

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Ziane Achour de Djelfa

Faculté des Sciences de la Technologie

Réf :CSF-ST/...../2023



جامعة زيان عاشور بالجلفة

كلية العلوم و التكنولوجيا

رقم المرجع : م ع ك- ع ت/...../ 2023

DEPARTEMENTS GENIE CIVIL

POLYCOPIÉ DE

CALCUL DES STRUCTURES

Fait par :

Dr. RABEHI Mohamed

Année 2022-2023

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

Université Ziane Achour de Djelfa

Faculté des Sciences
et de la Technologie
Conseil Scientifique de la Faculté



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة زيان عاشور بالجلفة

كلية العلوم والتكنولوجيا
المجلس العلمي للكلية

الجلفة يوم: 15 ماي 2023

المرجع: الدورة الثانية (ماي 2023) - مستخرج رقم : 33

مستخرج من محضر اجتماع المجلس العلمي لكلية العلوم والتكنولوجيا
الدورة الثانية (ماي 2023)، المنعقد بتاريخ: 2023-05-11

في يوم الخميس الحادي عشر من شهر ماي عام ألفين وثلاثة وعشرين، وعلى الساعة (09:00) صباحا، انعقد اجتماع للمجلس العلمي لكلية العلوم والتكنولوجيا، في دورة عادية بقاعة الاجتماعات بإدارة الكلية، ومن بين النقاط المطروحة للنقاش في جدول الأعمال

المصادقة على مطبوعة دروس للأستاذ: رابحي محمد

- عرض الملف: بناء على تقارير الخبرة الايجابية لكل من السيد: عمران محمد أستاذ محاضر قسم (أ) بجامعة الجلفة و السيد فلاوي بشير أستاذ محاضر قسم "أ" بشار، بخصوص مطبوعة الدروس المعنونة بـ *Calcul des structures* والتي قام بإعدادها السيد رابحي محمد أستاذ محاضر (أ) بقسم الهندسة المدنية، كلية العلوم و التكنولوجيا، جامعة الجلفة.
- الرأي والتوصية: تمت المصادقة مطبوعة الدروس التي قام بإعدادها د. رابحي محمد أستاذ محاضر (أ) بقسم الهندسة المدنية.

رئيس المجلس العلمي للكلية





مستخرج من محضر إجتماع اللجنة العلمية

رقم : 02

بتاريخ : 2023/05/09

في التاسع من شهر ماي لسنة ألفين و ثلاثة و عشرون، وعلى الساعة العاشرة صباحا، إنعقد إجتماع اللجنة العلمية لقسم الهندسة المدنية في دورته العادية بقاعة الإجتماعات لكلية العلوم والتكنولوجيا برئاسة الدكتور زعيتري ربيع رئيس اللجنة العلمية.

ومن بين النقاط المدرجة في جدول الأعمال:

- المصادقة على تقارير الخبرة لمطبوعة الدروس التي قامت بإعدادها السيدة رابحي محمد أستاذ محاضر (أ) بقسم الهندسة المدنية.

و بعد الاطلاع على الملف المقدم من طرف الأستاذ رابحي محمد و تفحصه، صادقت اللجنة العلمية على تقارير الخبرة الايجابية لكل من السيد عمران محمد أستاذ محاضر قسم " أ " بجامعة زيان عاشور - الجلفة و السيد قلاوي بشير أستاذ محاضر قسم " أ " بجامعة محمد طاهري - بشار، بخصوص مطبوعة الدروس المعنونة : *Calcul des structures* و التي قام بإعدادها السيد رابحي محمد أستاذ محاضر (أ) بقسم الهندسة المدنية، كلية العلوم و التكنولوجيا، جامعة زيان عاشور - الجلفة.

رئيس اللجنة العلمية للقسم

رئيس اللجنة العلمية لقسم الهندسة
المدنية لكلية العلوم والتكنولوجيا
أ.م.م. زعيتري ربيع



Table des matières

Table des matières

Préface	
1. Chapitre.1. Les Treillis Articules	01
1.1. Définition	01
1.2. Hypothèses	01
1.3. Compression ou traction dans une barre	02
1.4. Condition d'isostaticité	02
1.5. Méthode de calcul	03
1.5.1. Méthode des nœuds	03
1.5.2. Méthode des sections	04
1.5.3. Méthode de Crémona	06
1.6. Exercices	09
2. Chapitre.2. Méthodes énergétiques	12
2.1. Expression générale de l'énergie potentielle de déformation	12
2.2. Théorème de Castigliano	12
2.3. Théorème de Ménabréa	14
2.4. Théorème de Muller (formule de Mohr)	15
2.4.1. Méthode de Verechtchagine	16
2.5. Exercices	20
3. Chapitre.3. Méthode des forces	24
3.1. Introduction	24
3.2. Méthode des forces	24
3.3. Liaisons surabondantes	24
3.4. Calcul du degré d'hyperstaticité	24
3.5. Principe de la méthode des forces	25
3.6. L'équation de continuité	26
3.7. Exercices	29
4. Chapitre.4. Les poutres continues	34
4.1. Introduction	34
4.2. Application directe de la méthode des forces	34
4.3. Formule des trois moments	35
4.3.1. Etablissement de la formule	35
4.3.2. Calcul des coefficients de la formule des trois moments	39
4.3.3. Points particuliers	44
4.3.4. Calcul des éléments de réduction	44

4.3.5	Exemple d'application	45
4.4	Exercices	47
5.	Chapitre.5. Les Treillis hyperstatiques	49
5.1	Introduction	49
	Les étapes de calcul des efforts internes dans d'un treillis	
5.2	hyperstatique par la méthode des forces	49
5.2.1	Calcul du degré d'hyperstaticité d'un treillis	49
5.2.2	Le système de base (système isostatique	50
5.2.3	L'équation de continuité (la formule de Müller – Breslau)	51
5.3	Exemple 2 : (inconnues hyperstatiques intérieurement)	52
5.4	Exemple 3 : (deux inconnues hyperstatiques intérieurement)	53
5.5	Exemple 4 : (deux inconnues hyperstatiques intérieurement et extérieurement)	57
6.	Références bibliographiques	63

Préface

PRÉFACE

Ce module constitué une première approche de l'équilibre des structures, désignée souvent par RDM, est la science du dimensionnement. Ce dimensionnement fait appel à des calculs qui prévoient le comportement de l'objet dont la conception doit réunir les meilleures conditions de stabilité, sécurité, d'économie. Ensuite il permet à étude la stabilité interne d'ouvrage c'est à dire la détermination des efforts et déformations à l'intérieur de la structure et les déplacements des lignes moyennes des structures générés (bâtiment en génie civil, des ouvrages d'art).

Ce polycopié s'adresse aux étudiants de troisième année LMD en Génie Civil et Travaux publics. Il est rédigé de manière que l'attention du lecteur se concentre sur les applications pratiques du calcul des structures. Des problèmes sont accompagnés de leurs solutions. En fin de chaque chapitre des exercices sans solutions sont laissés à la réflexion des étudiants et pourront faire l'objet de travaux dirigés.

Le polycopié est divisé en cinq chapitres. Il est structuré de manière à fournir à l'étudiant les bases de la statique pour déterminer l'équilibre des nœuds d'un système articulé et rechercher les efforts intérieurs dans ses barres et de calculer les efforts des systèmes et structures hyperstatiques, calculer les sollicitations et les déplacements d'une structure isostatique ou hyperstatique.

CHAPITRE 1

Les Treillis Articules

CHAPITRE 1 : LES TREILLIS ARTICULES

1.1 Définitions

On appelle système en treillis articulé un ensemble de pièces droites ou courbes, appelées barres, liées les unes aux autres par des articulations. Les points d'assemblage des barres sont appelés nœuds (figure 1.1):

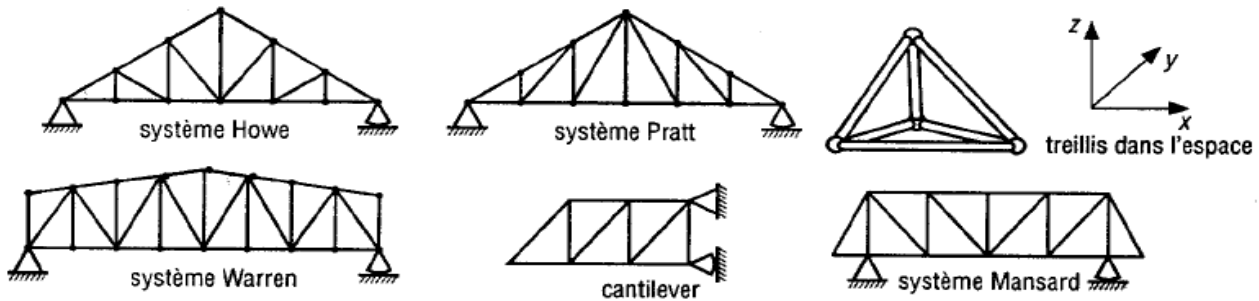


Figure 1.1. Différents types de systèmes en treillis articulés.

a) Barres

Dans le cas des treillis, ce sont des poutres en acier ou en bois (le béton armé est très peu utilisé à cause de la fissuration). Selon leur position elles portent des noms différents (Figure 1.2) :

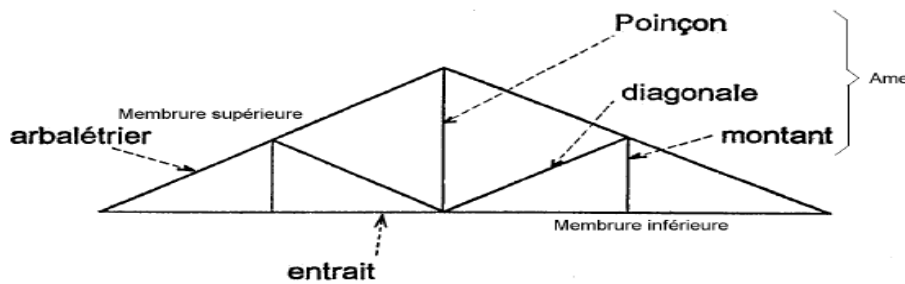


Figure 1.2. Dénomination des barres.

On utilise souvent des barres asymétriques ; des sections symétriques doubles ou des sections symétriques simples (Figure 1.3) :



Figure 1.3. Exemples de section des barres.

b) Nœuds :sont constitués par :

- Clous, boulons, connecteurs pour les treillis en bois ;
- Rivets, boulons, soudure (tubes) pour les treillis en acier.

1.2. Hypothèses



- ✓ le poids des barres est négligé devant les autres forces ;
- ✓ les nœuds sont considérés comme étant des articulations ;

- ✓ les efforts extérieurs appliqués au système réticulé sont contenus dans le plan du système et exclusivement appliqués aux nœuds de la structure (il n'y a donc que des forces ponctuelles) ;
- Les lignes moyennes des barres sont supposées être dans un même plan et concourantes aux nœuds.

1.3. Compression ou traction dans une barre :

On peut déduire des hypothèses précédentes qu'une barre quelconque de la structure est en équilibre sous l'effet des seuls efforts qui lui sont transmis par l'intermédiaire des nœuds. Ainsi, elle ne peut être soumise qu'à deux efforts opposés, portés par l'axe de la barre :

Deux cas sont possibles :

<p>Flèches vers les nœuds (-)</p> 	<p>Compression simple Signe négatif (-)</p>
<p>Flèches vers le centre (+)</p> 	<p>Traction simple Signe positif(+)</p>

1.4. Condition d'isostaticité

Les barres n'étant soumises qu'à des efforts normaux, en chaque nœud du treillis il y a un système de forces en équilibre. L'équilibre d'un système agissant sur une particule, un nœud par exemple, est vérifié si la résultante est nulle ou si les

projections suivant 2 directions perpendiculaires (x et y par exemple), sont nulles ($\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0$).

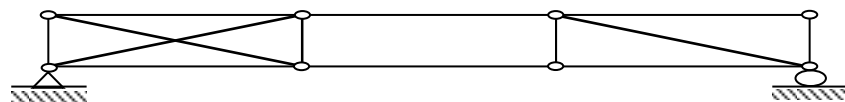


Figure 1.4 : Système vérifiant la condition 1.1 mais instable

Si *n* désigne le nombre de nœuds (les appuis sont aussi des nœuds, *n*= 10 pour le système de la figure 1.4), le nombre d'équations d'équilibre de la statique qu'on peut écrire est égal à 2*n*.

Soient *b* le nombre de barres et *l* le nombre de liaisons dans les appuis. La condition d'isostaticité s'écrit :

$$2n = b+l \dots\dots\dots (1.1)$$

Il faut cependant préciser que la condition (1.1) peut s'avérer insuffisante à prouver l'isostaticité d'un treillis ;le système doit en outre être géométriquement invariable. Une règle simple dite *règle de la maille triangulaire* permet de vérifier si le système est isostatique et stable. Cette règle s'énonce comme suit : si, partant d'une maille triangulaire, on arrive à reconstituer le système en ajoutant 2 barres à la fois, alors le système est isostatique stable.

1.5. Méthodes de calcul

On peut diviser les méthodes de calcul des systèmes en treillis articulés isostatiques en deux catégories :

- Les méthodes analytiques ;
- Les méthodes graphiques.

La méthode graphique la plus répandue est celle de **Cremona** (tracé de Cremona). Elle consiste à construire le polygone des forces en chaque nœud. Les méthodes analytiques les plus usuelles sont la *méthode des nœuds* et la *méthode des sections*. Les trois méthodes citées seront présentées.

Il faut souligner que, indépendamment de la méthode utilisée, on doit toujours commencer par le calcul des réactions.

1.5.1. Méthode des nœuds

La méthode consiste à isoler le nœud considéré par des coupures libérant les efforts dans les barres et à

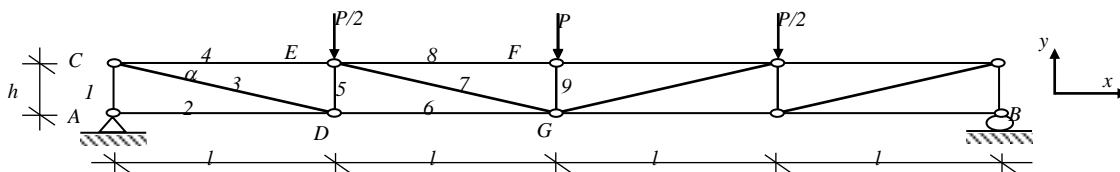


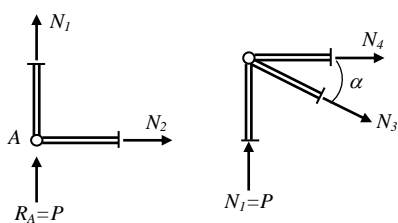
Figure 1.6. Poutre isostatique

projeter toutes les forces, efforts normaux et forces extérieures, agissant sur le nœud suivant deux axes perpendiculaires. On doit obligatoirement entamer les calculs par un nœud auquel n'aboutissent que deux barres (2 inconnues, 2 équations). Puis on passe à un nœud qui ne présente pas plus de deux inconnues.

Exemple d'application

• Nœud A

Le choix du sens des efforts dans les barres est arbitraire. Le sens choisi correspond à la traction ; le calcul montrera pour chaque barre la nature exacte de l'effort qu'elle porte.



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_2 = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 = -P \text{ (le signe "-" indique que la barre 1 est soumise à une compression).}$$

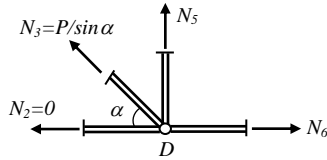
• Nœud C

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_3 \cos \alpha + N_4 = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow P - N_3 \sin \alpha = 0$$

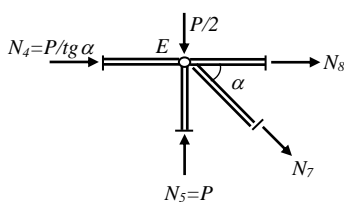
$$\text{d'où : } N_3 = \frac{P}{\sin \alpha} \text{ (traction) et } N_4 = -\frac{P}{\operatorname{tg} \alpha} \text{ (compression)}$$

• Nœud D



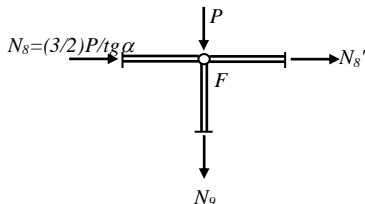
$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 &\Rightarrow N_6 = N_3 \cos \alpha = \\ &= \frac{P}{\operatorname{tg} \alpha} \text{ (traction)} \\ \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow N_5 = -N_3 \sin \alpha = \\ &= -P \text{ (compression)} \end{aligned}$$

• Nœud E



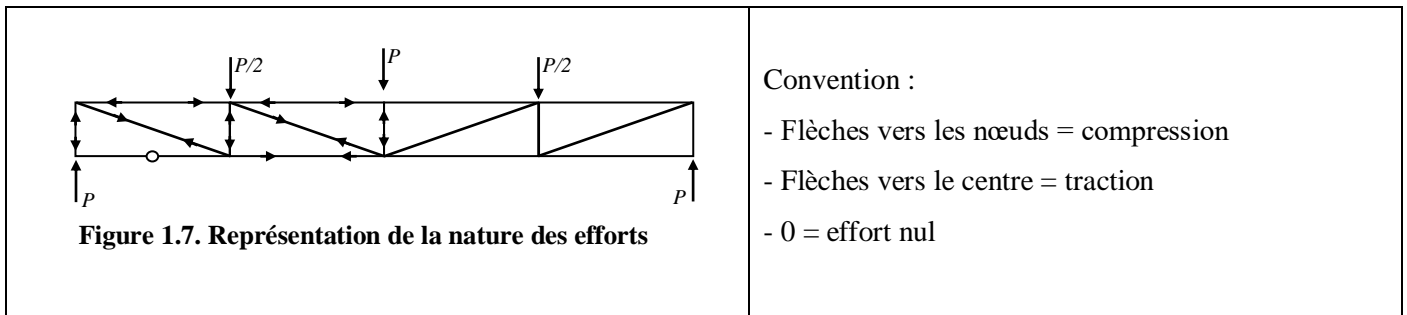
$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 &\Leftrightarrow \frac{P}{\operatorname{tg} \alpha} + N_8 + N_7 \cos \alpha = 0 \\ \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow N_7 = \frac{P}{2 \sin \alpha} \text{ (traction)} \\ &\Rightarrow N_8 = -\frac{3}{2} \frac{P}{\operatorname{tg} \alpha} \text{ (compression)} \end{aligned}$$

• Nœud F



$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 &\Rightarrow N_8' = -\frac{3}{2} \frac{P}{\operatorname{tg} \alpha} \text{ (compression)} \\ \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow N_9 = -P \text{ (compression)} \end{aligned}$$

La figure 1.7 ci-après montre la nature de l'effort dans les barres étudiées.



1.5.2. Méthode des sections (ou de Ritter)

La méthode consiste à pratiquer dans le système une coupe ne rencontrant pas plus de 3 barres (sauf dans des cas précis) non concourantes, de façon à séparer le treillis en deux parties. Pour trouver l'effort dans une des barres, on écrit l'équation d'équilibre de rotation de l'une des deux parties par rapport au point d'intersection des autres barres

(Figure 1.8).

$$\Sigma M/A = 0 \Rightarrow N_5 = \dots$$

$$\Sigma M/B = 0 \Rightarrow N_4 = \dots$$

$$\Sigma M/C = 0 \Rightarrow N_6 = \dots \text{ (partie de droite)}$$

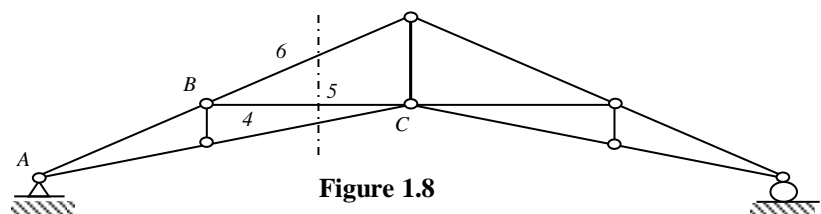


Figure 1.8

NB : Le point d'intersection des barres par rapport auquel on calcule les moments n'est pas nécessairement un nœud du système (d'où l'intérêt à travailler graphiquement).

