=\frac{1}{2}$$

$$G=\lim_{x\to 0}\left(1-\cos(x)\right).ctg(x)=\lim_{x\to 0}\left(1-\cos(x)\right).\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$=\frac{0}{0}\quad Cas\ \text{indéterminée}$$

Par l'application de la règle d'Hopital on trouve que :

$$G=\lim_{x\to 0}(1-\cos(x))ctg(x)=\lim_{x\to 0}(1-\cos(x)).\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left((1-\cos(x)).\cos(x)\right)'}{\left(\sin(x)\right)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)\cos(x)+\sin(x)+\cos(x)\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)\left(1+2\cos(x)\right)}{\cos(x)}=0$$

Exercice 08 : En utilisant **le théorème des accroissements finis,**

1) $\forall x\ ,y\in\Re\ \ ;\ |\sin x-\sin y|\le|x-y|$

$$\forall x\ ,y\in\Re\ \ ;\ \begin{cases} f\ \ continue\ dans\ [x,\ y] \\ f\ \ dérivable\ dans\ ]x,\ y[\end{cases}$$

$$\exists\ c\in\,]x,\ y[\ \ tel\ que\ \ \frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(c)$$

$$Supposons\ \ f(x)=\sin(x);\ \ f'(c)=\cos(c)$$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(c)\Leftrightarrow\frac{\sin(x)-\sin(y)}{x-y}=\cos(c)$$

$$Avec\ \ |\cos(c)|\le 1,alors\ \ \left|\frac{\sin(x)-\sin(y)}{x-y}\right|\le 1$$

$$\Leftrightarrow|\sin(x)-\sin(y)|\le|x-y|$$

2) $\forall x \in \Re^{+}\ ;\ 0 \le \log(1+x) < x$

$$\forall x \in \Re^{+}\ ;\ \begin{cases} f \textit{ continue dans } [0,\ x] \\ f \textit{ dérivable dans }]0,\ x[\end{cases}$$

$$\exists\, c \in]0,\ x[\textit{ tel que } \frac{f(x) - f(y)}{x-y} = f'(c)$$

$$\textit{Supposons } f(x) = \log(1+x);\ f'(c) = \frac{1}{c+1}$$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x-y} = f'(c) \Leftrightarrow \frac{\log(1+x) - 0}{x-0} = \frac{1}{c+1}$$

$$\textit{Avec } 0 < c < x \Leftrightarrow 1 < c+1 < x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c+1} < 1,$$

$$\textit{alors } \frac{1}{x+1} < \frac{\log(1+x) - 0}{x-0} < 1 \Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{\log(1+x)}{x} < 1$$

$$\Rightarrow 0 \le \frac{x}{x+1} < \log(1+x) < x$$

$$\textit{On obtient}: 0 \le \log(1+x) < x$$

3) $\forall x \in \Re \quad : e^{x} > 1 + x$

$$\forall x \in \Re \quad ; \begin{cases} f \ \textit{continue dans} \ [0,\ x] \\ f \ \textit{dérivable dans} \ ]0,\ x[\end{cases}$$

$$\exists\, c \in \left]0,\ x\right[\ \textit{tel que} \ \frac{f(x) - f(y)}{x-y} = f^{'}(c)$$

$$\textit{Supposons} \ f(x) = e^{x}; \ f^{'}(c) = e^{c}$$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x-y} = f^{'}(c) \Leftrightarrow \frac{e^{x} - 1}{x-0} = e^{c}$$

$$\textit{Avec} \ \ 0 < c < x \ \Leftrightarrow \ 1 < e^{c} < e^{x} \quad \Leftrightarrow \ 1 < \frac{e^{x} - 1}{x-0} < e^{x},$$

$$\textit{alors} \ \ 1 < \frac{e^{x} - 1}{x} < e^{x} \Rightarrow x < e^{x} - 1 < xe^{x} \Rightarrow x + 1 < e^{x} < xe^{x} + 1$$

$$\textit{On obtient} : e^{x} > x + 1$$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[(x+1).e^{\frac{1}{x+1}} - x.e^{\frac{1}{x}} \right] = 0$

$$\forall x \in \Re - \{-1, 0\} \quad ; \begin{cases} f \ \textit{continue dans} \ [x,\ x+1] \\ f \ \textit{dérivable dans} \ ]x,\ x+1[\end{cases}$$

$$\exists\, c \in \left]x,\ x+1\right[\ \textit{tel que} \ \frac{f(x) - f(y)}{x-y} = f^{'}(c)$$