Cas particuliers

- a) Deux barres coupées sont parallèles (point d'intersection rejeté à l'infini) (Figure 1.9)

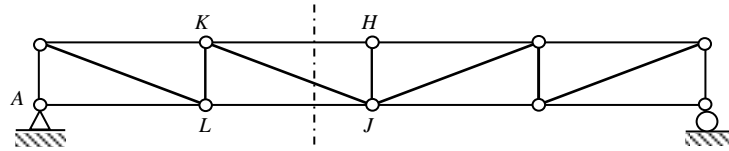


Figure 1.9 : Poutre en N

L'effort N_{KH} est obtenu à partir de l'équation $\Sigma M/J = 0$ et l'effort N_{LJ} dans la barre LJ s'obtient à partir de : $\Sigma M/K = 0$. Pour calculer N_{KJ} , on utilise une équation d'équilibre de translation, $\Sigma F_y = 0$ par exemple ; ou bien une équation d'équilibre de rotation par rapport à un appui, $\Sigma M/A = 0$ par exemple.

- b) Plus de trois barres coupées : la méthode de Ritter peut être appliquée à condition que les barres coupées soient toutes convergentes sauf une.

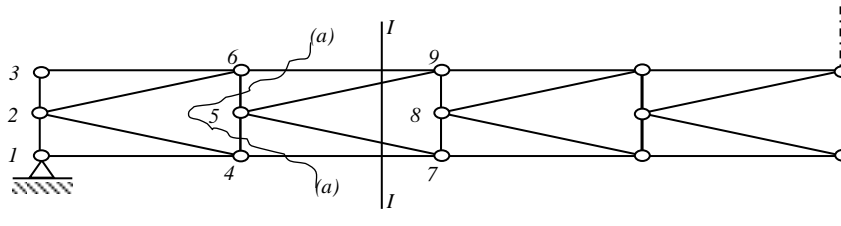


Figure 1.10. Poutre en K

La coupe $a-a$ (Figure 1.10) présente trois barres concourantes 4-5, 5-6 et 6-9 en 6 et l'équation $\Sigma M/6=0$ donne l'effort N_{47} . L'effort N_{47} connu, on fait la coupe I-I et il n'y a plus que trois efforts inconnus.

Intérêt de la méthode des sections : elle permet de calculer directement l'effort de n'importe quelle barre et

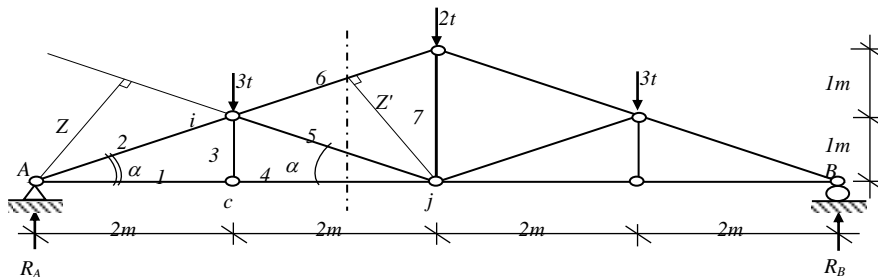


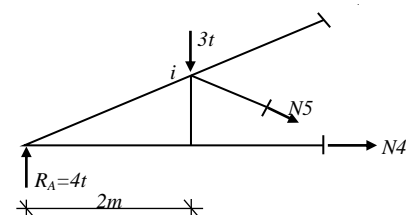
Figure 1.11

constitue de ce fait un excellent moyen de vérification des résultats obtenus par les autres méthodes. Exemple d'application

Réactions : $R_A = R_B = \frac{8}{2}t = 4t$

$\Sigma M/i = 0 \Leftrightarrow 2R_A - N_4 = 0 \Rightarrow N_4 = 8t$ (traction)

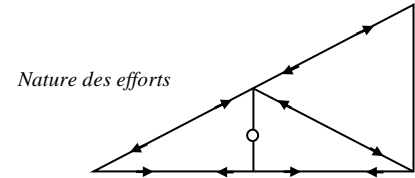
$\Sigma M/A = 0 \Leftrightarrow 2x3t + ZN_5 = 0$, avec : $Z = \frac{4}{\sqrt{5}}m$



$$\Rightarrow N_5 = -\frac{3}{2}\sqrt{5} t$$

$$\Sigma M/j = 0 \Leftrightarrow Z'N_6 - 2 \times 3t + 4R_B = 0 \Rightarrow Z'N_6 = -10 \text{ tm}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{Z'}{4}, \text{ d'où : } Z' = 4\sqrt{5} m \text{ et : } N_6 = -5.59 t$$



Pour calculer les efforts dans les barres 1, 2 et 3 on écrit les équations d'équilibre de translation en A et C.

On peut également appliquer la méthode de Ritter.

Remarque : Dans la pratique, les bras de leviers peuvent être mesurés graphiquement ce qui présente l'avantage de faciliter le travail.

1.5.3. Méthode de Cremona (tracé de Cremona)

La méthode consiste à tracer le polygone d'équilibre des forces appliquées à chaque nœud. Tous les nœuds étant en équilibre, les polygones sont nécessairement fermés.

Pour pouvoir appliquer la méthode, il est nécessaire que le système possède au moins un nœud auquel n'aboutissent que deux barres.

Les étapes de la méthode :

- 1) On représente le système dans une échelle des longueurs.
- 2) On calcule les réactions puis on numérote :
 - a) Les intervalles entre les forces extérieures en tournant dans un sens, le sens horlogique par exemple.
 - b) Les intervalles du réseau (domaines intérieurs délimités par les barres).

Ainsi, chaque barre se trouve caractérisée par deux chiffres désignant les intervalles (domaines) adjacents.

3) On construit le polygone des forces extérieures, dans une échelle des forces choisie ; ce polygone est fermé puisque les forces extérieures sont équilibrées par les réactions (équilibre global). On précise le sens des forces par des flèches.

4) On trace ensuite le polygone des forces agissant sur chaque nœud (forces extérieures et efforts dans les barres) en commençant par un nœud auquel aboutissent seulement deux barres puis on passe à un nœud n'ayant que deux efforts inconnus.

N.B. : Les directions des efforts sont connues (orientations des barres) et leurs sens et intensité sont obtenus en fermant chaque polygone.

Exemple d'application

Soit à calculer les efforts dans les barres de la poutre représentée à la figure 6.24 déjà calculée par la

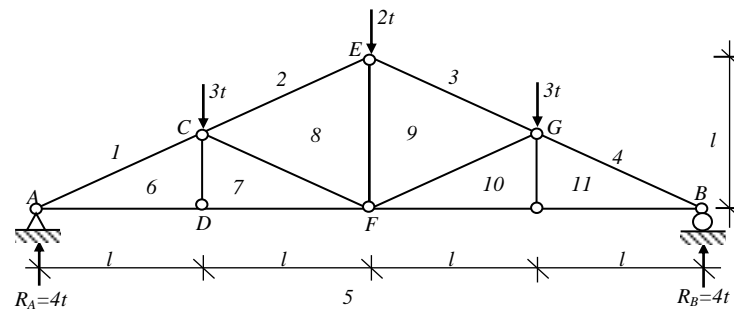


Figure 1.12

méthode de Ritter.

La résolution du problème se fait selon les étapes ci-après.

- 0- On représente la structure dans une échelle des longueurs (Figure 1.12).
- 1- Numérotation des domaines extérieurs (délimités par les forces appliquées et les réactions) : 1, 2, 3, 4 et 5 (sens horlogique, Figure 6.24).
- 2- Numérotation des domaines intérieurs (mailles) : 6, 7, 8, 9, 10, 11 (de gauche à droite). On pouvait choisir des lettres à la place des chiffres (Figure 1.12).

On peut maintenant numéroter chaque effort (extérieur ou interne), avant de passer à l'étape suivante.

Chaque effort est caractérisé par les deux chiffres des domaines qui sont adjacents à sa direction. Les efforts

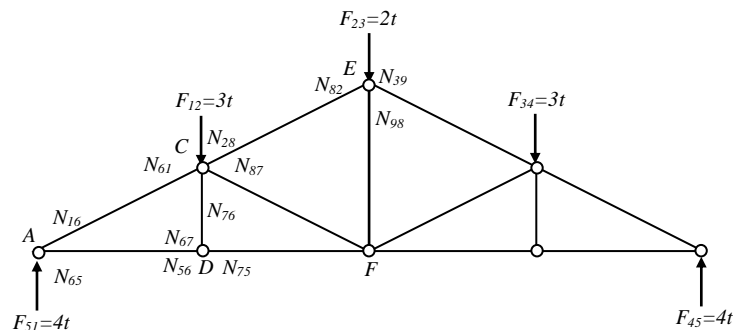


Figure 1.13

internes agissant sur les nœuds sont numérotés en tournant dans le sens horlogique (Figure 1.13).

- 3- On trace le polygone des forces extérieures (forces appliquées et réactions). Ce polygone est représenté par le segment vertical : 1-2-3-4-5-1 (Figure 1.14).
- 4- Construction des polygones des forces agissant sur chaque nœud.
 - a) Nœud A : Les efforts intervenant sont : N_{16} , N_{65} et F_{51} . Cette dernière force étant connue et représentée sur le polygone des forces extérieures. Notons que seul le point 6 est indéterminé.

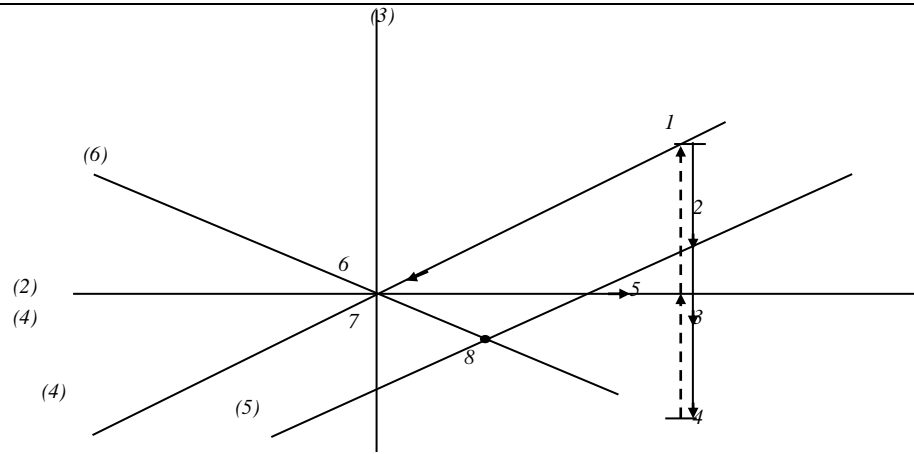
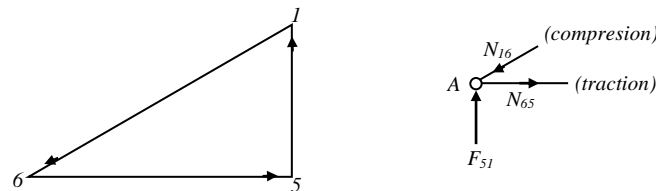


Figure 1.14

A partir du point 1 on trace une parallèle à la barre AC (N_{16}) et à partir de 5 on mène une parallèle à AD (N_{65}). L'intersection des deux parallèles détermine le point 6 cherché. Pour connaître le sens des efforts N_{16} et N_{65} , on ferme le polygone en partant de l'effort connu, F_{51} (schémas ci-dessous).

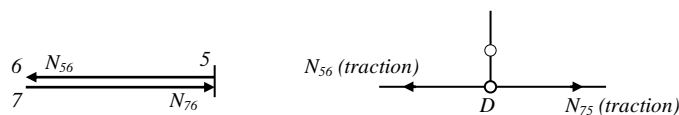


Les flèches obtenues en fermant le polygone (des efforts agissant sur le nœud A) indiquent la nature de chaque effort.

b) On passe ensuite au nœud D où seuls les efforts dans les barres DF et DC sont inconnus.

Efforts intervenant : N_{56} (connu puisque N_{65} est connu), N_{67} et N_{75} . Dans ce cas également, seul le point 7 est indéterminé.

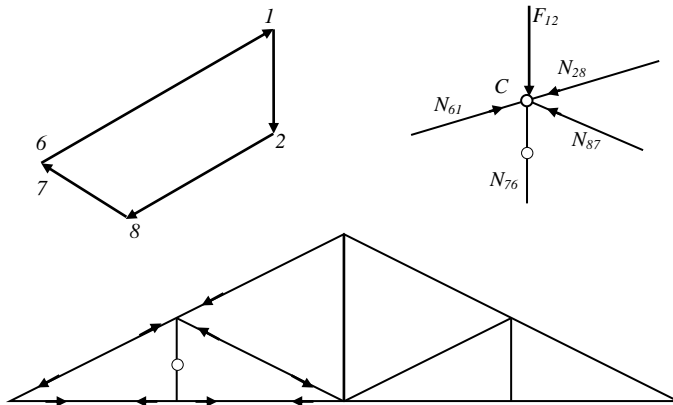
A partir de 6 on mène une parallèle à DC (N_{67}) et à partir de 5 on trace une parallèle à DF (horizontale) (N_{75}). L'intersection des deux parallèles se fait au point 6, donc le point 7 est confondu avec 6. Le polygone des forces en D (N_{56} , N_{67} et N_{75}) se limite au segment 5-7 ; donc l'effort $N_{67} = 0$ (voir schémas ci-dessous).



Point C : Efforts intervenant : N_{61} , F_{12} , N_{28} , N_{87} et N_{76} ($N_{67} = N_{76} = 0$). Seul le point 8 reste à trouver.

A partir du point 2 on trace une parallèle à CE (N_{28}) ; puis à partir de 7 on mène une parallèle à CF (N_{87}).

L'intersection des deux parallèles détermine la position du point 8. On ferme ensuite le polygone pour



déterminer le sens des efforts inconnus (N_{87} et N_{28}) ($N_{61} \rightarrow F_{12} \rightarrow N_{28} \rightarrow N_{87}$ et N_{76})(schémas ci-après).

Remarques :

1) Utilisation combinée du tracé de Cremona et de la méthode de Ritter

Lors d'un tracé de Cremona, on ne peut pas franchir les nœuds auxquels aboutissent plus de deux barres dont les efforts sont inconnus. La méthode de Ritter permet de franchir ces nœuds. Il suffit d'effectuer une ou plusieurs coupes donnant les valeurs des efforts dans les barres "surabondantes". Ce cas se présente fréquemment dans les fermes dites "Polonceau" (Figure 1.15).

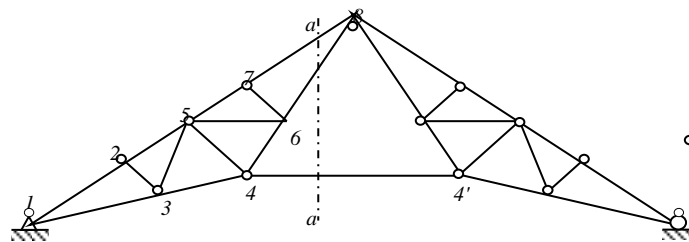


Figure 1.15 : Ferme type

Ayant amorcé le Cremona en 1, en arrivant en 4 on se trouve en présence de 3 efforts inconnus (N_{45} , N_{46} et $N_{44'}$). La coupe $a-a'$ permet de calculer directement l'effort $N_{44'}$ ($\sum M/8=0$) ; après quoi on poursuit normalement le tracé de Cremona.

2) Barres ne travaillant pas ($N=0$)

Dans l'exemple ci-contre, cinq barres ne travaillent pas ($N=0$) ; néanmoins, elles sont nécessaires car elle contribuent à : - assurer l'indéformabilité et l'isostaticité du système ;

- réduire les longueurs de flambement ;
- faciliter les dispositions constructives.

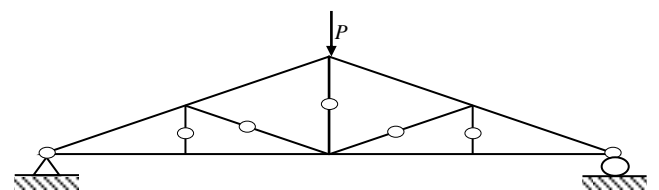


Figure 1.16 : Poutre avec plusieurs barres non sollicitées

Exercices / Chapitre 1

1.1 :Déterminer les efforts dans les barres du système (voir figure 01)

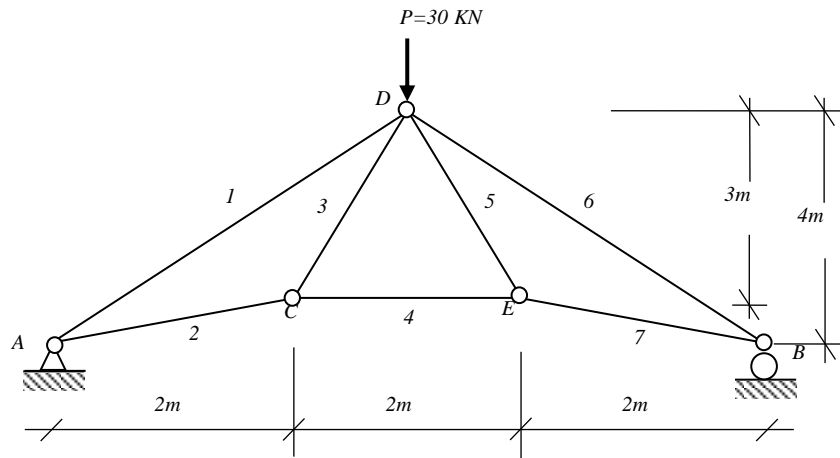


Figure 1.1

1.2 :Calculer les réactions et déterminer les efforts dans les barres du système par la méthode des noeuds(voir figure 02):

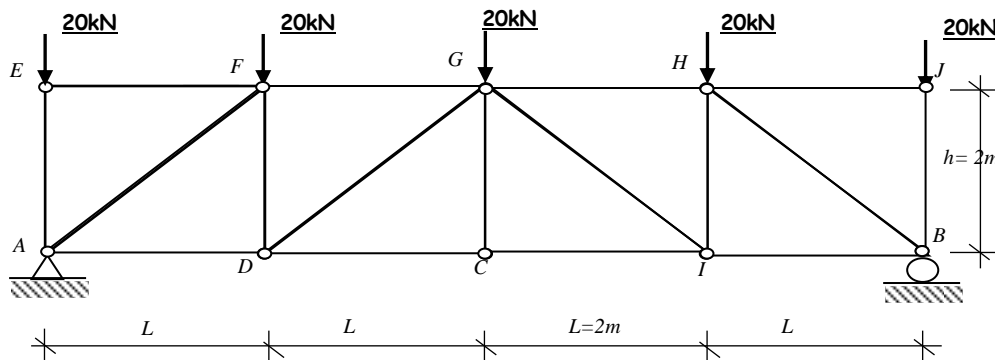


Figure 02

1.3:Déterminer les efforts dans les barres du système par la méthode de **Crémona**(voir figure 03):

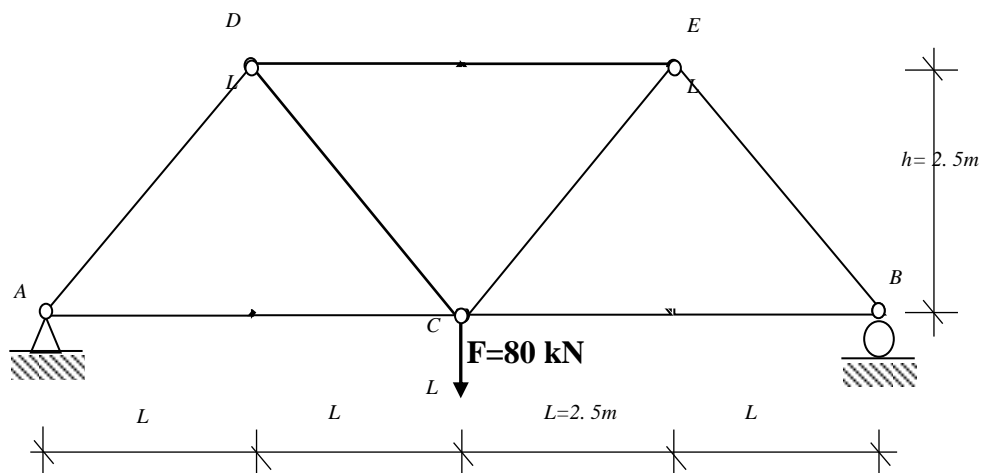


Figure 03

1.4: Déterminer les efforts dans les barres du système par la méthode des **nœuds** (voir figure 04):

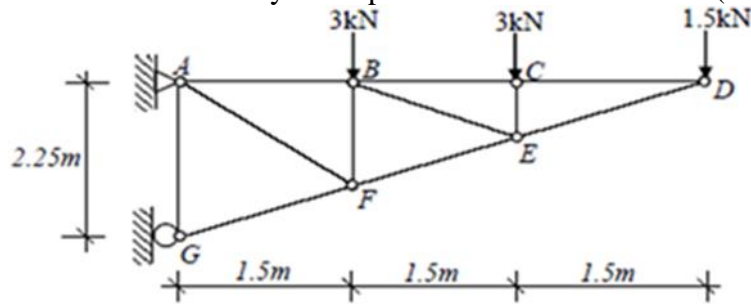


Figure 04

1.5 : Déterminer les efforts dans les barres du système ci-dessous(voir figure 05) par la **méthode de Crémone**, sachant que : $L = 2\text{ m}$ et $P = 10\text{ KN}$.

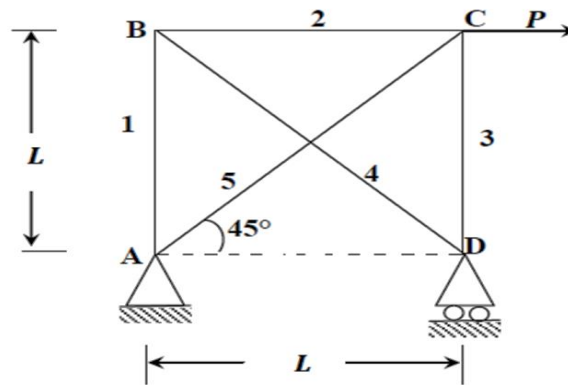


Figure 05

1.6 : Trouver les forces dans toutes les barres du treillis suivant (voir figure 06) :

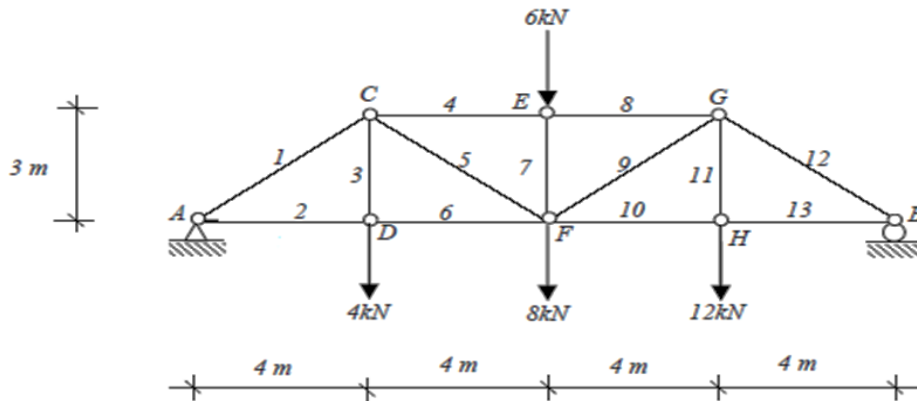


Figure 06

1.7 : Trouver les forces dans toutes les barres du treillis suivant (voir figure 07) :

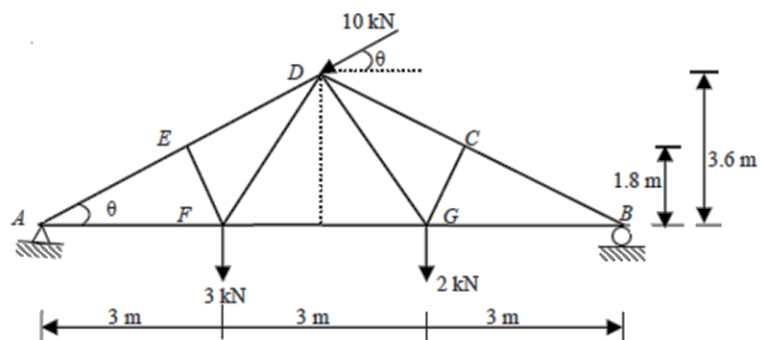


Figure 07

Chapitre 2

Méthodes énergétiques

CHAPITRE 2 :METHODES ENERGETIQUES

2.1.Expression générale de l'énergie potentielle de déformation

Soit un système de poutres en équilibre sollicité par des actions extérieures et telles que les liaisons soient parfaites. Dans le cas d'une poutre soumise aux sollicitations internes (M_f , T , N et M_t) l'expression de $W_{\text{déf}}$ s'obtient par la relation suivante :

$$W_{\text{déf}} = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_f^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_l \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int_l \frac{\kappa T^2}{GA} dx + \frac{1}{2} \int_l \frac{q M_t^2}{GI_P} dx \dots \dots \dots (2.1)$$

Sachant que

M_f : moment fléchissant ; T : effort tranchant (cisaillement) ; N : effort normal ; M_t : moment de torsion ;

E : module de déformation (young) ; I : moment d'inertie ; A : section(m^2) ; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$; I_P : inertie polaire ;

κ : facteur de cisaillement(égal à 1.2 pour une section rectangulaire et 1.11 pour une section circulaire) ;

$q = \frac{40 \times I_P^2}{A^2}$: coefficient de torsion est une constante dépendant de la forme et les dimension de la section (égal à 1 pour une section circulaire).

2.2.Théorème de castigliano

Le théorème de **Castigliano** établit une relation entre les déplacements et le potentiel interne. Pour l'établir, on part de l'égalité de Clapeyron et on calcule plus explicitement le travail des forces extérieures. La dérivée partielle du potentiel interne par rapport à une action quelconque est égale au déplacement du point d'application de cette action mesurée algébriquement sur la ligne d'action de celui-ci. Pour une force ponctuelle F_i , le déplacement δ_i est égal à :

$$\delta_i = \frac{\partial W}{\partial F_i} \dots \dots \dots (2.2)$$

Pour un moment ponctuel M_i , la rotation θ_i est égal à : $\theta_i = \frac{\partial W}{\partial M_i} \dots \dots \dots (2.3)$

En conséquence, si l'on souhaite calculer le déplacement δ (ou rotation θ) d'une section S d'une poutre dans une direction donnée, on applique une force fictive F^* (ou moment fictif M^*) dans la section S suivant cette direction. On aura alors :

$$\delta = \frac{\partial W}{\partial F^*} \Big|_{F^*=0}$$

$$\theta = \frac{\partial W}{\partial M^*} \Big|_{M^*=0} \dots \dots \dots (2.4)$$

Exemple 1

Considérons une poutre bi-articulée de section constante chargée en son milieu par une force concentrée P (Figure 2.1)

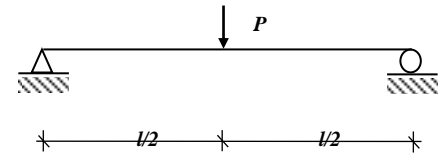


Figure 2.1

La flèche à mi-portée (f) s'obtient par application directe du résultat (2.2) :

$$f = \partial W / \partial P$$

Avec :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_z^2}{EI_z} dx + \frac{1}{2} \int_l \frac{\kappa T_y^2}{GA} dx$$

$$W = \frac{1}{2EI_z} \left[\int_0^{l/2} \left(\frac{P}{2}x\right)^2 dx + \int_{l/2}^l \left(\frac{P}{2}(l-x)\right)^2 dx \right] + \frac{\kappa}{2GA} \left[\int_0^{l/2} \left(\frac{P}{2}\right)^2 dx + \int_{l/2}^l \left(-\frac{P}{2}\right)^2 dx \right]$$

$$W = \frac{P^2 l^3}{96EI_z} + \frac{\kappa P^2 l}{8GA}$$

D'où :

$$f = \frac{Pl^3}{48EI_z} + \frac{\kappa Pl}{4GA}$$

Exemple 2

Soit à calculer le déplacement du point d'application de la charge

P (Figure 2.2), on suppose que la rigidité flexionnelle est constante.

$$W = \frac{l}{2EI_z} \int_0^l (-Px)^2 dx + \frac{\kappa}{2GA} \int_0^l (-P)^2 dx = \frac{P^2 l^3}{6EI_z} + \frac{\kappa P^2 l}{2GA}$$

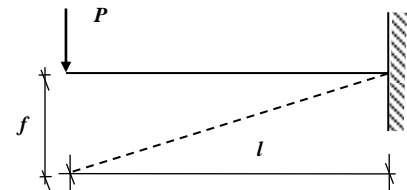


Figure 2.2

D'où :

$$f = \frac{Pl^3}{3EI_z} + \frac{\kappa Pl}{GA}$$

Exemple 3

On veut calculer la rotation de l'extrémité B de la poutre ci-dessous (Figure 2.3).

$$W = \frac{1}{2EI_z} \int_0^l \left(-\frac{C}{l}x\right)^2 dx + \frac{\kappa}{2GA} \int_0^l \left(-\frac{C}{l}\right)^2 dx = \frac{C^2 l}{6EI_z} + \frac{\kappa C^2}{2GA}$$

D'où :

$$\theta_B = \frac{\partial W}{\partial C} = \frac{Cl}{3EI_z} + \frac{\kappa C}{GA}$$

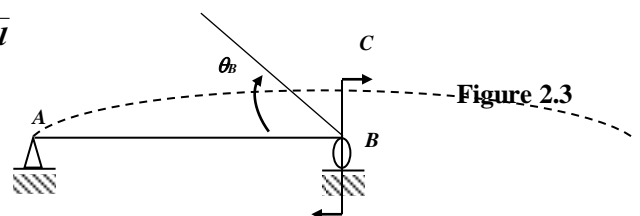


Figure 2.3

Exemple 4

Soit à calculer le déplacement angulaire de l'extrémité libre d'une poutre console de section constante soumise à une charge répartie uniforme (Figure 2.4). L'influence de T étant négligeable, on ne tient compte que de M . Pour calculer la rotation demandée, on applique un couple auxiliaire C en A afin de pouvoir utiliser le théorème de Castigliano.

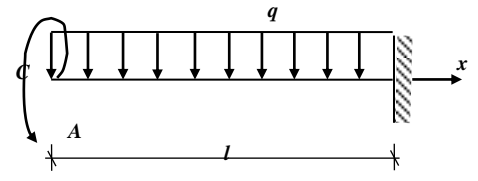


Figure 2.4

$$\gamma_A = \frac{\partial W}{\partial C} \Big|_{C=0}$$

$$W = \frac{1}{2EI} \int_0^l M^2 dx = \frac{1}{2EI} \int_0^l \left(-(C + \frac{qx^2}{2}) \right)^2 dx = \frac{1}{2EI} \left(C^2 l + \frac{Cql^3}{3} + \frac{q^2 l^5}{20} \right)$$

$$\frac{\partial W}{\partial C} = \frac{1}{2EI} \left(2Cl + \frac{ql^3}{3} \right) \text{ d'où : } \boxed{\gamma_A = \frac{\partial W}{\partial C} \Big|_{C=0} = \frac{ql^3}{6EI}}$$

Exemple 5

On désire connaître la rotation de l'extrémité A d'une poutre bi-articulée soumise à une force concentrée P (Figure 2.5).

$$W = \frac{1}{2EI} \int_0^a (R_A x - C)^2 dx + \frac{1}{2EI} \int_a^l (R_A x - C - P(x-a))^2 dx$$

avec : $R_A = (Pb+C)/l$, alors : $\gamma_A = \frac{\partial W}{\partial C} \Big|_{C=0} = -\frac{Pab}{6EI} (a+2b)$

Le signe "-" indique que la section tourne dans le sens contraire du couple auxiliaire C .

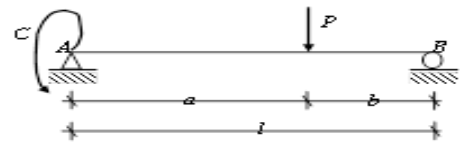


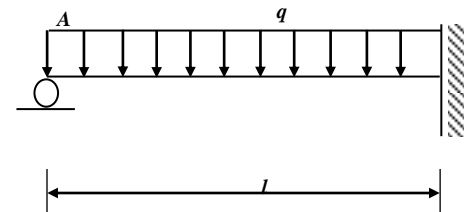
Figure 2.5

2.3. Théorème de ména bréa

Dans un système hyperstatique sur appui rigide, les réactions hyperstatiques dues aux liaisons surabondantes ne travaillent pas pendant la déformation du système. Les dérivées partielles du potentiel par rapport aux réactions hyperstatiques R_i sont donc nulles : $\frac{\partial W}{\partial R_i} = 0$(2.5)

Exemple 6

Soit à calculer la flèche à mi-portée du système représenté ci-contre (EI constante). Appliquons une première fois le théorème de Castigliano pour calculer la réaction R de l'appui A (Figure 2.6).



$$\delta_A = \partial W / \partial R = 0$$

$$\delta_A = \int_0^l \frac{M_{iF}}{EI} \frac{\partial M_{iF}}{\partial R} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l M_{iF} \frac{\partial M_{iF}}{\partial R} dx$$

$$EI \delta_A = \int_0^l M_{iF} \frac{\partial M_{iF}}{\partial R} dx = \int_0^l \left(Rx - \frac{qx^2}{2} \right) x dx$$

$$EI \delta_A = \left(\frac{Rl^3}{3} - \frac{ql^4}{8} \right) = 0 \Rightarrow R = \frac{3ql}{8}$$

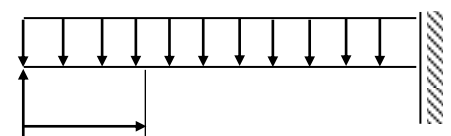


Figure 2.6

2.4. Théorème de müller-breslau :

Formule de mohr

Pour calculer le déplacement (ou la rotation) en un point j d'une structure isostatique sollicitée en flexion par un système de chargement extérieur $F(F_1, F_2, \dots, F_n)$, on procède de la manière suivante :

- on calcule les efforts intérieurs produits dans la sections i (M_{iF}, N_{iF}, T_{iF} et M_{tF}) par la sollicitation globale $F(F_1, F_2, \dots, F_n)$.
- on applique une charge unitaire en j dans le sens du déplacement recherché et on détermine les efforts intérieurs associés au point i (m_{ij}, n_{ij}, t_{ij} et m_{tj}).

Le déplacement (ou la rotation) recherché δ_{jF} s'obtient par l'intégrale suivante (2.6):

$$\delta_{jF} = \int_0^l \frac{M_{iF} m_{ij}}{EI} dx + \int_0^l \frac{N_{iF} n_{ij}}{EA} dx + \int_0^l \kappa \frac{T_{iF} t_{ij}}{GA} dx + \int_0^l q \frac{M'_{iF} m'_{tj}}{GI_P} dx \dots\dots\dots(2.6)$$

Exemple 7

Calculons la flèche au milieu C de la poutre représentée à la figure 2.7 (EI constante).

$$\begin{aligned} \delta_c &= \int_0^l \frac{Mm}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l Mm dx \\ &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^{l/2} (-Px)(0) dx + \int_{l/2}^l (-Px) \left(\frac{l}{2} - x\right) dx \right] \\ &= -\frac{1}{EI} \int_{l/2}^l P \cdot x \left(\frac{l}{2} - x\right) dx \end{aligned}$$

Soit :

$$\delta_c = \frac{5Pl^3}{48EI}$$

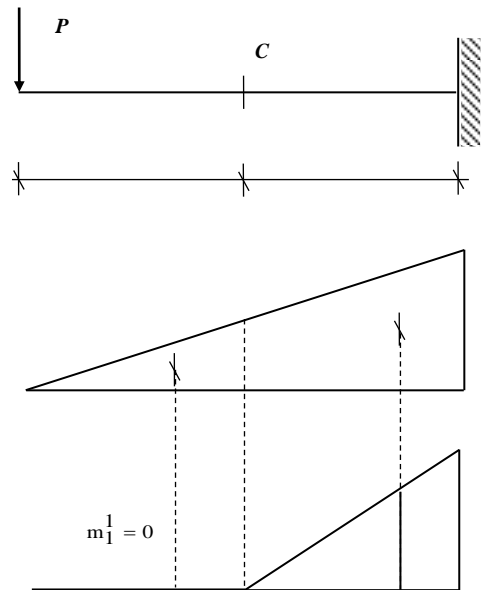


Figure 2.7

Exemple 8

On cherche la rotation de l'extrémité A de la poutre (Figure 2.8), EI constante.

$$\begin{aligned} \gamma_A &= \frac{1}{EI} \int_0^l Mm dx = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{l/2} \frac{Px}{2} \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx + M \right. \\ &\quad \left. + \int_{l/2}^l \frac{P}{2} (l-x) \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx \right] \end{aligned}$$

Soit :

$$\gamma_A = \frac{Pl^2}{16EI}$$

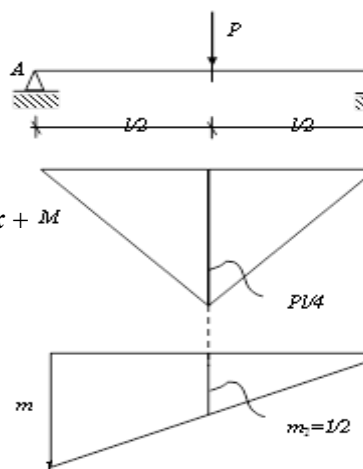


Figure 2.8

2.4.1. Particularisation de la formule de Mohr

a) Systèmes à âme pleine : méthode de Verechtchine

Dans ce cas, les déformations dues au moment fléchissant sont généralement prépondérantes et les déformations provoquées par les autres efforts, T notamment, peuvent être négligées. On peut donc calculer avec une bonne approximation les déplacements par l'intégrale :

$$\delta_{jF} = \int_0^l \frac{1}{EI} M_{iF} m_{ij} dx \dots\dots\dots-2.7)$$

Remarque : Lorsque la fonction $M_{iF}m_{ij}/EI$ n'est pas intégrable analytiquement, on remplace l'intégrale par une sommation de différences finies.

a.1 Cas des pièces droites

Pour calculer l'intégrale (i) on peut utiliser une méthode grapho-analytique. La fonction m , du moment fléchissant dû à une sollicitation unitaire, est linéaire. Cette linéarité du diagramme m peut être caractérisée par la pente α qu'il fait avec l'axe horizontal. (Figure 2.9).