$$\textit{Supposons} \ f(x) = x.e^{\frac{1}{x}}; \ f^{'}(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right).e^{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow f^{'}(c) = \left(1 - \frac{1}{c}\right).e^{\frac{1}{c}}$$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(c)\Leftrightarrow\frac{(x+1).e^{\frac{1}{x+1}}-x.e^{\frac{1}{x}}}{(x+1)-x}=\left(1-\frac{1}{c}\right).e^{\frac{1}{c}}$$

$$\Leftrightarrow(x+1).e^{\frac{1}{x+1}}-x.e^{\frac{1}{x}}=\left(1-\frac{1}{c}\right).e^{\frac{1}{c}}....(1)$$

$$Avec\ \ x<c<x+1\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{x+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{x}\right)<\left(1-\frac{1}{c}\right)<\left(1-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x-1}{x}\right)<\left(1-\frac{1}{c}\right)<\left(\frac{x}{x+1}\right)..........(2)$$

$$Avec\ \ x<c<x+1\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{x+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{x}\Leftrightarrow e^{\frac{1}{x+1}}<e^{\frac{1}{c}}<e^{\frac{1}{x}}...(3)$$

$$(2)*(3)\Rightarrow\frac{x-1}{x}.e^{\frac{1}{x+1}}<\left(1-\frac{1}{c}\right).e^{\frac{1}{c}}<\frac{x}{x+1}.e^{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow\frac{x-1}{x}.e^{\frac{1}{x+1}}<\left(1-\frac{1}{c}\right).e^{\frac{1}{c}}<\frac{x}{x+1}.e^{\frac{1}{x}}.......(4)$$

Remplaçons (1) dans (4):

$$\frac{x-1}{x}.e^{\frac{1}{x+1}}<(x+1).e^{\frac{1}{x+1}}-x.e^{\frac{1}{x}}<\frac{x}{x+1}.e^{\frac{1}{x}}$$

E n applique la limite à tout l'ensemble:

$$\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-1}{x}.e^{\frac{1}{x+1}}\right]}_{1}<\lim_{x\to+\infty}\left[(x+1).e^{\frac{1}{x+1}}-x.e^{\frac{1}{x}}\right]<\underbrace{\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}.e^{\frac{1}{x}}\right]}_{1}$$

$$On\ obtient:\ \lim_{x\to+\infty}\left[(x+1).e^{\frac{1}{x+1}}-x.e^{\frac{1}{x}}\right]=1$$

5) *Pour tout* $0<\alpha<1$, *et* $i \in IN$: $\dfrac{1}{(i+1)^{1-\alpha}} \leq (i+1)^{\alpha}-i^{\alpha} \leq \dfrac{1}{i^{1-\alpha}}$

$$\forall x \in \Re^{+} \quad ; \begin{cases} f \text{ continue dans } [i,\ i+1] \\ f \text{ dérivable dans }]i,\ i+1[\end{cases}$$

$$\exists\, c \in [i,\ i+1] \text{ tel que } \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f^{'}(c)$$

Supposons $f(i)=i^{\alpha}$; $f^{'}(c)=\alpha\ c^{\alpha-1}$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f^{'}(c) \Leftrightarrow \frac{(i+1)^{\alpha}-i^{\alpha}}{i+1-i} = \alpha\ c^{\alpha-1}$$

Avec $\mathrm{i} \leq c \leq i+1 \;\Leftrightarrow\; \alpha\ (i+1)^{\alpha-1} \leq \alpha\ c^{\alpha-1} \leq \alpha\ \mathrm{i}^{\alpha-1}$

(Puisque α-1<0),

$$\text{alors}\quad \alpha\ (i+1)^{\alpha-1} \leq \frac{(i+1)^{\alpha}-i^{\alpha}}{i+1-i} \leq \alpha\ \mathrm{i}^{\alpha-1}$$

$$\Rightarrow \text{On obtient} : \frac{\alpha}{(i+1)^{1-\alpha}} \leq \frac{(i+1)^{\alpha}-i^{\alpha}}{i+1-i} \leq \frac{\alpha}{\mathrm{i}^{1-\alpha}}$$

2- a) Par l'utilisation du **théorème des valeurs intermédiaires, on va** montrer que l'équation $xe^{\sin x} = \cos x$

admet au moins une solution dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$$Supposons\ \ f(x) = xe^{\sin(x)} - \cos(x)$$

$$On\ a\ \ ;\ \begin{cases} f(0) = -1 \\ f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}e \end{cases} \Rightarrow f(0).f(\frac{\pi}{2}) < 0$$

$$f \text{ continue sur} \left[0,\ \ \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow d'après \text{ le théoreme de VI}$$

$$\exists c \in \left]0,\ \ \frac{\pi}{2}\right[\ \ tq\ \ \ f(c) = 0$$

b) Par le **théorème de Rolle**, montre que cette solution est unique

$$Supposons\ \ que\, f(x)\ admet\ deux\ solutions\ c_1, c_2 \in \left]0,\ \ \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\Rightarrow f(c_1) = f(c_2) = 0$$

$$\text{On a } \begin{cases} f\ \ continue\ \ dans\ \ [c_1, c_2] \\ f\ \ dérivable\ \ dans\ \ ]c_1, c_2[\\ f(c_1) = f(c_2) \end{cases}$$

$$\text{Donc d'aprés Rolle: } \exists c' \in]c_1, c_2[\ \ \ tq\ \ \ f'(c') = 0$$

$$f'(x) = e^{\sin(x)} + x\ \cos(x)e^{\sin(x)} + \sin(x) > 0 \Rightarrow f'(x) \neq 0$$

$$Contradiction \Rightarrow La\ \ solution\ \ proposé\ \ est\ \ juste$$

Exercice 09 : Détermination du domaine de définition et calcul de **la dérivée** :

$$f_1(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)\Rightarrow 1+x^2>0 \Leftrightarrow x\in\Re \Rightarrow x\in\left]-\infty,+\infty\right[$$

et son dérivé est :

$$f'_1(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_2(x)=\sqrt{1+x^2\cos^2(x)}\Rightarrow 1+x^2\cos^2(x)>0$$

$\Leftrightarrow x\in\Re \Rightarrow x\in\left]-\infty,+\infty\right[$ *et son dérivé est :*

$$f'_2(x)=\frac{\left(1+x^2.\cos^2(x)\right)'}{2\sqrt{1+x^2.\cos^2(x)}}=\frac{2.x.\cos^2(x)-2x^2.\cos(x).\sin(x)}{2\sqrt{1+x^2.\cos^2(x)}}$$

$$=\frac{x.\cos(x).\left(\cos(x)-x.\sin(x)\right)}{\sqrt{1+x^2.\cos^2(x)}}$$

$$f_3(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x^2+1>0 \end{cases} \Rightarrow x\in\Re^* \text{ et son dérivé est :}$$

$$f'_3(x)=\frac{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)'\left(\sqrt{x^2+1}\right)-\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$=\frac{\left(\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{x^2+1}\right)-\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{-x^2e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x}}-x^3e^{\frac{1}{x}}+x^3}{x^2\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}==\frac{-e^{\frac{1}{x}}\left(x^3+x^2+1\right)+x^3}{x^2\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_3(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x^2+1>0\end{cases}\Rightarrow x\in\Re^*\ \textit{et son dérivé est :}$$

$$f'_3(x)=\frac{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)'\left(\sqrt{x^2+1}\right)-\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$=\frac{\left(\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{x^2+1}\right)-\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{-x^2e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x}}-x^3e^{\frac{1}{x}}+x^3}{x^2\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}==\frac{-e^{\frac{1}{x}}\left(x^3+x^2+1\right)+x^3}{x^2\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_4(x)=\ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}>0\\ 1-\sin(x)\neq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(1+\sin(x)\right)\left(1-\sin(x)\right)>0\\ 1-\sin(x)\neq 0\Leftrightarrow\sin(x)\neq 1\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$\textit{Puisque }\ -1\leq\sin(x)\leq 1\Leftrightarrow\begin{cases}0\leq 1+\sin(x)\leq 2\\ 0\leq 1-\sin(x)\leq 2\end{cases}$$

pour que l'inégalité sera toujours $\neq 0$, *Il faut éviter que*

$$1\pm\sin(x)=0\Rightarrow\sin(x)\neq\pm 1\Rightarrow x\neq\frac{\pi}{2}\wedge x\neq\frac{3\pi}{2}$$