On démontre que :

$$\int_0^l \frac{Mm}{EI} dx = m_1. \text{ Surface de } \left(\frac{M}{EI}\right) = m_1 \cdot S$$

où m_1 est la valeur du moment fléchissant m calculée au droit du centre de gravité de l'aire M/EI .

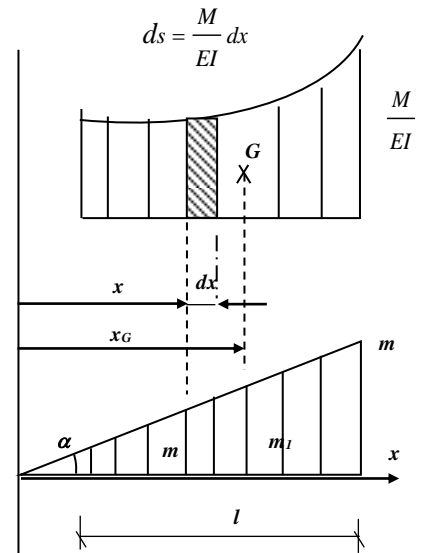


Figure 2.9

On a : $\int_0^l \frac{Mm}{EI} dx = \int_S m ds$, avec $ds = \frac{M}{EI} dx$, $S = \text{aire de } \frac{M}{EI}$

mais : $m = xt g \alpha$, alors :

$$\int_0^l \frac{Mm}{EI} dx = \int_S t g \alpha x ds = t g \alpha \int_S x ds$$

comme :

$$x_G = \frac{\int_S x ds}{\int_S ds} = \frac{\int_S x ds}{S} \Rightarrow \int_S x ds = S \cdot x_G$$

donc :

$$\int_0^l \frac{Mm}{EI} dx = S \cdot t g \alpha \cdot x_G \quad \text{or :} \quad x_G t g \alpha = m_1$$

$$\int_0^l \frac{Mm}{EI} dx = m_l \cdot S \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

alors on a bien :

a.2 Pièces droites prismatiques

La section étant constante, EI peut être sorti de sous le signe intégrale.

$$\delta_{jF} = \frac{l}{EI} \int_0^l M_{iF} m_{ij} dx \quad (2.9a)$$

Si on pose Ω = aire du diagramme du moment fléchissant sous les sollicitations externes et m_l la valeur du diagramme "unitaire" au droit du centre de gravité de Ω , alors :

$$\boxed{\delta_{jF} = \frac{l}{EI} \Omega \cdot m_l} \quad (2.9b)$$

Remarque : Si le diagramme linéaire m change de pente, on travaille par intervalle, puisque les résultats (2.8) et (2.9) ont été établis pour α constant.

Exemples d'application

Exemple 9 (Figure 2.7)

On a :

$$\delta_C = \frac{1}{EI} \Omega \cdot m_l = \frac{1}{EI} \Omega_1 \cdot m'_l + \frac{1}{EI} \Omega_2 \cdot m''_l$$

avec :

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 = \frac{1}{2} \frac{l}{2} \frac{Pl}{2} + \frac{1}{2} \frac{l}{2} \left(Pl + \frac{Pl}{2} \right) = \frac{Pl^2}{8} + \frac{3Pl^2}{8}$$

- Pour $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$ on a : $m = 0$

- Pour $\frac{l}{2} \leq x \leq l$ on a : $m = -l \left(x - \frac{l}{2} \right) = \frac{l}{2} - x$

Il vient :

$$\delta_C = \frac{1}{EI} \Omega_2 \cdot m''_l = \frac{1}{EI} \frac{3Pl^2}{8} \frac{5l}{18}$$

soit :

$$\delta_C = \frac{5Pl^3}{48EI}$$

Exemple 10 (Figure 2.8)

On a : $\Omega = Pl^2/8$ et $m = 1 - x/l$

D'où :

$$\gamma_A = \frac{1}{EI} \Omega \cdot m_1 = \frac{1}{EI} \frac{Pl^2}{8} \frac{1}{2} = \frac{Pl^2}{16EI}$$

b) Systèmes en treillis articulés (chargés indirectement)

Les barres du système étant rectilignes, chacune d'elles est soumise à un effort normal uniquement, de plus cet effort est constant (voir § 6.5). On a donc pour chaque barre :

$$\int_0^l \frac{N_{iF} n_{ij}}{EA} dx = N_{iF} n_{ij} \int_0^l \frac{dx}{EA}$$

Si la rigidité extentionnelle (EA) est constante, on aura :

$$N_{iF} n_{ij} \int_0^l \frac{dx}{EA} = \frac{N_{iF} n_{ij} l}{EA}$$

Pour une structure comportant a barres, la formule de Mohr s'écrit :

$$\delta_{jF} = \sum_{k=1}^{k=a} \frac{N_{kF} n_{kj} l_k}{E_k A_k} \tag{2.10}$$

où :

- a- δ_{jF} = déplacement du nœud j dans la direction j sous la sollicitation globale F ,
- b- N_{kF} = effort normal dans la barre k sous l'action de F ,
- c- n_{kj} = effort normal dans la barre k sous l'action d'une sollicitation unitaire
- d- appliquée en j suivant j ,
- e- E_k = module d'élasticité de la barre k ,
- f- Ω_k = aire de la section de la barre k ,

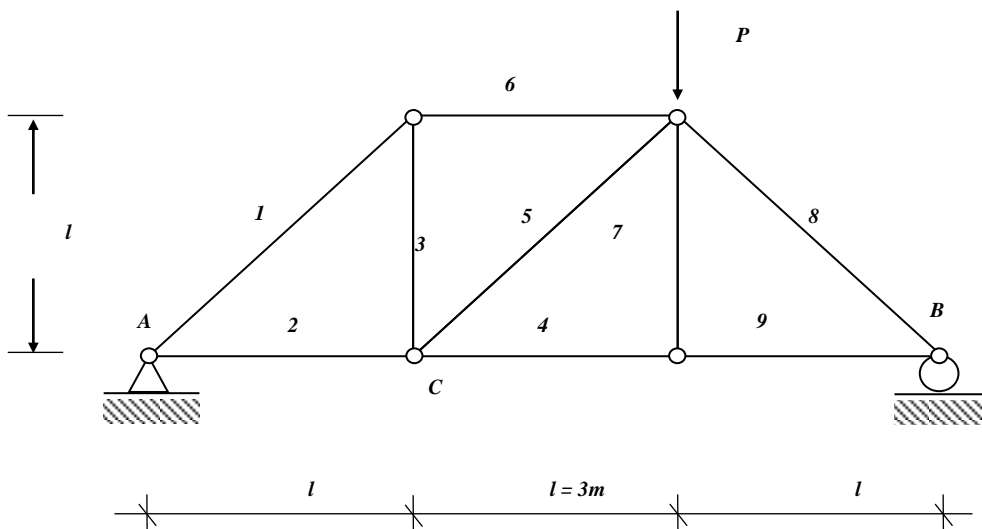


Figure 2.10

l_k = longueur de la barre k .

Exemple d'application

On cherche la flèche en *C* de la structure représentée à la figure (3.18). On suppose que *EA* est identique pour toutes les barres.

Pour l'application numérique on prendra : $EA = 315 \cdot 10^5 \text{ kg}$, $l = 3 \text{ m}$ et $P = 30 \text{ t}$.

Barre <i>k</i>	E_{Ak}	l_k	N_{kF}	n_{kj}	$N_{kF}n_{kj}l_k$
1	$315 \cdot 10^5$	$3\sqrt{2}$	$-P\sqrt{2}/3$	$-2\sqrt{2}/3$	$4P\sqrt{2}/3$
2	$315 \cdot 10^5$	3	P/3	2/3	2P/3
3	$315 \cdot 10^5$	3	P/3	2/3	2P/3
4	$315 \cdot 10^5$	3	2P/3	1/3	2P/3
5	$315 \cdot 10^5$	$3\sqrt{2}$	$-P\sqrt{2}/3$	$\sqrt{2}/3$	$-2P\sqrt{2}/3$
6	$315 \cdot 10^5$	3	-P/3	-2/3	2P/3
7	$315 \cdot 10^5$	3	0	0	0
8	$315 \cdot 10^5$	$3\sqrt{2}$	$-2P\sqrt{2}/3$	$-\sqrt{2}/3$	$4P\sqrt{2}/3$
9		3	2P/3	1/3	2P/3

Les résultats des calculs sont regroupés dans le tableau ci-dessus. Le déplacement demandé s'obtient en divisant la somme de la dernière colonne par la valeur de *EA*.

$$\delta_{CF} = \sum_{k=1}^{k=9} \frac{N_{kF}n_{kj}l_k}{E_k A_k} = \frac{1}{EA} \sum_{k=1}^{k=9} N_{kF}n_{kj}l_k = \frac{P(6\sqrt{2} + 10)}{3EA} \approx 6 \text{ mm}$$

Exercices / Chapitre 2

2.1 : Calculer le déplacement vertical à mi-portée, compte tenu de M et de T . Comparer l'influence des deux efforts (voir la figure 01).

A.N. : Section rectangulaire ($h = 30 \text{ cm}$, $b = 20 \text{ cm}$), $\nu = 0.15$, $E = 10^5 \text{ Kg/cm}^2$ et $\kappa = 1.2$.

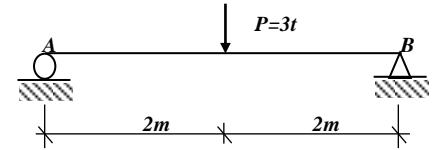


Figure 01

2.2: Calculer la flèche de l'extrémité libre. Comparer les contributions de M et de T (voir figure 02).

A. N. : Utiliser les données de l'exercice précédent.

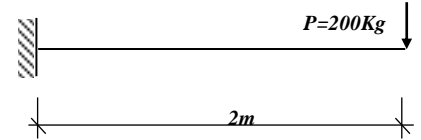


Figure 02

2.3 :

Calculer la flèche de l'extrémité C de la poutre ci-contre, compte tenu de M et de T . Comparer les flèches provoquées par les deux efforts (voir figure 03).

A. N. : Section rectangulaire, $L = 4 \text{ m}$, $a = 1 \text{ m}$, $h = L/12$, $b = 20 \text{ cm}$, $\nu = 0.2$, $E = 3 \cdot 10^5 \text{ Kg/cm}^2$ et $\kappa = 1.2$.

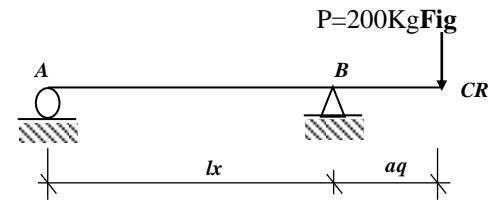


Figure 03

2.4: Calculer le déplacement vertical du nœud C. Les barres du système ont toutes la même rigidité extensionnelle EA (voir figure 03).

A. N: $EA = 315 \cdot 10^5 \text{ Kg}$.

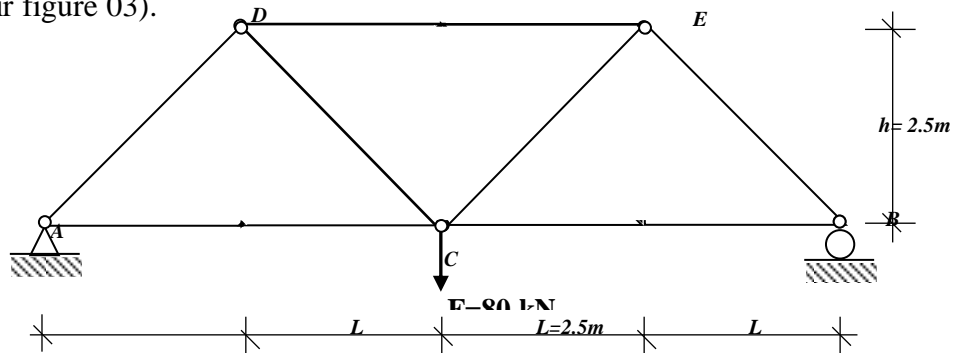
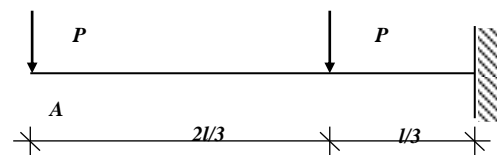
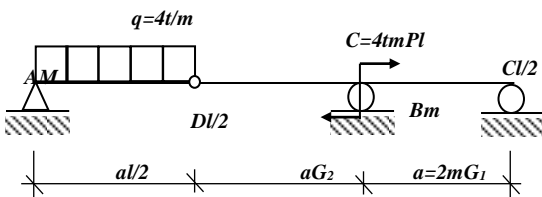


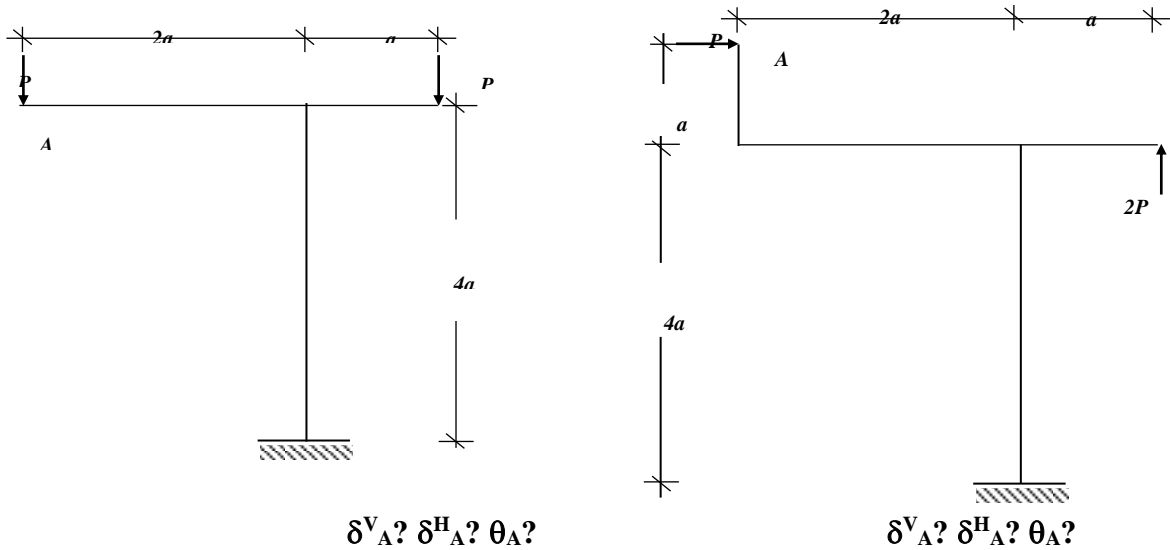
Figure 04

2.5: $f_D?$ $\theta_B?$

$f_A?$



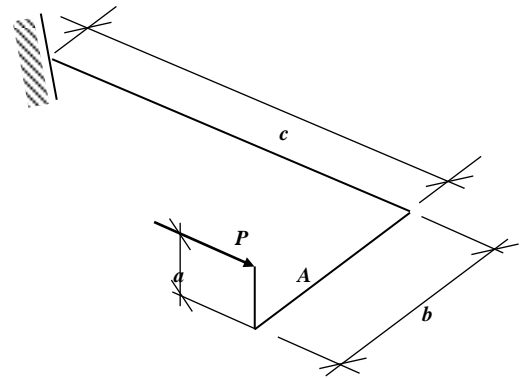
2.6:



2.7:

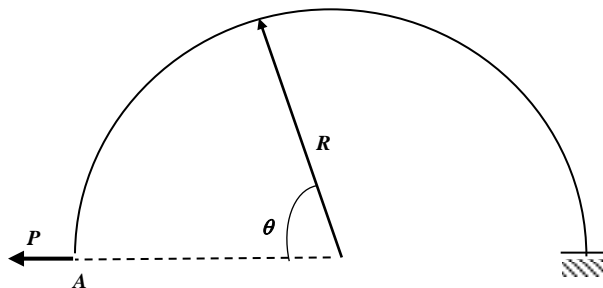
Calculer le déplacement du point A dans la direction de la force P, du système ci-contre (les barres b et c sont dans un même plan horizontal).

On négligera les effets directs de l'effort tranchant. La section est circulaire de diamètre 2R, le module d'élasticité est E et le coefficient de Poisson ν .



2.8: La poutre courbe ci-contre a un rayon de courbure R, un module d'élasticité E et un moment d'inertie I (par rapport à un axe perpendiculaire à la fibre moyenne) constants. Elle est soumise à une force horizontale P appliquée à son extrémité libre A.

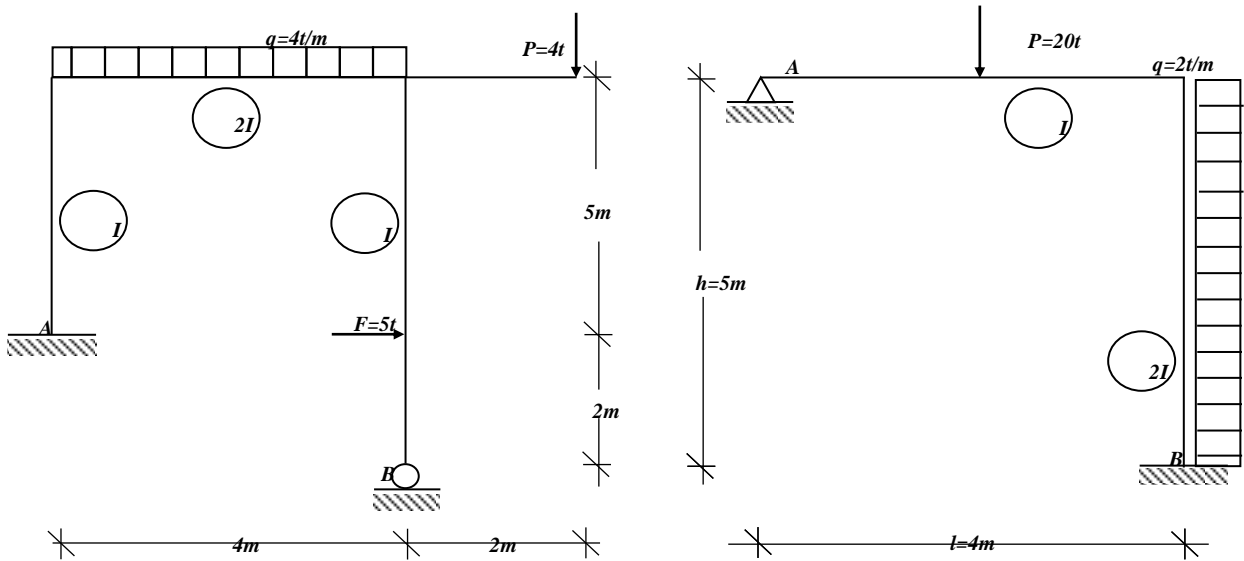
Calculer les composantes horizontale et verticale du déplacement du point A, compte tenu de M uniquement.