Généralement, On peut dire que pour satissfaire toutes

les conditions il faut que $\quad x\neq(2k+1).\dfrac{\pi}{2}$

et son dérivé est :

$$f'_4(x)=\frac{\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)'}{\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)}$$

$$=\frac{\frac{(1+\sin(x))'.(1-\sin(x))-(1-\sin(x))'.(1+\sin(x))}{(1-\sin(x))^2}}{\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)}$$

$$=\frac{\cos(x).(1-\sin(x))+\cos(x).(1+\sin(x))}{(1-\sin(x))(1+\sin(x))}$$

$$=\frac{2.\cos(x)}{(1-\sin(x))(1+\sin(x))}=\frac{2.\cos(x)}{(1-\sin(x))(1+\sin(x))}$$

$$=\frac{2.\cos(x)}{(1-\sin^2(x))}=\frac{2.\cos(x)}{\cos^2(x)}=\frac{2}{\cos(x)}$$

$$f_5(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow 1+x^2>0\Leftrightarrow x\in\Re\Rightarrow x\in\left]-\infty,+\infty\right[$$

et son dérivé est :

$$f'_5(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)-x\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)2}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)-x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{\left(x^2+1\right)}$$

$$=\frac{\left(x^2+1\right)-x^2}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_6(x)=\frac{\sin(x^3+1)}{\cos(2x+1)} \Rightarrow \cos(2x+1)\neq 0 \Rightarrow 2x+1\neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow x\neq (2k+1)\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2} \quad et \quad k\in\Re$$

$$f'_6(x)=\frac{\left(\sin(x^3+1)\right)'.\left(\cos(2x+1)\right)-\left(\cos(2x+1)\right)'.\left(\sin(x^3+1)\right)}{\left(\cos(2x+1)\right)^2}$$

$$=\frac{3x^2.\left(\cos(x^3+1)\right).\left(\cos(2x+1)\right)+2\left(\sin(2x+1)\right).\left(\sin(x^3+1)\right)}{\left(\cos(2x+1)\right)^2}$$

$$=\frac{\left(3x^2-2\right).\left(\cos(x^3+1)\right).\left(\cos(2x+1)\right)}{\left(\cos(2x+1)\right)^2}$$

$$+\frac{2.\left(\cos(x^3+1)\right).\left(\cos(2x+1)\right)+2\left(\sin(2x+1)\right).\left(\sin(x^3+1)\right)}{\left(\cos(2x+1)\right)^2}$$

$$f_6(x)=\frac{\sin(x^3+1)}{\cos(2x+1)}=\frac{\left(3x^2-2\right).\left(\cos(x^3+1)\right).\left(\cos(2x+1)\right)+2.\left(\cos(x^3-2x)\right)}{\left(\cos(2x+1)\right)^2}$$

Exercice 10 :

1-Calcul des dérivées n[ièmes] des fonctions :

$$f(x)=xe^x \qquad f(x)=\frac{1}{1-x} \qquad f(x)=x^2\sin x$$

$$1)\ f(x)=xe^{x} \quad \Rightarrow f'(x)=f^{(1)}(x)=(x+1).e^{x}$$

$$f^{(2)}(x)=(x+2).e^{x}$$

$$f^{(3)}(x)=(x+3).e^{x}$$

$$f^{(4)}(x)=(x+4).e^{x}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\textit{Alors} \qquad f^{(n)}(x)=(x+n).e^{x}$$

$$2)\ f(x)=\frac{1}{1-x} \quad \Rightarrow f'(x)=f^{(1)}(x)=\frac{1}{(1-x)^{2}}$$

$$f^{(2)}(x)=\frac{2}{(1-x)^{3}}$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{6}{(1-x)^{4}}$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{24}{(1-x)^{5}}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\textit{Alors} \qquad f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

$3)\ f(x)=x^2.\sin(x) \quad \Rightarrow f'(x)=f^{(1)}(x)=2x.\sin(x)+x^2.\cos(x)$

$$f^{(2)}(x)=\left(2-x^2\right).\sin(x)+4.x.\cos(x)$$

$$f^{(3)}(x)=\left(6-x^2\right).\cos(x)-6.x.\sin(x)$$

$$f^{(4)}(x)=-\left(12-x^2\right).\sin(x)-8.x.\cos(x)$$

$$f^{(5)}(x)=-\left(20-x^2\right).\cos(x)+10x.\sin(x)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Alors

Si n *pair* :

* $n=2,6,10,\ldots,\ (4n+2)$

$$\Rightarrow \quad f^{(n)}(x)=+\left(n(n-1)-x^2\right).\sin(x)+2.n.x.\cos(x)$$

* $n=4,8,12,\ldots,\ 4n$

$$\Rightarrow \quad f^{(n)}(x)=-\left(n(n-1)-x^2\right).\sin(x)-2.n.x.\cos(x)$$

Si n impair :

* $n=1,5,9,\ldots,\ (4n+1)$

$$\Rightarrow \quad f^{(n)}(x)=+\left(x^2-n(n-1)\right).\cos(x)+2.n.x.\sin(x)$$

* $n=3,7,11,\ldots,\ (4n+3)$

$$\Rightarrow \quad f^{(n)}(x)=-\left(x^2-n(n-1)\right).\cos(x)-2.n.x.\sin(x)$$

$$3)\ f(x)=x^2.\sin(x) \quad \Rightarrow f'(x)=f^{(1)}(x)=2x.\sin(x)+x^2.\cos(x)$$

$$f^{(2)}(x)=\left(2-x^2\right).\sin(x)+4.x.\cos(x)$$

$$f^{(3)}(x)=\left(6-x^2\right).\cos(x)-6.x.\sin(x)$$

$$f^{(4)}(x)=-\left(12-x^2\right).\sin(x)-8.x.\cos(x)$$

$$f^{(5)}(x)=-\left(20-x^2\right).\cos(x)+10x.\sin(x)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Alors

Si n *pair* :

* $n=2,6,10,\ldots,\ (4n+2)$

$$\Rightarrow \quad f^{(n)}(x)=+\left(n(n-1)-x^2\right).\sin(x)+2.n.x.\cos(x)$$

* $n=4,8,12,\ldots,\ 4n$

$$\Rightarrow \quad f^{(n)}(x)=-\left(n(n-1)-x^2\right).\sin(x)-2.n.x.\cos(x)$$

Si n impair :

* $n=1,5,9,\ldots,\ (4n+1)$

$$\Rightarrow \quad f^{(n)}(x)=+\left(x^2-n(n-1)\right).\cos(x)+2.n.x.\sin(x)$$

* $n=3,7,11,\ldots,\ (4n+3)$

$$\Rightarrow \quad f^{(n)}(x)=-\left(x^2-n(n-1)\right).\cos(x)-2.n.x.\sin(x)$$

2-Montre par récurrence que la dérivées n[ième] de la fonction $f :]-1,1[\to IR$ définie par

Rappel :

Pour démontrer par récurrence la propriété P(n) ou n un entier naturel, on procède en trois étapes :

1. Initialisation
2. Hérédité
3. Conclusion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$s'écrit \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{\left(1-x^2\right)^{n+\frac{1}{2}}} \ ,$$

$$\forall x \in]-1,1[\quad ou \quad P_n(x) \quad est \ le \ polynome \ de \ \text{degré} \ n$$

1. **Initialisation :**

Pour n=0, on a :

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{P_0(x)}{\left(1-x^2\right)^{0+\frac{1}{2}}} = \frac{P_0(x)}{\sqrt{\left(1-x^2\right)}}$$

Par ailleurs, on a :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

On peut dire que $P_0(x) = 1$

La propriété est bien vérifiée au rang 1.

Pour n=1, on a : $f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{P_1(x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

Par ailleurs, on a :

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \left((1-x^2)^{\frac{-1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}.2.x.(1-x^2)^{\frac{-1}{2}-1} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

On peut dire que $P_1(x) = x$

La propriété est bien vérifiée au rang 1.

2. <u>Hérédité :</u>

Soit n entier naturel quelconque, Supposons que $f^{(n)}(x)$ est vraie et montre que $f^{(n+1)}(x)$ est vraie:

$$f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{\left(1-x^2\right)^{n+\frac{1}{2}}}$$

Intéressons-nous alors à :

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{P_{n+1}(x)}{\left(1-x^2\right)^{n+1+\frac{1}{2}}}=\frac{P_{n+1}(x)}{\left(1-x^2\right)^{n+\frac{3}{2}}}$$