2.9:

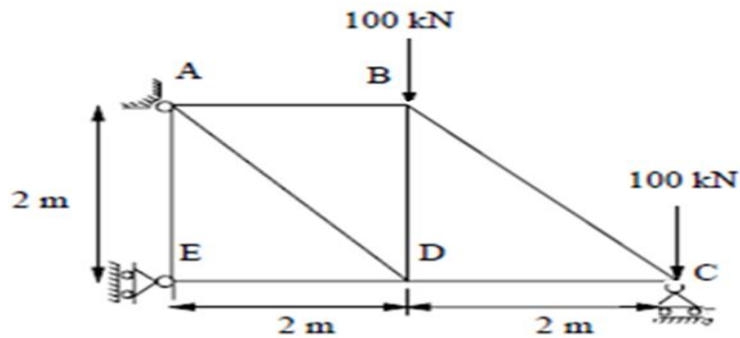
$R_B?$

$R_A^V? R_A^H?$



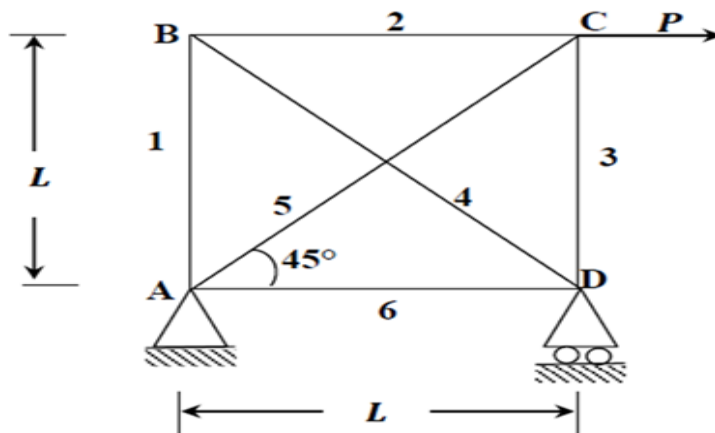
2.10:

Pour le treillis hyperstatiques suivants, on demande de déterminer les efforts dans tous les barres (**Module d'élasticité E et section A identiques pour toutes les barres**).



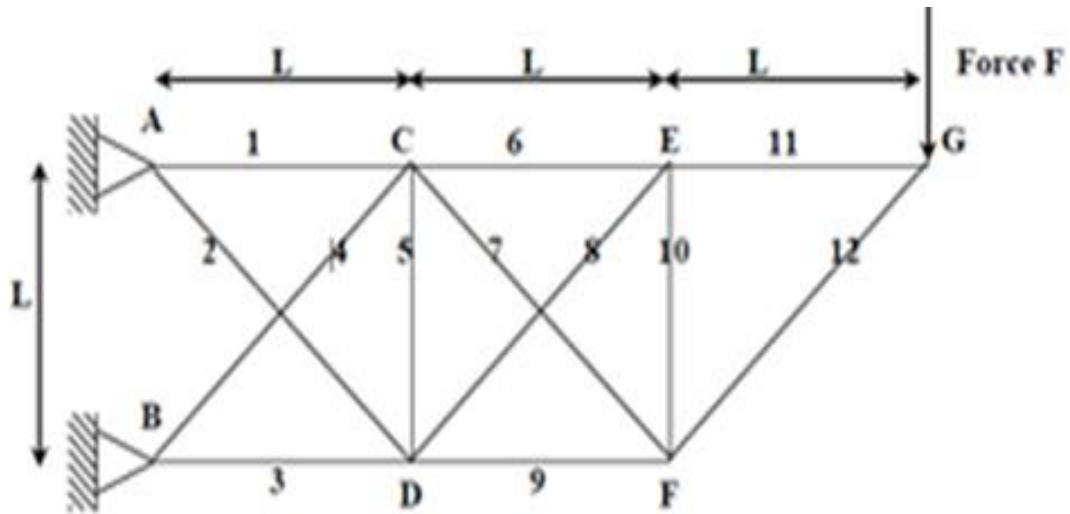
2.11:

Pour le treillis hyperstatiques suivants, on demande de déterminer les efforts dans tous les barres (**Module d'élasticité E et section A identiques pour toutes les barres**).



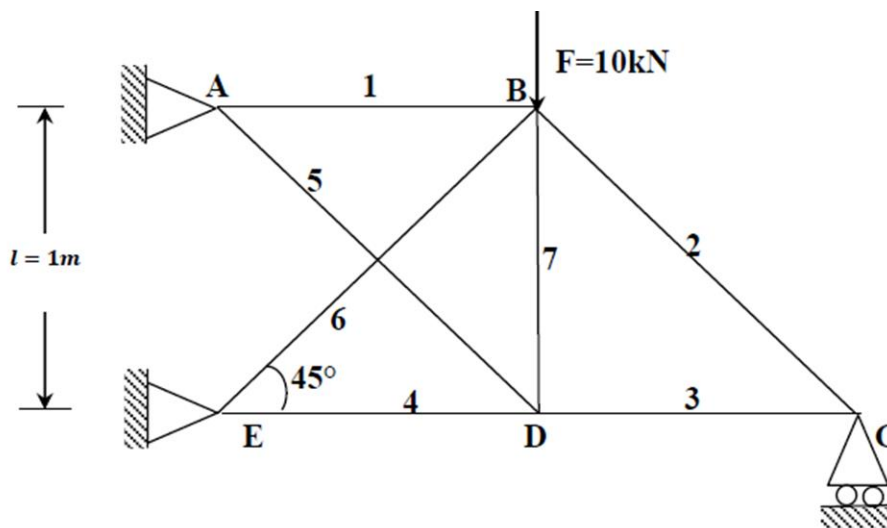
2.12:

Pour le treillis hyperstatiquesuivants, on demande de déterminer les efforts dans tous les barres (**Module d'élasticité E et section A identiques pour toutes les barres**).



2.13:

Pour le treillis hyperstatiquesuivants, on demande de déterminer les efforts dans tous les barres (**Module d'élasticité E et section A identiques pour toutes les barres**).



Chapitre 3

Méthodes des forces

CHAPITRE 3: METHODE DES FORCES

3.1. Introduction

Deux méthodes sont très utilisées pour le calcul des structures hyperstatiques, l'une pour laquelle le point de départ est la notion d'effort, l'autre qui prend comme point de départ les déplacements. Ces deux méthodes, différentes mais aboutissant aux mêmes résultats sont :

- la méthode des forces,
- la méthode des déplacements.

Nous allons, en ce qui nous concerne, étudier la méthode des forces.

3.2. Méthode des forces

Elle est parfois appelée *méthode des efforts* ou *méthode des sollicitations*. Avec cette méthode, on prend comme inconnues les *forces* dans les liaisons surabondantes. Les liaisons surabondantes sont supprimées et remplacées par des forces inconnues qu'il faut chercher en premier lieu. La structure initiale (hyperstatique) est transformée en une structure isostatique soumise aux charges extérieures de départ et aux forces introduites (les inconnues hyperstatiques). Les équations supplémentaires qui permettent de déterminer les forces inconnues sont obtenues en exprimant la "continuité" de la structure déformée dans les liaisons supprimées (surabondantes).

3.3. Liaisons surabondantes

On appelle liaisons surabondantes, les liaisons qu'il faudrait supprimer à un système hyperstatique pour obtenir une structure isostatique (géométriquement stable, qui ne soit pas libre). Leur nombre représente le *degré d'hyperstaticité* du système. On peut classer les liaisons surabondantes en deux groupes : les liaisons surabondantes extérieures et les liaisons surabondantes intérieures. Les liaisons surabondantes extérieures sont celles qui se trouvent dans les appuis.

3.4. Calcul du degré d'hyperstaticité

Comme il a été mentionné, le nombre de liaisons surabondantes constitue le degré d'hyperstaticité de la structure (noté H). Le degré d'hyperstaticité est donné par :

$$H = 3c - a - 2s \dots\dots\dots(3.1)$$

Sachant que :

- C : le nombre de contours de la structure ;
- a : le nombre d'articulations (y compris les appuis doubles) ;
- s : le nombre d'appuis simples.

AN (voir figure 3.1)

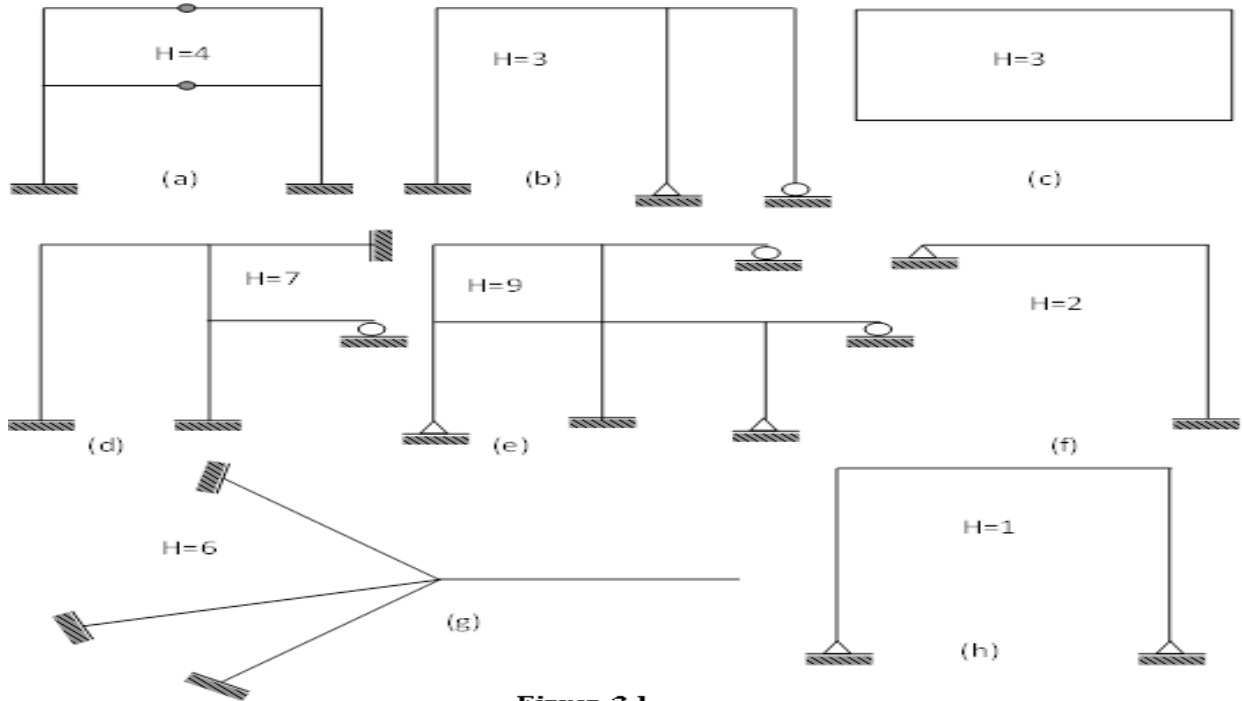


Figure 3.1

3.5. Principe de la methode des forces

Pour calculer un système hyperstatique d'ordre n ($H = n$), on le transforme en un système isostatique en supprimant les n liaisons surabondantes. Cela revient à pratiquer n coupures, une par inconnue hyperstatique. Pour que le système isostatique soit équivalent au système initial, il faut remplacer chaque liaison supprimée par la force qui lui correspondant (Figure 3.2).

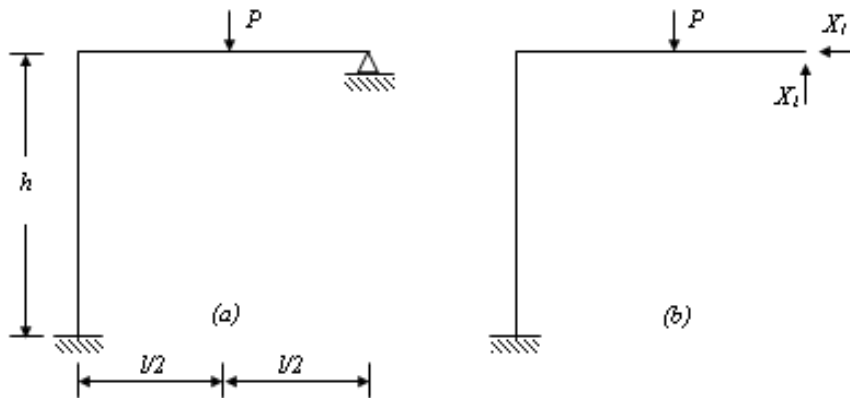


Figure 3.2

Les inconnues hyperstatiques X_1 et X_2 de l'exemple considéré sont obtenues en utilisant Théorème de **Menabrea** ci-dessus. Le système d'équations s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial X_1} = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial X_2} = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (3.2)$$

Les coefficients δ_{11}^u et δ_{21}^u sont obtenus en appliquant au système de base la sollicitation unitaire $X_1=1$ tandis que δ_{12}^u et δ_{22}^u s'obtiennent sous l'effet de la seule sollicitation $X_2=1$. Quant aux déplacements δ_{1F} et δ_{2F} , ils se calculent sous l'effet des charges extérieures (ici la force P) appliquées au système isostatique de base. Les diagrammes permettant le calcul de ces coefficients (cas où l'influence de M est prépondérante) sont montrés à la figure 3.3.

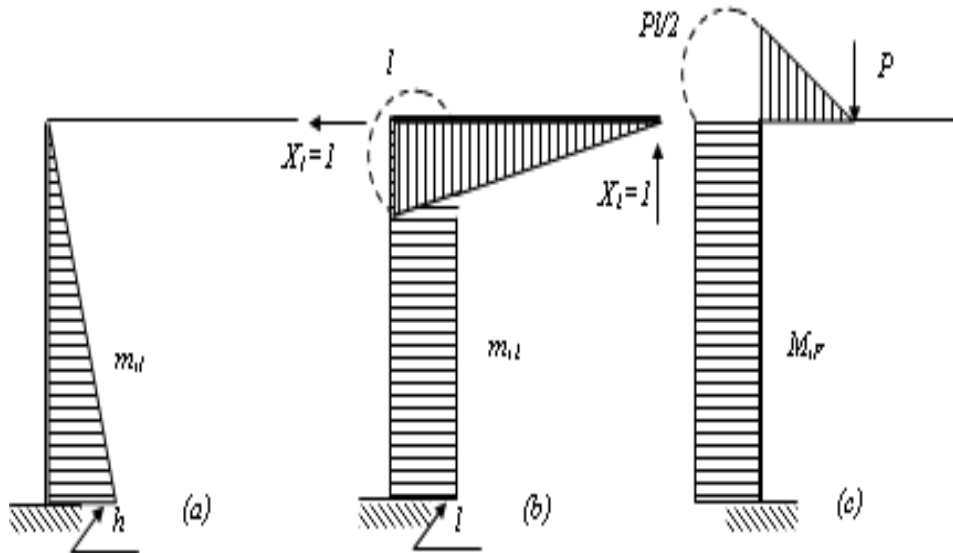


Figure 3.3 : Diagrammes des moments M et m

On trouve, avec $h=l=a$:

$$\delta_{11}^u = \frac{a^3}{3EI} \quad \delta_{12}^u = \delta_{21}^u = \frac{a^3}{2EI} \quad \delta_{22}^u = \frac{4a^3}{3EI} \quad \delta_{1F} = -\frac{Pa^3}{4EI} \quad \delta_{2F} = -\frac{29Pa^3}{48EI}$$

La figure 3.4 montre la signification de ces coefficients.

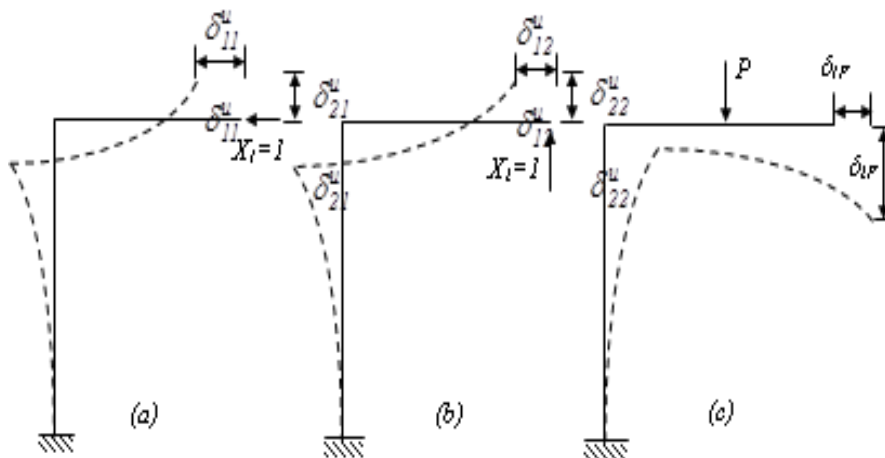


Figure 3.4 : Signification des coefficients δ

Et à partir des équations du système on tire :

$$X_1 = \frac{9}{56} P \quad X_2 = \frac{22}{56} P$$

et

Les diagrammes M, N, T peuvent être construits maintenant (Figure 3.5).

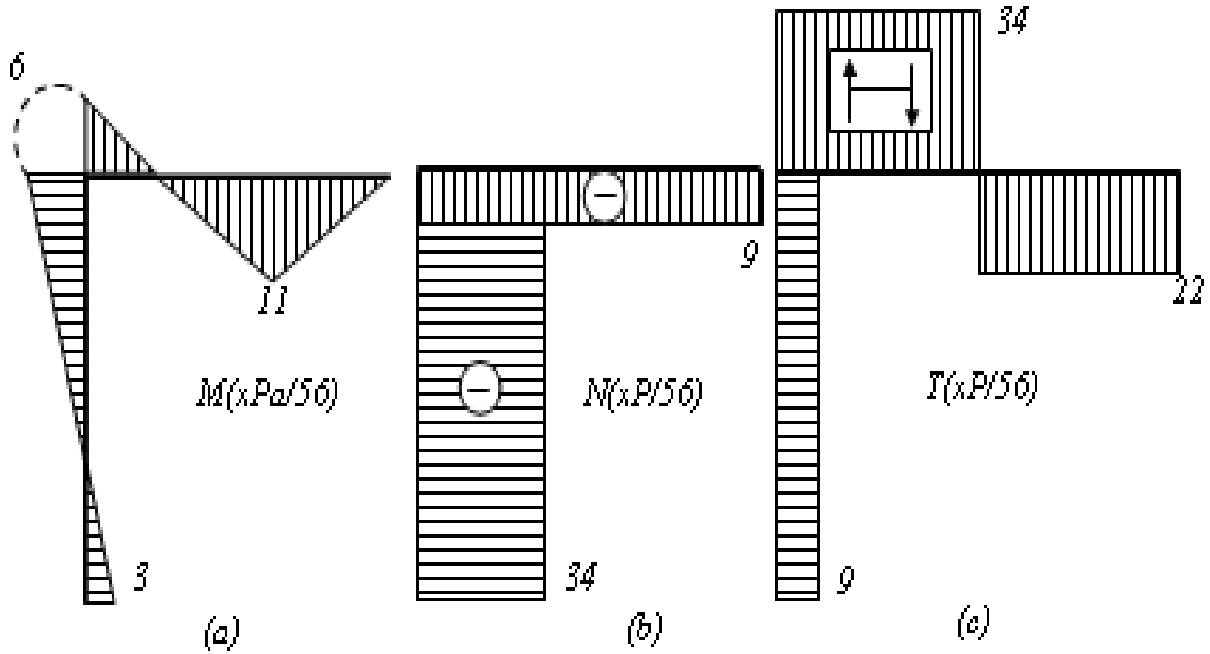
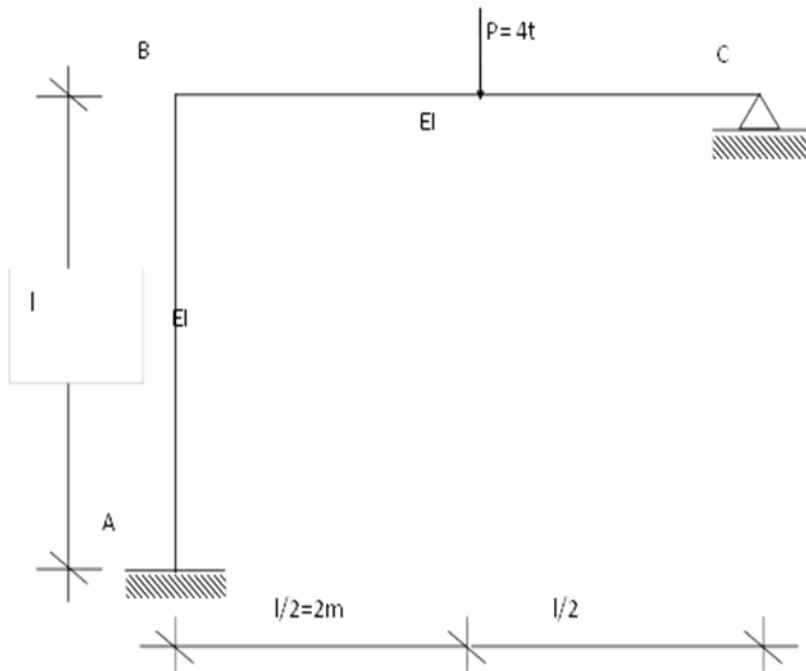