Pour cela, on va dériver $f^{(n)}(x)$ pour trouver $f^{(n+1)}(x)$:

$$f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n+1)}(x)\right)'=\left(\frac{P_n(x)}{\left(1-x^2\right)^{n+\frac{1}{2}}}\right)'$$

$$=\frac{P_n'(x).\left(1-x^2\right)^{n+\frac{1}{2}}-P_n(x).\left(\left(1-x^2\right)^{n+\frac{1}{2}}\right)'}{\left(1-x^2\right)^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{P_n'(x).\left(1-x^2\right)^{n+\frac{1}{2}}-2.\left(n+\frac{1}{2}\right).x.P_n(x).\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}}}{\left(\left(1-x^2\right)^{n+\frac{1}{2}}\right)^2}$$

$$=\frac{P_n'(x).\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}+1}-2.\left(n+\frac{1}{2}\right).x.P_n(x).\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}}}{\left(1-x^2\right)^{2\left(n+\frac{1}{2}\right)=2n+1}}$$

$$=\frac{P_n'(x).\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}}\left(1-x^2\right)^{1}-2.\left(n+\frac{1}{2}\right).x.P_n(x).\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}}}{\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}}.\left(1-x^2\right)^{n+\frac{3}{2}}}$$

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{P_n'(x).(1-x^2)-(2n+1).x.P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{3}{2}}}$$

On peut dire que

$$P_{n+1}(x)=P_n'(x).(1-x^2)-(2n+1).x.P_n(x)$$

La propriété est donc vraie au rang n+1. Elle est donc héréditaire.

3. <u>Conclusions générale :</u>

La propriété est vraie pour *n = 0* est héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit :

$$que \quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$s'écrit \quad f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} ,$$

$\forall x\in\left]-1,1\right[$ *ou* $P_n(x)$ *est le polynome de* degré n

Exercice 11 :

1- En utilisant le Développement de Mac Laurin,

1) $f\left(x\right)=\sin(x)$

$$\begin{cases} f\left(x\right)=\sin(x) \\ f^{(1)}\left(x\right)=+\cos(x) \\ f^{(2)}\left(x\right)=-\sin(x) \\ f^{(3)}\left(x\right)=-\cos(x) \\ f^{(4)}\left(x\right)=+\sin(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f\left(0\right)=0 \\ f^{(1)}\left(0\right)=+1 \\ f^{(2)}\left(0\right)=0 \\ f^{(3)}\left(0\right)=-1 \\ f^{(4)}\left(0\right)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f\left(x\right)=\sin(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}\left(0\right)}{k!}x^{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f\left(x\right)=\dfrac{f^{(0)}\left(0\right)}{0!}x^{0}+\dfrac{f^{(1)}\left(0\right)}{1!}x^{1}+\dfrac{f^{(2)}\left(0\right)}{2!}x^{2}+\dfrac{f^{(3)}\left(0\right)}{3!}x^{3}+\ldots \\ f\left(x\right)=\sin(x)=x-\dfrac{1}{3!}x^{3}+\ldots \end{cases}$$

2) $f(x) = \cos(x)$

$$\begin{cases} f(x) = \cos(x) \\ f^{(1)}(x) = -\sin(x) \\ f^{(2)}(x) = -\cos(x) \\ f^{(3)}(x) = +\sin(x) \\ f^{(4)}(x) = +\cos(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = +1 \\ f^{(1)}(0) = 0 \\ f^{(2)}(0) = -1 \\ f^{(3)}(0) = 0 \\ f^{(4)}(0) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = \dfrac{f^{(0)}(0)}{0!} x^0 + \dfrac{f^{(1)}(0)}{1!} x^1 + \dfrac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \dfrac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 + \dots \\ f(x) = \cos(x) = 1 - \dfrac{1}{2!} x^2 + \dfrac{1}{4!} x^4 \dots \end{cases}$$

3) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}$

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2} \\ f^{(1)}(x)=\dfrac{-2!}{(x+1)^3} \\ f^{(2)}(x)=\dfrac{3!}{(x+1)^4} \\ f^{(3)}(x)=\dfrac{-4!}{(x+1)^5} \\ f^{(4)}(x)=\dfrac{5!}{(x+1)^6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0)=+1 \\ f^{(1)}(0)=-2! \\ f^{(2)}(0)=3! \\ f^{(3)}(0)=-4! \\ f^{(4)}(0)=5! \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \\ \qquad =\dfrac{f^{(0)}(0)}{0!}x^0+\dfrac{f^{(1)}(0)}{1!}x^1+\dfrac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\dots \\ f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}=1-2x+3x^2-4x^3+5x^4+\dots \end{cases}$$

4) $f(x)=e^x \Rightarrow f^{(n)}(x)=e^x$

$$\begin{cases} f(x)=e^x \\ f^{(1)}(x)=e^x \\ f^{(2)}(x)=e^x \\ f^{(3)}(x)=e^x \\ f^{(4)}(x)=e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0)=1 \\ f^{(1)}(0)=1 \\ f^{(2)}(0)=1 \\ f^{(3)}(0)=1 \\ f^{(4)}(0)=1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{f^{(0)}(0)}{0!}x^0+\dfrac{f^{(1)}(0)}{1!}x^1+\dfrac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\varepsilon(x^3) \\ f(x)=e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\varepsilon(x^3) \end{cases}$$

2. Calculer $\sqrt{e}$ avec 3 chiffres exacts en utilisant le D de Mac Laurin

$$f(x)=e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\varepsilon(x^3)$$

$$\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{(1/2)}{1!}+\frac{(1/2)^2}{2!}+\frac{(1/2)^3}{3!}+\varepsilon(x^3)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{48}+\varepsilon(x^3)=\frac{40}{24}+\varepsilon(x^3)\approx 1.645$$

Par contre $\sqrt{e}\approx 1.648721270 \Rightarrow$ Alors vous pouvez voir l'insertitude à trois chiffres

En utilisant **le développement limité** quand $x \to 0$. Calculer les fonctions suivantes

$$\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x} \qquad \frac{\sin x - tgx}{x(\cos x - 1)} \qquad \frac{e^{x}\sin x - x}{3x^{2}+x^{5}}$$

1) $f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$

$$\text{Puisuqe:}\begin{cases} e^{x} = 1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^{2}}{2!}+\dfrac{x^{3}}{3!}+\varepsilon\left(x^{3}\right) \\ e^{-x} = 1-\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^{2}}{2!}-\dfrac{x^{3}}{3!}+\varepsilon\left(x^{3}\right) \\ \sin(x) = x-\dfrac{1}{3!}x^{3}+\varepsilon\left(x^{3}\right) \end{cases}$$

et que $\qquad f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$

$$f(x)=\frac{\left(1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^{2}}{2!}+\dfrac{x^{3}}{3!}\right)-\left(1-\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^{2}}{2!}-\dfrac{x^{3}}{3!}\right)}{x-\dfrac{1}{3!}x^{3}}$$

$$=2.\frac{1+\dfrac{x^{2}}{6}}{1-\dfrac{x^{2}}{6}}+\varepsilon\left(x^{3}\right)=2.\left(1+\frac{x^{2}}{3}\underbrace{+\frac{x^{4}}{18}}_{0+\varepsilon\left(x^{3}\right)}+\varepsilon\left(x^{3}\right)\right)$$

$$
\begin{array}{l|l}
1+\dfrac{x^2}{6} & 1-\dfrac{x^2}{6} \\ \cline{2-2}
-1+\dfrac{x^2}{6} & 1+\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{x^4}{18} \\ \cline{1-1}
\dfrac{x^2}{3} & \\
-\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{x^4}{18} & \\ \cline{1-1}
\dfrac{x^4}{18} &
\end{array}
$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0} 2.\left[1+\frac{x^2}{3}+\varepsilon\left(x^3\right)\right]=2$$

Vérifions la limite par la règle d'Hopital :

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{(\sin x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x+e^{-x}\right)'}{(\cos x)'}=\frac{1+1}{1}=2$$

2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - tg(x)}{x(\cos(x)-1)}$

$$\begin{cases} \sin(x) = x - \dfrac{1}{3!}x^3 + \varepsilon(x^3) \\ tg(x) = x - \dfrac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x^3) \quad \Rightarrow \\ \cos(x) - 1 = \dfrac{-1}{2!}x^2 + \varepsilon(x^3) \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\sin(x) - tg(x)}{x(\cos(x)-1)} = \frac{\left(x - \frac{1}{6}x^3\right) - \left(x + \frac{1}{3}x^3\right)}{x.\frac{-1}{2!}x^2} = \frac{-\frac{1}{2}x^3}{-\frac{x^3}{2}} = 1 + \varepsilon(x^3)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin(x) - tg(x)}{x(\cos(x)-1)}\right] = \lim_{x\to 0}\left[1 + \varepsilon(x^3)\right] = 1$$