Figure 3.5 : Diagrammes M, N, T

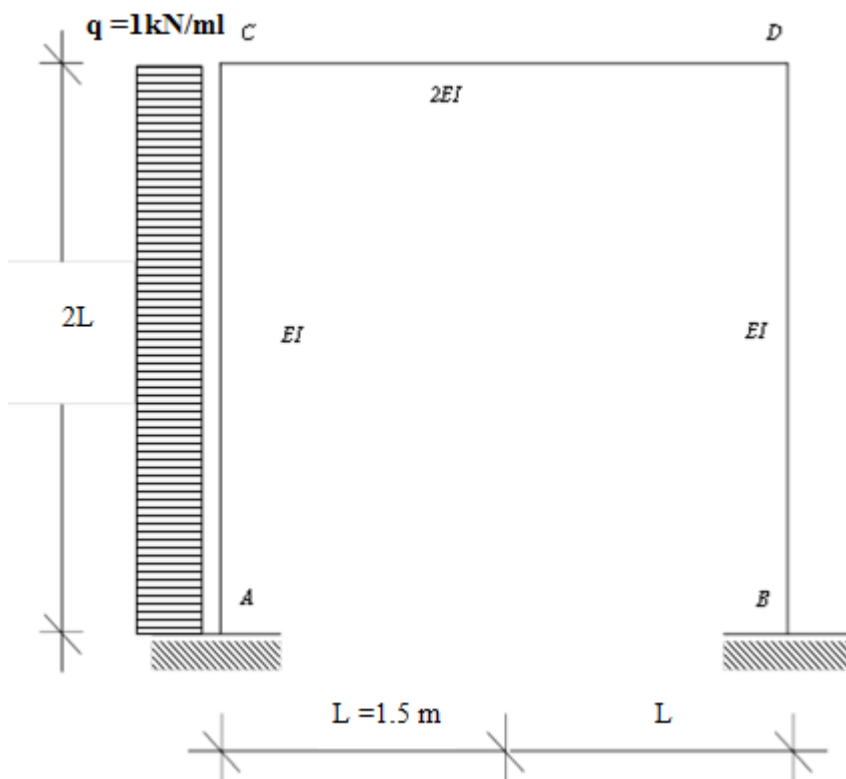
Exercices / Chapitre 3

3.1 : à 3.4 : Tracer les diagrammes de M , de N et de T des systèmes suivants.

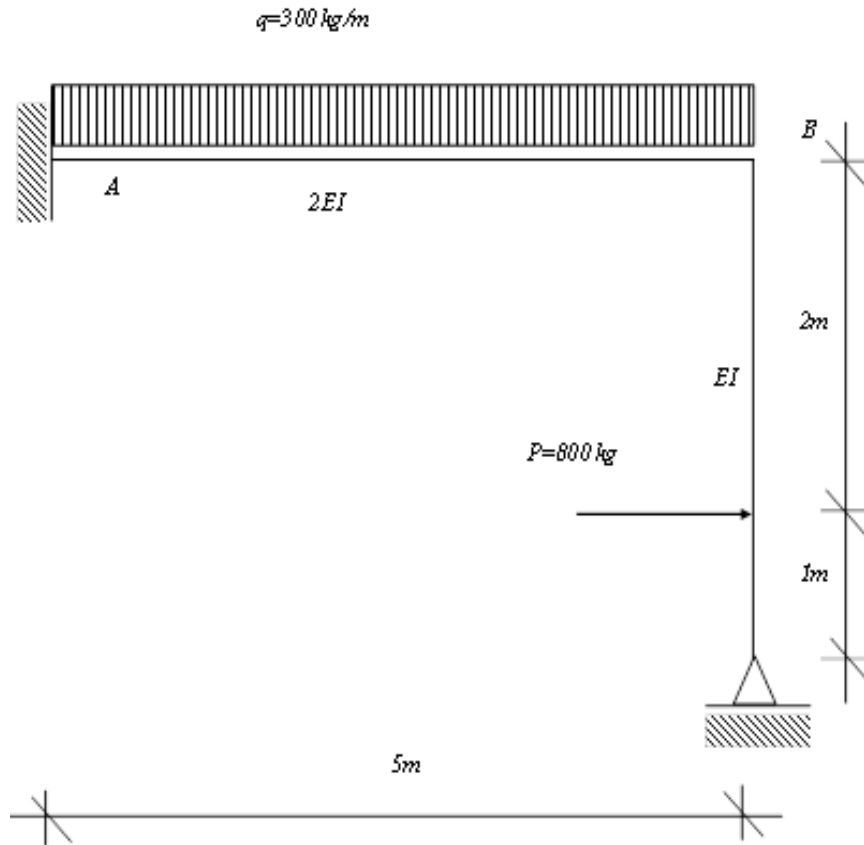
3.1 :



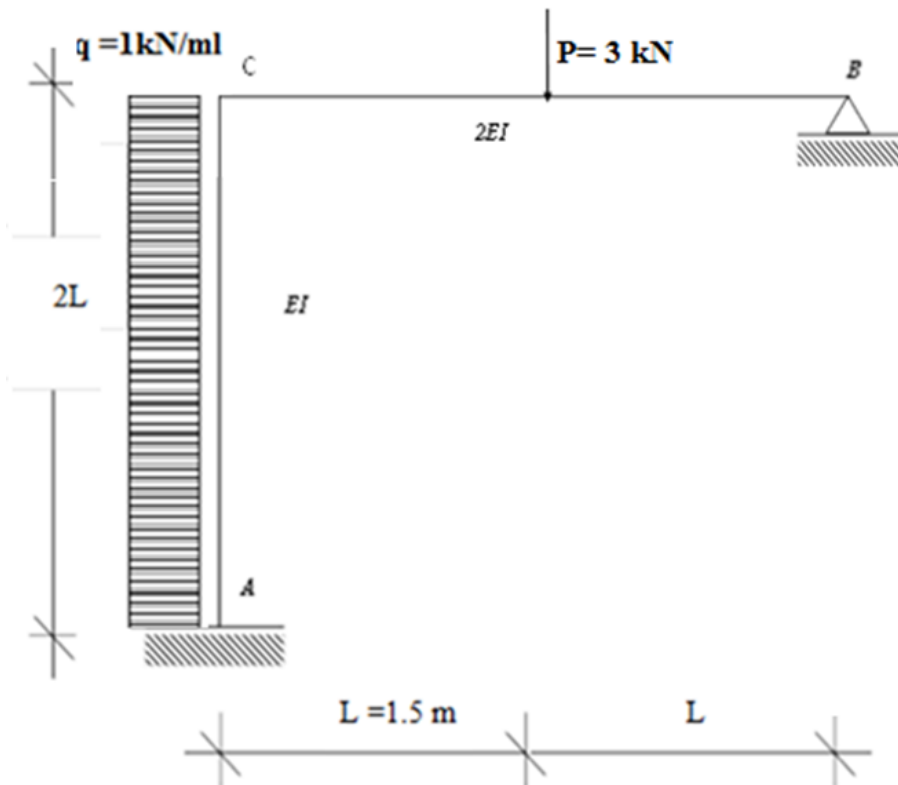
3.2 :



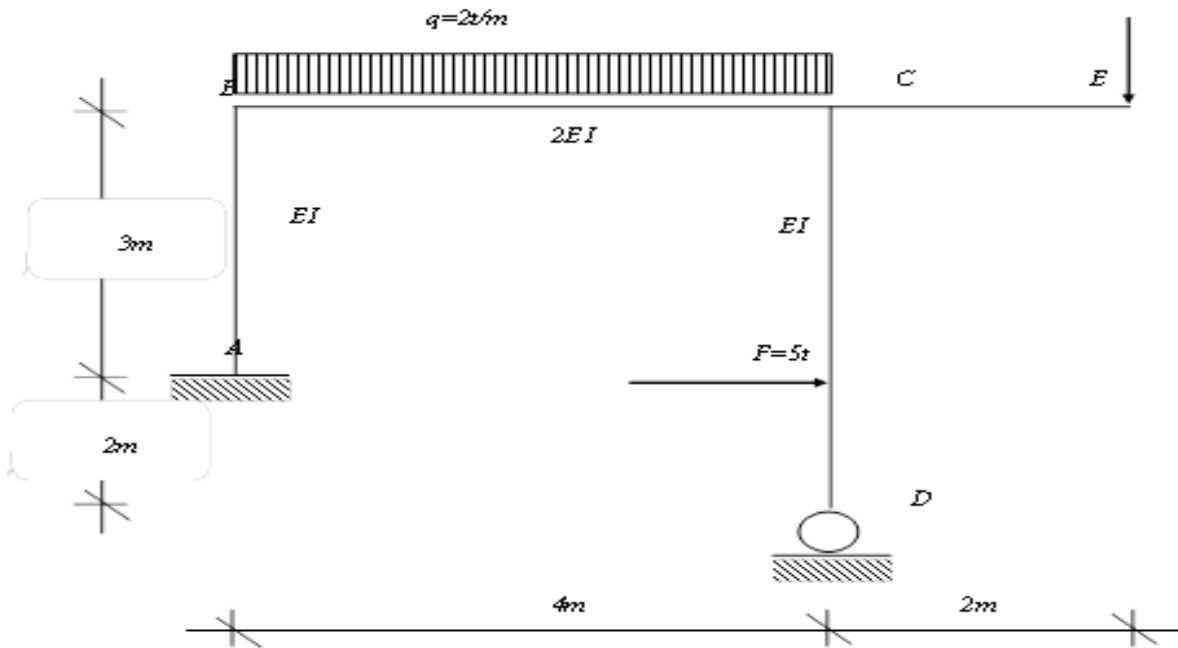
3.3 :



3.4 :



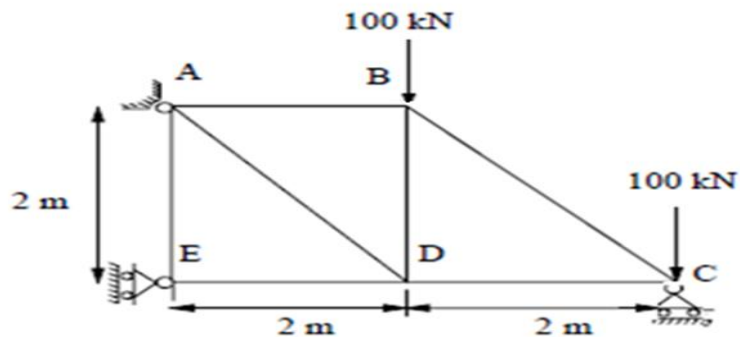
3.5 :



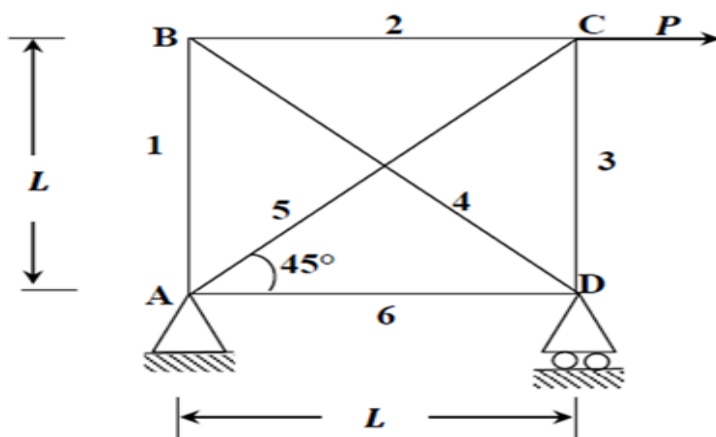
3.6 : à 3.9

Pour les treillis hyperstatiques suivants, on demande de déterminer les efforts dans tous les barres (**Module d'élasticité E et section A identiques pour toutes les barres**).

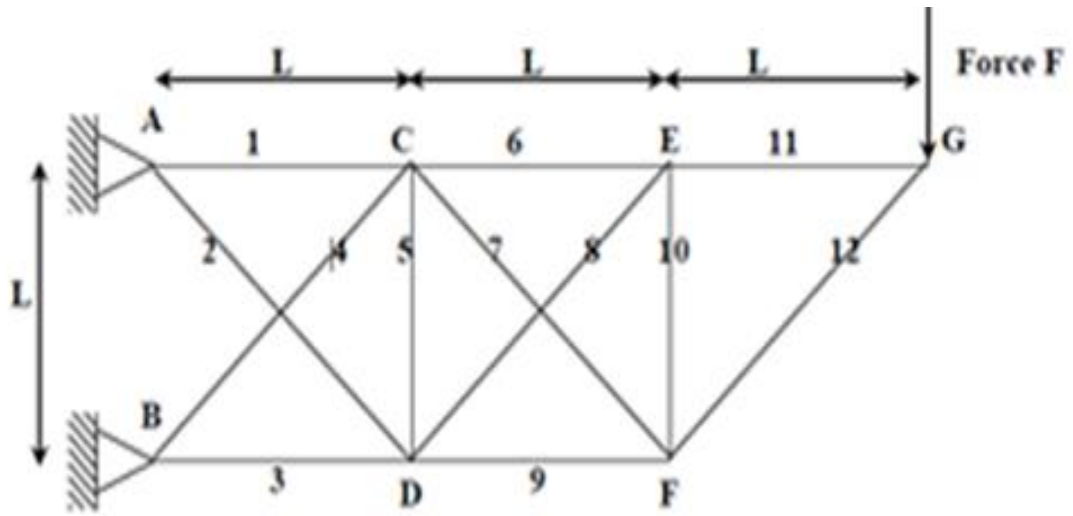
3.6:



3.7 :



3.8 :



3.9 :

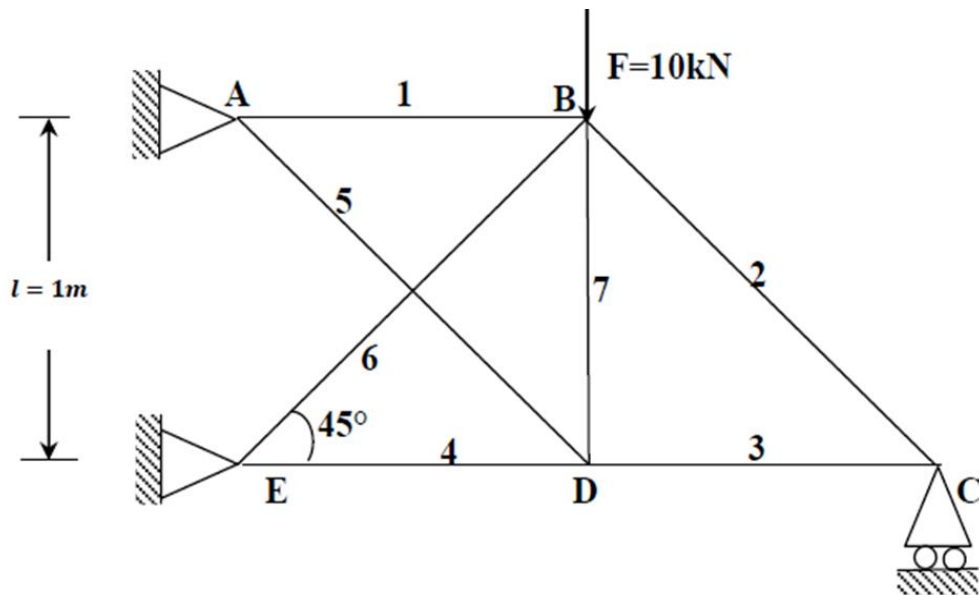
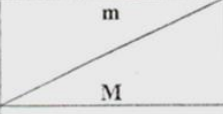



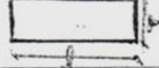


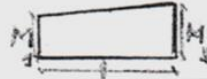
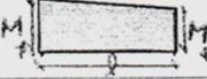

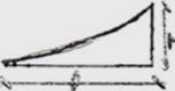






Tableau 2. Intégrale de formule de Mohr : $\frac{1}{EI} \int M \cdot m \cdot dx$

Forme				
Rectangle		Mlm	$\frac{1}{2}Mlm$	$\frac{1}{2}Ml(m_1 + m_2)$
Triangle		$\frac{1}{2}Mlm$	$\frac{1}{3}Mlm$	$\frac{1}{6}Ml(m_1 + 2m_2)$
		$\frac{1}{2}Mlm$	$\frac{1}{6}Mlm$	$\frac{1}{6}Ml(2m_1 + m_2)$
Trapèze		$\frac{1}{2}(M_1 + M_2)lm$	$\frac{1}{6}(M_1 + 2M_2)lm$	$\frac{1}{6}[M_1(2m_1 + m_2) + M_2(m_1 + 2m_2)]l$
		$\frac{1}{2}(M_1 + M_2)lm$	$\frac{1}{6}(M_1 + 2M_2)lm$	$\frac{1}{6}[M_1(2m_1 + m_2) + M_2(m_1 + 2m_2)]l$
Parabole 2 ^{ème} degré		$\frac{2}{3}Mlm$	$\frac{1}{3}Mlm$	$\frac{1}{3}Ml(m_1 + m_2)$
		$\frac{1}{3}Mlm$	$\frac{1}{4}Mlm$	$\frac{1}{12}Ml(m_1 + 3m_2)$
		$\frac{1}{3}Mlm$	$\frac{1}{12}Mlm$	$\frac{1}{12}Ml(3m_1 + m_2)$
		$\frac{2}{3}Mlm$	$\frac{5}{12}Mlm$	$\frac{1}{12}Ml(3m_1 + 5m_2)$
Parabole 3 ^{ème} degré		$\frac{1}{4}Mlm$	$\frac{1}{5}Mlm$	$\frac{1}{4}Ml(m_1 + 4m_2)$
		$\frac{1}{4}Mlm$	$\frac{1}{20}Mlm$	$\frac{1}{20}Ml(4m_1 + m_2)$

Chapitre 4

Les poutres continues

CHAPITRE 4: Les poutres continues

(Application de la méthode des forces)

4.1 INTRODUCTION

Les poutres continues sont des structures qu'on rencontre très fréquemment dans les constructions courantes. On appelle poutre continue une poutre reposant sur plusieurs appuis. Il s'agit généralement d'appuis simples, à l'exception d'un seul qui est un appui double et dont le rôle consiste à assurer la stabilité géométrique de la poutre, comme empêcher la translation horizontale dans le cas de la figure 4.1.

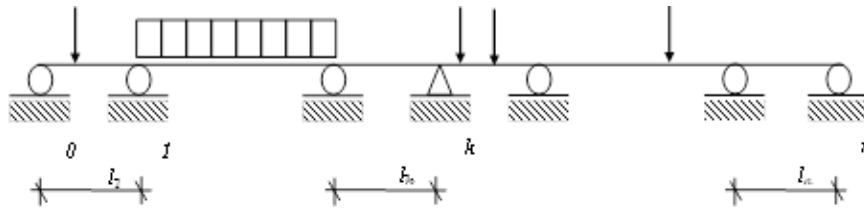


Figure 4.1. Poutre continue avec le mode de numérotation des travées

L'appui double peut être placé à une extrémité ou, plus généralement, être un appui intermédiaire.