Vérifions la limite par une autre méthode :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-tg(x)}{x(\cos(x)-1)} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-tg(x)}{x} \cdot \frac{1}{(\cos(x)-1)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} - \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{x} \right) \cdot \frac{1}{\cos(x)-1} \cdot \frac{\cos(x)+1}{\cos(x)-1}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} - \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{x} \right) \cdot \frac{\cos(x)+1}{\cos^2(x)-1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} - \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{x} \right) \cdot \frac{\cos(x)+1}{\sin^2(x)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \left(1 - \frac{1}{\cos(x)} \right) \cdot \frac{\cos(x)+1}{\sin(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{\cos(x)-1}{\cos(x)} \right) \cdot \frac{\cos(x)+1}{\sin(x)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} \right) \cdot \frac{1}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} \cdot \underbrace{\left(\frac{\sin(x)}{x} \right)}_{1} = 1$$

Ou par la règle d'Hopital :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - tg(x)}{x(\cos(x)-1)} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{(\sin(x)-tg(x))'}{(x(\cos(x)-1))'}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \dfrac{1}{\cos^2(x)}}{\cos(x) - 1 - x\sin(x)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\cos(x) - \dfrac{1}{\cos^2(x)}\right)'}{(\cos(x)-1-x\sin(x))'}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) + \dfrac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}}{2\sin(x) + \cos(x)} = \frac{3}{3} = 1$$

3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x}{3x^2 + x^5}$

$$\text{Puisque:} \begin{cases} e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \varepsilon(x^3) \\ \sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \varepsilon(x^3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{e^x \sin x - x}{3x^2 + x^5} = \frac{\left(1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!}\right)\left(x - \dfrac{x^3}{3!}\right) - x}{3x^2 + x^5} + \varepsilon(x^3)$$

$$f(x)=\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)-x}{3x^2+x^5}+\varepsilon\left(x^3\right)$$

$$=\frac{x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{12}-\frac{x^6}{36}}{3x^2\left(1+\frac{x^3}{3}\right)}+\varepsilon\left(x^3\right)$$

$$=\frac{1}{3}.\frac{1+\frac{x}{3}-\frac{x^3}{12}-\frac{x^4}{36}}{1+\frac{x^3}{3}}+\varepsilon\left(x^3\right)$$

$$=\frac{1}{3}.\left(1+\frac{x}{3}-\frac{5x^3}{12}-\underbrace{\frac{5x^4}{36}}_{0+\varepsilon\left(x^3\right)}+\varepsilon\left(x^3\right)\right)$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x\sin x-x}{3x^2+x^5}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{3}.\left(1+\frac{x}{3}-\frac{5x^3}{12}+\varepsilon\left(x^3\right)\right)\right]=\frac{1}{3}$$

$$
\begin{array}{c|c}
1+\dfrac{x}{3}-\dfrac{x^3}{12}-\dfrac{x^4}{36} & 1+\dfrac{x^3}{3} \\
-1+\dfrac{x^3}{3} & \\
\hline
\dfrac{x}{3}-\dfrac{5x^3}{12}-\dfrac{x^4}{36} & 1+\dfrac{x}{3}-\dfrac{5x^3}{12}-\dfrac{5x^4}{36} \\
-\dfrac{x}{3}-\dfrac{x^4}{9} & \\
\hline
\dfrac{-5x^3}{12}-\dfrac{5x^4}{36} & \\
\dfrac{+5x^3}{12}+\dfrac{5x^6}{36} & \\
\hline
\dfrac{-5x^4}{36}+\dfrac{5x^6}{36} &
\end{array}
$$

$Vous\ pouvez\ vérifier\ la\ \lim ite\ par\ la\ règle\ d'Hopital:$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x}{3x^2 + x^5} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^x \sin x - x\right)'}{\left(3x^2 + x^5\right)'}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x(\sin x + \cos x) - 1}{6x + 5x^4} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^x(\sin x + \cos x) - 1\right)'}{\left(6x + 5x^4\right)'}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2e^x \cos x}{6 + 20x^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Bibliographie

[1] Seymour LIPSCHUTZ « *Série schaum- Algèbre Linéaire- Cours et problèmes* », Edition McGraw-Hill Inc, New York, 1973.

[2] Daniel Fredon, Myriam MAUMY-BERTRAND et Frédéric BERTRAND « *Mathématiques Algèbre et géométrie en 30 fiches* », Edition DUNOD- Paris 2009.

[3] Jean-Marie MONIER, « *Les Méthodes Et Exercices De Mathématiques PCSI-PTSI* », Edition DUNOD- Paris 2008.

[4] http://ticewims.unice.fr/wims/wims.cgi?module=H6/set/docset.fr

[5] https://fr.wikibooks.org/wiki/Algèbre/Théorie_élémentaire_des_ensembles