Les extrémités d'une poutre continue peuvent très bien comporter des porte-à-faux ou être encastrées. Le traitement de ces cas particuliers est abordé plus loin. Les poutres continues sont des systèmes hyperstatiques puisqu'elles présentent des liaisons surabondantes (toutes les liaisons en plus de ce que doit comporter une poutre isostatique). Dans le cas d'une poutre sans encastremets, le nombre de liaisons surabondantes, donc le degré d'hyperstaticité, est égal au nombre d'appuis intermédiaires.

Les charges considérées ici sont supposées être appliquées statiquement. Elles sont constituées de charges transversales (voire inclinées), concentrées ou réparties, et de couples.

L'influence du moment fléchissant sur les déformations étant prépondérante dans les poutres continues, c'est la seule sollicitation dont il sera tenu compte lors du calcul des déplacements que nous serons amenés à effectuer.

4.2. APPLICATION DIRECTE DE LA METHODE DES FORCES

Considérons une poutre continue horizontale sans encastremets (Figure 4.2.a). L'application directe et intuitive de la méthode des forces conduit à considérer comme inconnues hyperstatiques les réactions (verticales) des appuis intermédiaires.

Le système de base obtenu par suppression des liaisons verticales des appuis intermédiaires est une poutre simplement appuyée (Figure 4.2.b). Dans ce cas, le calcul des moments unitaires m_{sk} (Figure 4.2.c et 4.2.d) et du moment provoqué par les charges extérieures M_{sF} , nécessaires au calcul des coefficients, δ_{ij}^k et δ_{jF}^k : e aucune difficulté.

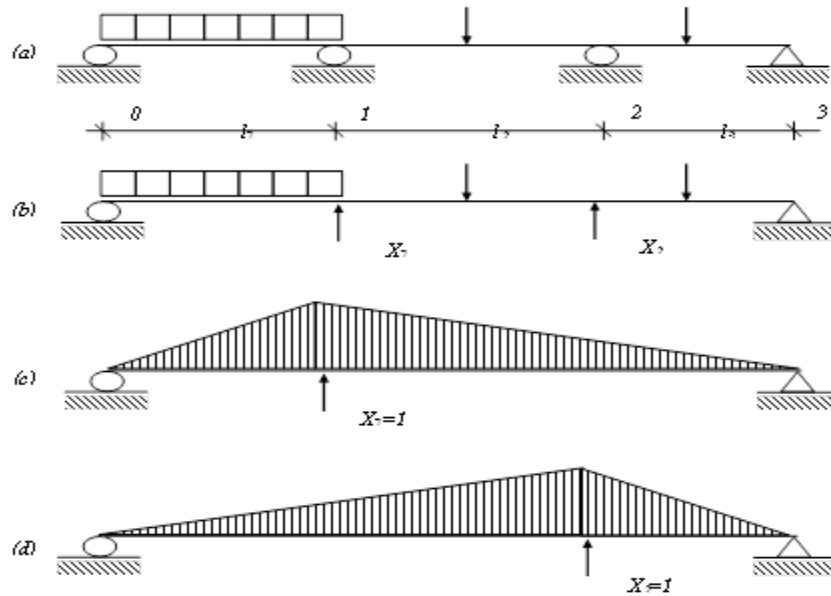


Figure 4.2

Cependant, ce choix n'est pas intéressant car il implique des calculs fastidieux à cause notamment du fait que les moments m_{sk} et M_{sF} sont généralement différents de zéro sur toute la longueur de la poutre. De la sorte, les éléments de la matrice de souplesse $[\delta^k]$ et du vecteur déplacement $[\delta_F^k]$ sont tous non nuls.

Ceci n'est pas la seule raison ; il en existe une autre plus déterminante. Chaque colonne de la matrice $[\delta^k]$ représente les déplacements (flèches s'il s'agit d'une poutre horizontale) des points d'application des inconnues hyperstatiques provoqués par une sollicitation unitaire.

4.3. Formule des trois moments

4.3.1 Etablissement de la formule

Considérons une poutre continue sans encastres à n travées (Figure 4.3).

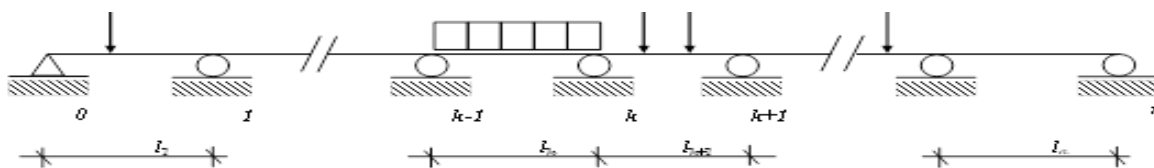


Figure 4.3

Son degré d'hyperstaticité est égal à $n-1$.

Prenons pour inconnues hyperstatiques les moments fléchissants agissant au droit de chaque appui intermédiaire. Pour ce faire, on procède à des coupures de manière à supprimer la liaison de moment au niveau de chaque appui.

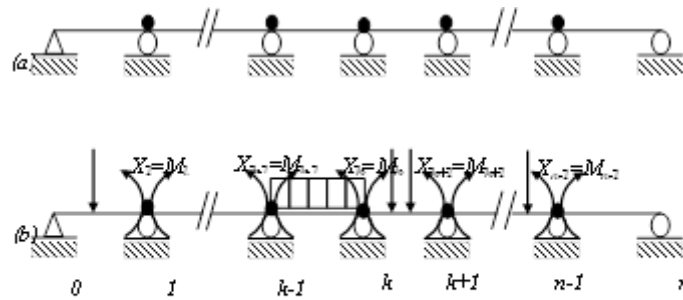


Figure 4.4. Système statique de base

S'agissant d'inconnues hyperstatiques internes, chaque coupure libère deux inconnues (des moments) égales et opposées. En pratique, cela revient à introduire une articulation au-dessus de chaque appui intermédiaire (Figure 4.4.a). Pour remplacer les liaisons supprimées, on applique aux lèvres de chacune des coupures deux couples égaux et opposés (M_1, M_2, \dots, M_{n-1}) (Figure 4.4.b).

Le système statique de base ainsi obtenu présente une propriété remarquable. En effet, on remarque que si on charge une travée, les autres ne subissent aucune influence. Ce résultat signifie que le système principal

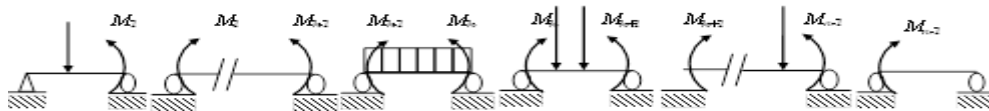


Figure 4.5

se comporte comme une succession de poutres simplement appuyées obtenues par séparation des n travées (Figure 4.5).

Pour calculer les moments inconnus aux appuis, on applique le théorème de Menabrea pour chacun d'eux :

$$\frac{\partial W}{\partial M_1} = c_1, \quad \frac{\partial W}{\partial M_2} = c_2, \quad \dots, \quad \frac{\partial W}{\partial M_k} = c_k, \quad \dots, \quad \frac{\partial W}{\partial M_{n-1}} = c_{n-1}$$

où les c_i représentent les manques de concordance des appuis. Ils sont nuls dans le cas des systèmes concordants. Les équations du système ci-dessus peuvent se mettre sous la forme connue de Müller-Breslau.

L'équation courante relative à l'inconnue M_k s'écrit :

$$\frac{\partial W}{\partial M_k} = c_k \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{ki}^u M_i + \delta_{kF} = c_k$$

En développant l'expression précédente, le système des " $n-1$ " équations de continuité prend la forme :

$$\delta_{11}^u M_1 + \delta_{12}^u M_2 + \dots + \delta_{1n-1}^u M_{n-1} + \delta_{1F} = c_1$$

.....

$$\delta_{k1}^u M_1 + \delta_{k2}^u M_2 + \dots + \delta_{kn-1}^u M_{n-1} + \delta_{kF} = c_k$$

.....

$$\delta_{n-11}^u M_1 + \delta_{n-12}^u M_2 + \dots + \delta_{n-1n-1}^u M_{n-1} + \delta_{n-1F} = c_{n-1}$$

Chacune des équations exprime la condition de continuité de la poutre déformée au-dessus d'un appui.

L'équation k par exemple, exprime que la rotation relative entre

les lèvres de la coupure au-dessus de l'appui k est égale au manque de concordance correspondant. Dans le cas d'un système concordant cette rotation relative est nulle ; ou encore

que la rotation à gauche (θ_k^g) est égale à la rotation à droite

(θ_k^d) ; ce qui signifie aussi qu'en chaque point (appui par

exemple) il n'y a qu'une tangente car la ligne élastique (la déformée) est continue (Figure 4.6).

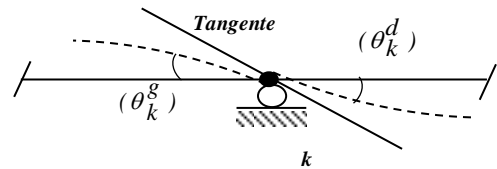


Figure 4.6

Signification des coefficients δ_{ij}^u et δ_{iF}

Les coefficients δ_{ij}^u et δ_{iF} représentent les rotations relatives des lèvres de la section coupée i du système de base. Les premières sont des rotations par unité de couple.

- δ_{ij}^u est la rotation relative des lèvres de la section i du système de base, sous l'effet d'un couple unitaire appliqué aux lèvres de la coupure j (les sections i et j se trouvant dans le cas présent au dessus des appuis intermédiaires i et j).
- δ_{iF} est la rotation relative des lèvres de la section i du système de base, sous l'effet des charges extérieures (notées F).

Considérons par exemple l'équation de continuité k (relative à la coupure k). Elle s'écrit :

$$\delta_{k1}^u M_1 + \delta_{k2}^u M_2 + \dots + \delta_{kk-1}^u M_{k-1} + \delta_{kk}^u M_k + \delta_{kk+1}^u M_{k+1} + \dots + \delta_{kn-1}^u M_{n-1} + \delta_{kF} = c_k \tag{4.1}$$

On voit apparaître dans l'équation les coefficients δ_{kj}^u avec $j = 1, 2, \dots, n-1$ et δ_{kF} . Si nous ne tenons compte que du moment fléchissant, qui est la sollicitation prépondérante, ces coefficients s'obtiennent par les intégrales suivantes :

$$\delta_{kj}^u = \int_0^L \frac{m_{sk} m_{sj}}{EI} dx \quad (a) \quad \delta_{kF} = \int_0^L \frac{M_{sF} m_{sk}}{EI} dx \quad (b) \quad (4.2)$$

$$L = \text{longueur totale} = \sum_{i=1}^n l_i$$

où $m_{sk}(m_k)$ et $m_{sj}(m_j)$ sont les moments fléchissants produits dans la section courante s du système fondamental par les couples unitaires $M_k=1$ et $M_j=1$ agissant en k et en j , respectivement (Figure 4.7). M_{sF} étant le moment fléchissant dans la section courante du système de base sous l'action des charges extérieures (F).

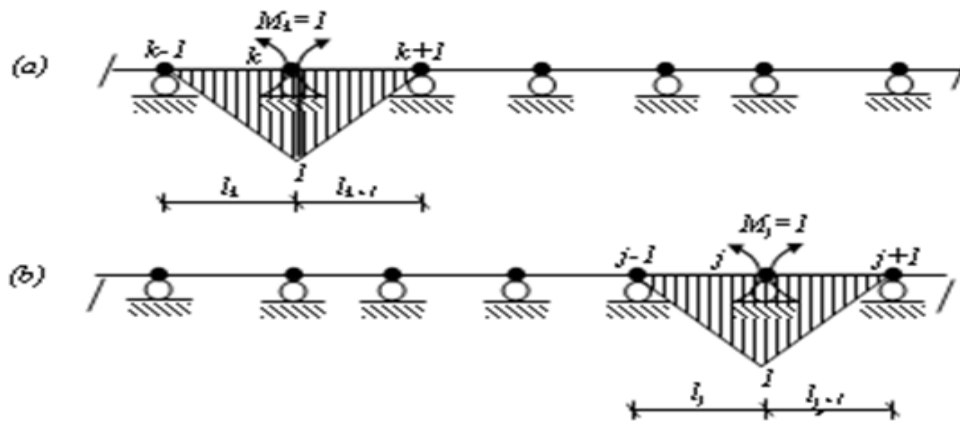


Figure 4.7 : Diagrammes m_{sk} et m_{sj}

On constate que chaque couple unitaire produit un moment fléchissant uniquement sur les deux travées situées de part et d'autre de l'appui où il est appliqué. Pour que les moments dans la section courante s produits par $M_k=1$ et $M_j=1$ soient *simultanément* différents de zéro, il faut que les indices k et j ne diffèrent pas de plus d'une unité. On en déduit que les coefficients δ_{kj}^u sont nuls dès que k diffère de j de plus d'une

unité. Ainsi, dans l'équation (4.1) seuls les coefficients $\delta_{k-1k}^u, \delta_{kk}^u$ et δ_{kk+1}^u sont différents de zéro.

Compte tenu de ce résultat, l'équation générale de continuité (4.1) se simplifie et devient :

$$\delta_{k,k-1}^u M_{k-1} + \delta_{k,k}^u M_k + \delta_{k,k+1}^u M_{k+1} + \delta_{kF} = c_k \quad (4.3)$$

ou encore :

$$\delta_{k,k-1}^u M_{k-1} + \delta_{k,k}^u M_k + \delta_{k,k+1}^u M_{k+1} = c_k - \delta_{kF} \quad (4.4)$$

On remarque que trois moments fléchissants interviennent dans cette équation, d'où son nom de "formule des trois moments".

4.3.2 Calcul des coefficients de la formule des trois moments

Il reste à calculer les coefficients intervenant dans l'équation (4.4). Considérons une poutre continue sans encastrement comportant n travées. Les diagrammes unitaires permettant le calcul des coefficients

δ_{kk-1}^u , δ_{kk}^u et δ_{kk+1}^u sont représentés à la figure 4.9.

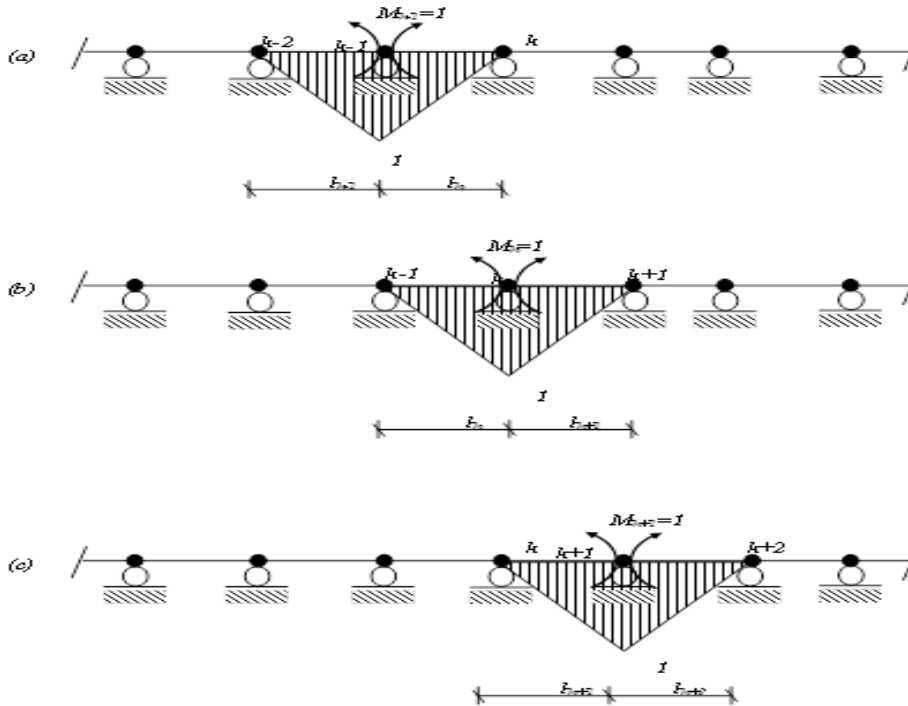


Figure 4.8. Diagrammes unitaires $m_{s,k-1}$, m_{sk} et m_{sk+1}

• Calcul de δ_{kk-1}^u :

$$\delta_{kk-1}^u = \int_0^L \frac{m_{sk} m_{sk-1}}{EI} dx = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{m_{sk} m_{sk-1}}{(EI)_i} dx = \int_0^{l_k} \frac{m_{sk} m_{sk-1}}{(EI)_k} dx \tag{4.5}$$

avec :

$$m_{sk-1} = 1 - \frac{x}{l_k} \text{ et } m_{sk} = \frac{x}{l_k}$$

d'où :

$$\delta_{kk-1}^u = \int_0^{l_k} \frac{x}{l_k} \left(1 - \frac{x}{l_k}\right) \frac{dx}{(EI)_k} = \frac{1}{l_k^2} \int_0^{l_k} \frac{x(l_k - x)}{(EI)_k} dx \tag{4.5}'$$

Si $(EI)_k$ est constante sur l_k , on obtient :

$$\delta_{kk-1}^u = \frac{l_k}{6(EI)_k}$$

Ce dernier résultat - cas avec $(EI)_k$ constante sur la travée l_k - s'obtient plus rapidement avec la méthode graphique ; il vient :

$$\delta_{kk-1}^u = \frac{1}{(EI)_k} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_k \right) \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{l_k}{6(EI)_k}$$

Si la rigidité flexionnelle varie sur chaque travée, on calcule les coefficients analytiquement comme on l'a

fait pour δ_{kk-1}^u .

Pour le reste des calculs nous supposons que EI est constante sur chaque travée.

• Calcul de δ_{kk}^u (méthode graphique)

$$\delta_{kk}^u = \frac{1}{(EI)_k} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_k \right) \left(\frac{2}{3} \right) + \frac{1}{(EI)_{k+1}} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_{k+1} \right) \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{l_k}{3(EI)_k} + \frac{l_{k+1}}{3(EI)_{k+1}} \quad (4.6)$$

• Calcul de δ_{kk+1}^u (méthode graphique)

$$\delta_{kk+1}^u = \frac{1}{(EI)_{k+1}} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_{k+1} \right) \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{l_{k+1}}{6(EI)_{k+1}} \quad (4.7)$$

• Calcul de δ_{kF}

Par définition, voir relation 4.2 (a) :

$$\delta_{kF} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{m_{sk} M_{sF}}{(EI)_i} dx = \int_0^{l_k} \frac{m_{sk} M_{sF}}{(EI)_k} dx + \int_0^{l_{k+1}} \frac{m_{sk} M_{sF}}{(EI)_{k+1}} dx \quad (4.8)$$

Seules les deux intégrales sur l_k et l_{k+1} subsistent puisque m_{sk} est nul en dehors de ces travées. Soit :

$$\delta_{kF} = R_k^{g(F)} + R_k^{d(F)} \quad (4.9)$$

- $R_k^{g(F)}$ = rotation de la section k (au-dessus de l'appui k) du système statique de base sous l'effet des charges extérieures agissant sur la travée l_k .

- $R_k^{d(F)}$ = rotation de la section k du système statique de base sous l'effet des charges appliquées sur la travée l_{k+1} .

• Calcul pratique de δ_{kF}

1^{ère} méthode

Considérons les travées l_k et l_{k+1} (du système isostatique de base) adjacentes à l'appui considéré k . Les deux travées constituent deux poutres simplement appuyées comme on l'a vu.

Le diagramme des moments fléchissants de chaque poutre sous les charges extérieures peut être aisément obtenu. Selon la méthode de la poutre conjuguée, utilisée pour le calcul des déplacements des systèmes isostatiques (voir chapitre 2), si on charge (fictivement) les poutres par leurs diagrammes des moments

respectifs divisés par la rigidité flexionnelle ($q_f = M_{sF}/EI$), alors $R_k^g(F)$ et $R_k^d(F)$ constituent la réaction en k de la poutre de gauche et la réaction en k de la poutre de droite, respectivement (Figure 4.9).

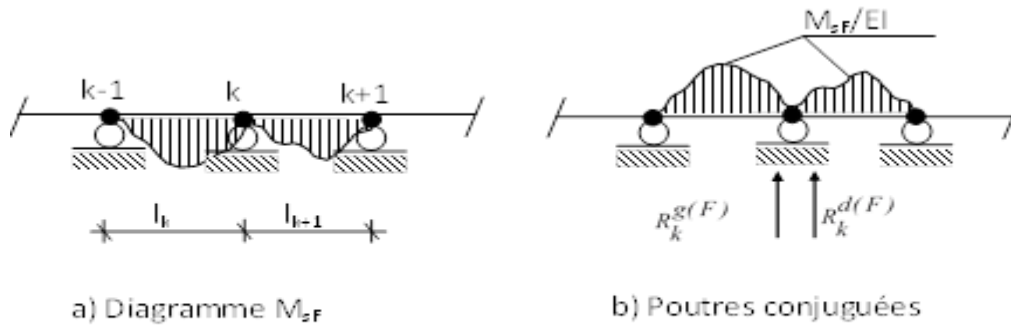


Figure 4.9

2^{ème} méthode

Sachant que le moment m_{sk} vaut “ x/l_k ” sur la travée l_k et “ $1-x/l_{k+1}$ ” sur la travée l_{k+1} , l'équation (4.8) devient

$$\begin{aligned} \delta_{kF} &= \int_0^{l_k} \frac{M_{sF} x}{l_k (EI)_k} dx + \int_0^{l_{k+1}} \frac{M_{sF}}{(EI)_{k+1}} \left(1 - \frac{x}{l_{k+1}}\right) dx \\ &= \frac{1}{l_k} \int_0^{l_k} \frac{x M_{sF}}{(EI)_k} dx + \frac{1}{l_{k+1}} \int_0^{l_{k+1}} \frac{(l_{k+1} - x) M_{sF}}{(EI)_{k+1}} dx \end{aligned}$$

La première intégrale représente le moment statique du diagramme “ $M_{sF}/(EI)_k$ ” sur la travée l_k par rapport à l'appui “ $k-1$ ” alors que la deuxième donne le moment statique du diagramme “ $M_{sF}/(EI)_{k+1}$ ” sur la travée l_{k+1} par rapport à l'appui $k+1$. L'équation précédente peut s'écrire :

$$\delta_{kF} = \frac{S_k}{l_k} + \frac{\bar{S}_{k+1}}{l_{k+1}} \tag{4.10}$$

où S_k et \bar{S}_{k+1} sont les moments statiques définis plus haut.

Dans le cas où la rigidité flexionnelle est constante sur chaque travée, l'expression précédente prend la forme :

$$\delta_{kF} = \frac{I}{l_k (EI)_k} \Omega_k z_k + \frac{I}{l_{k+1} (EI)_{k+1}} \Omega_{k+1} \bar{z}_{k+1} \quad (4.11)$$

- Ω_k est l'aire du diagramme M_{SF} sur la travée l_k .
- Ω_{k+1} est l'aire du diagramme M_{SF} sur la travée l_{k+1} .
- z_k distance de l'appui " $k-1$ " au centre de gravité de Ω_k .
- \bar{z}_{k+1} distance de l'appui " $k+1$ " au centre de gravité de Ω_{k+1} .
- Calcul de c_k

Le manque de concordance d'un appui est représenté par le déplacement linéaire ou angulaire qu'il subit depuis sa position concordante jusqu'à sa position réelle. Dans le cas présent, les manques de concordance à introduire sont des déplacements angulaires et la position concordante correspond à la position horizontale.

Les manques de concordance proviennent des dénivellations Δ que peuvent subir les appuis (Figure 4.10).

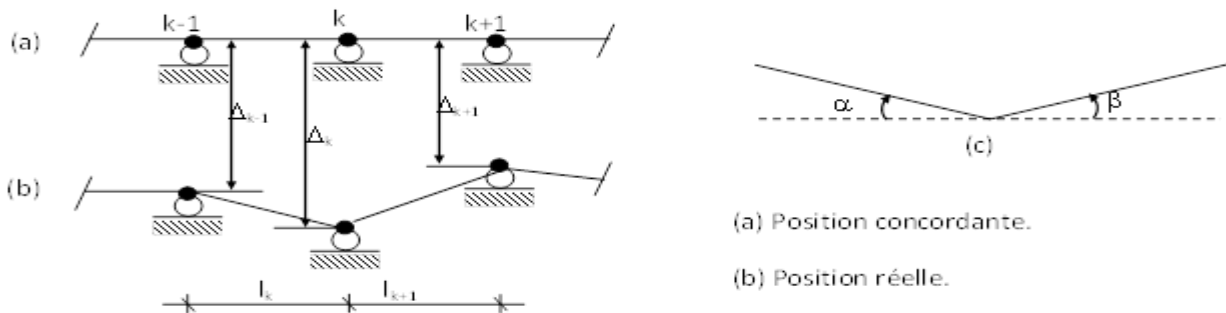


Figure 4.10

Comme nous travaillons dans le cadre des petits déplacements, les dénivellations sont suffisamment petites et de ce fait les angles de discontinuité (Figure 6.11c) peuvent être confondus avec leurs tangentes.

Le manque de concordance est donné par :

$$\begin{aligned} c_k &= \alpha + \beta = \text{tg} \alpha + \text{tg} \beta = (\Delta_k - \Delta_{k-1})/l_k + (\Delta_k - \Delta_{k+1})/l_{k+1} \\ &= (\Delta_k - \Delta_{k-1})/l_k - (\Delta_{k+1} - \Delta_k)/l_{k+1} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Les dénivellations sont comptées positivement vers le bas.

En introduisant dans l'équation des trois moments (6.4) les valeurs trouvées des différents coefficients on obtient :

$$\begin{aligned}
 & M_{k-1} \int_0^{l_k} \frac{m_{sk} m_{sk-1}}{(EI)_k} dx + M_k \left[\int_0^{l_k} \frac{m_{sk}^2}{(EI)_k} dx + \int_0^{l_{k+1}} \frac{m_{sk}^2}{(EI)_{k+1}} dx \right] + \\
 & + M_{k+1} \int_0^{l_{k+1}} \frac{m_{sk} m_{sk+1}}{(EI)_{k+1}} dx = \\
 & = \frac{\Delta_k - \Delta_{k-1}}{l_k} - \frac{\Delta_{k+1} - \Delta_k}{l_{k+1}} - \int_0^{l_k} \frac{m_{sk} M_{sF}}{(EI)_k} dx - \int_0^{l_{k+1}} \frac{m_{sk} M_{sF}}{(EI)_{k+1}} dx
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}
 & \frac{M_{k-1}}{l_k^2} \int_0^{l_k} \frac{x(l_k - x)}{(EI)_k} dx + M_k \left[\frac{1}{l_k^2} \int_0^{l_k} \frac{x^2}{(EI)_k} dx + \frac{1}{l_{k+1}^2} \int_0^{l_{k+1}} \frac{(l_{k+1} - x)^2}{(EI)_{k+1}} dx \right] + \\
 & + \frac{M_{k+1}}{l_{k+1}^2} \int_0^{l_{k+1}} \frac{x(l_{k+1} - x)}{(EI)_{k+1}} dx = \frac{\Delta_k - \Delta_{k-1}}{l_k} - \frac{\Delta_{k+1} - \Delta_k}{l_{k+1}} \\
 & - \frac{1}{l_k} \int_0^{l_k} \frac{x M_{sF}}{(EI)_k} dx - \frac{1}{l_{k+1}} \int_0^{l_{k+1}} \frac{(l_{k+1} - x) M_{sF}}{(EI)_{k+1}} dx
 \end{aligned} \tag{4.13}'$$

Ces expressions sont valables dans le cas général.

Cas particuliers

1) Chaque travée a sa rigidité flexionnelle constante.

$$\begin{aligned}
 & M_{k-1} \frac{l_k}{(EI)_k} + 2M_k \left[\frac{l_k}{(EI)_k} + \frac{l_{k+1}}{(EI)_{k+1}} \right] + M_{k+1} \frac{l_{k+1}}{(EI)_{k+1}} = \\
 & = 6 \left[\frac{\Delta_k - \Delta_{k-1}}{l_k} - \frac{\Delta_{k+1} - \Delta_k}{l_{k+1}} \right] - \frac{6}{l_k (EI)_k} \int_0^{l_k} M_{sF} x dx \\
 & - \frac{6}{l_{k+1} (EI)_{k+1}} \int_0^{l_{k+1}} M_{sF} (l_{k+1} - x) dx
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

2) Rigidité flexionnelle constante sur toute la poutre.

$$\begin{aligned}
 & M_{k-1} l_k + 2M_k (l_k + l_{k+1}) + M_{k+1} l_{k+1} = \\
 & = 6EI \left[\frac{\Delta_k - \Delta_{k-1}}{l_k} - \frac{\Delta_{k+1} - \Delta_k}{l_{k+1}} \right] - \frac{6}{l_k} \int_0^{l_k} M_{sF} x dx \\
 & - \frac{6}{l_{k+1}} \int_0^{l_{k+1}} M_{sF} (l_{k+1} - x) dx
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

3) Le système est concordant et EI est constante sur toute la poutre.

$$\begin{aligned}
 & M_{k-1} l_k + 2M_k (l_k + l_{k+1}) + M_{k+1} l_{k+1} = \\
 & = -\frac{6}{l_k} \int_0^{l_k} M_{sF} x dx - \frac{6}{l_{k+1}} \int_0^{l_{k+1}} M_{sF} (l_{k+1} - x) dx
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

On peut remplacer le second membre par la réaction fictive agissant en k : $R_k^F = R_k^{g(F)} + R_k^{d(F)}$. Cette réaction est positive si elle est dirigée de bas en haut.

On écrit l'équation des trois moments pour chaque appui intermédiaire.

4.3.3 Points particuliers

- 1) Présence d'un encastrement : on remplace l'encastrement par une poutre adjacente dont on fera tendre la longueur vers zéro en appliquant la formule des trois moments.
- 2) Présence d'un porte-à-faux (console) : la console sera remplacée par ses effets, pour l'application de la formule des trois moments.
- 3) Couple concentré en un appui intermédiaire : on peut soit le diviser entre les deux travées adjacentes, soit le reporter sur l'une des deux.

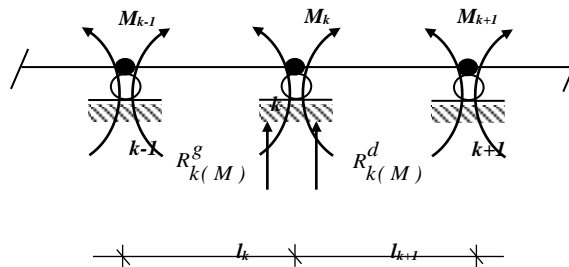
4.3.4 Calcul des éléments de réduction

1) Réaction de l'appui k

- Action des moments aux appuis seuls (Figure 4.11).

$$R_{k(M)}^g = \frac{M_{k-1} - M_k}{l_k};$$

$$R_{k(M)}^d = \frac{M_{k+1} - M_k}{l_{k+1}}$$



- Action des forces extérieures :

$$R_{k(F)} = R_{k(F)}^g + R_{k(F)}^d$$

d'où :

$$R_k = R_{k(F)} + \frac{M_{k-1} - M_k}{l_k} + \frac{M_{k+1} - M_k}{l_{k+1}} \tag{4.17}$$

Figure 4.11

2) Moment fléchissant

Le diagramme final est obtenu par superposition des diagrammes (des travées isostatiques) des charges extérieures et des moments appliqués aux appuis. Cherchons l'expression du moment fléchissant dans la section courante de la travée l_k (d'abscisse x par rapport à l'appui $k-1$). Chaque travée l_k du système de base se comporte comme une poutre bi-articulée sollicitée, en plus des charges extérieures, par deux couples M_{k-1} et M_k appliqués à ses appuis. Si on désigne par $M_k(F)$ le moment produit dans la section courante de l_k par les charges extérieures qui lui sont appliquées, alors l'expression générale du moment fléchissant s'écrit :

$$M_s = M_{s(F)} + M_{k-1} + (M_k - M_{k-1}) \frac{x}{l_k} \tag{4.18}$$

3) Effort tranchant

L'expression de l'effort tranchant dans la section courante d'abscisse x s'obtient en dérivant par rapport à x l'expression du moment. Désignons par $T_k(F)$ l'effort tranchant dû aux charges extérieures ; il vient :

$$T_s = T_{s(F)} + \frac{M_k - M_{k-1}}{l_k} \quad (4.19)$$

4.3.5 Exemple d'application

Considérons une poutre à trois travées égales et à inertie constante soumise à une charge uniforme q (Figure 4.12a). La poutre est deux fois hyperstatique mais compte tenu de la symétrie, il n'y a qu'une seule inconnue. On écrit une fois l'équation des trois moments, pour $k=1$.

$$M_0 = M_3 = 0$$

$$\text{et } M_1 = M_2 = M$$

Equation des trois moments (appui 1) :

$$\begin{aligned} M_0 l_0 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 &= \\ &= -6EI(R_I^{g(F)} + R_I^{d(F)}) \\ 5Ml &= -6EI(2R_I^{g(F)}); \quad R_I^{g(F)} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} l \right) = \frac{ql^3}{24EI} \Rightarrow M = -\frac{ql^2}{10}, \quad M \text{ est dirigé dans le sens opposé du sens} \\ R_I^{g(F)} &= R_I^{d(F)} \\ 5Ml &= -12EI R_I^{g(F)} \end{aligned}$$

choisi arbitrairement. Les figures 4.12g et 4.12h montrent les diagrammes de M et de T .

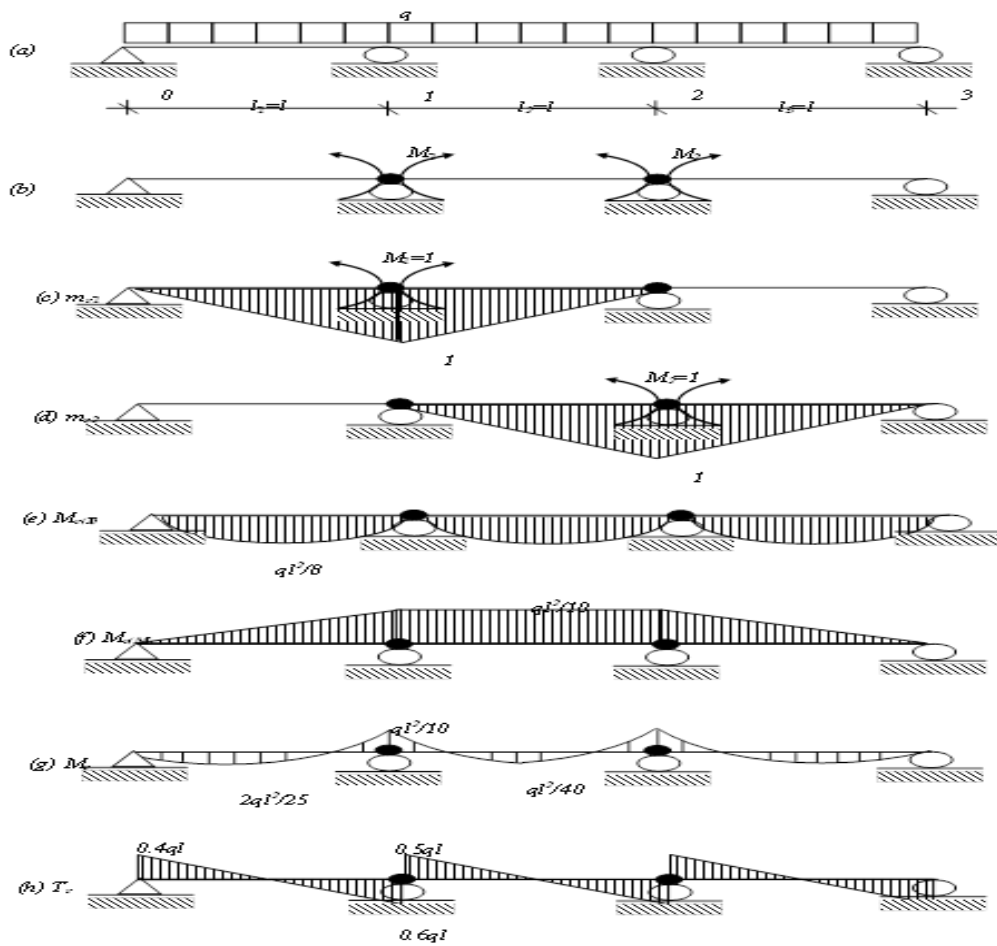
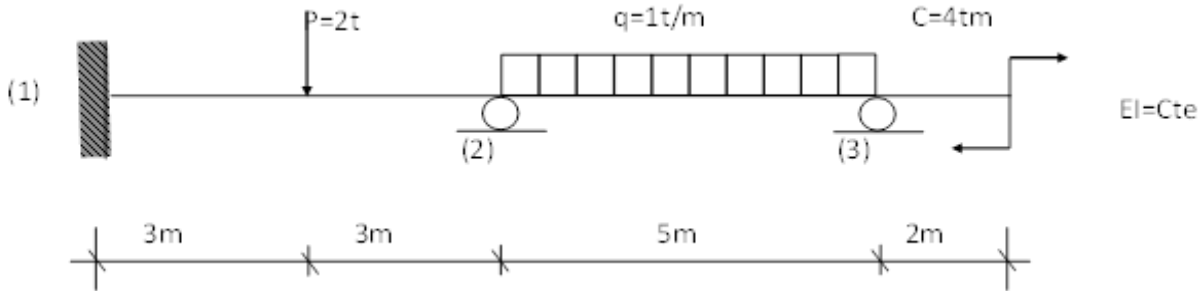


Figure 4.12

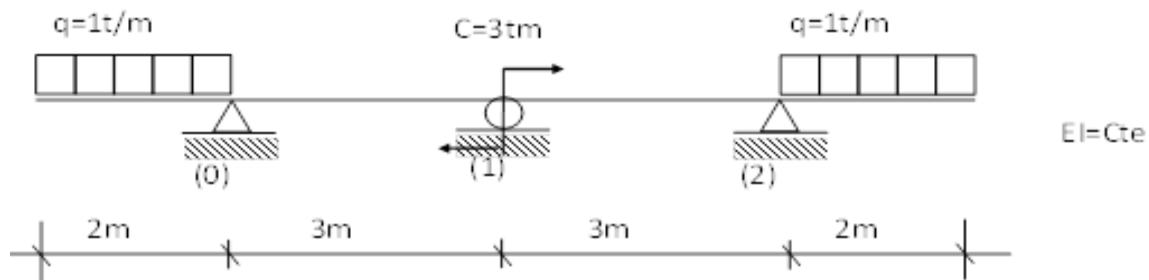
Exercices / Chapitre 4

Calculer les moments aux appuis et les réactions et tracer les diagrammes du moment fléchissant et de l'effort tranchant des poutres continues ci-dessous.

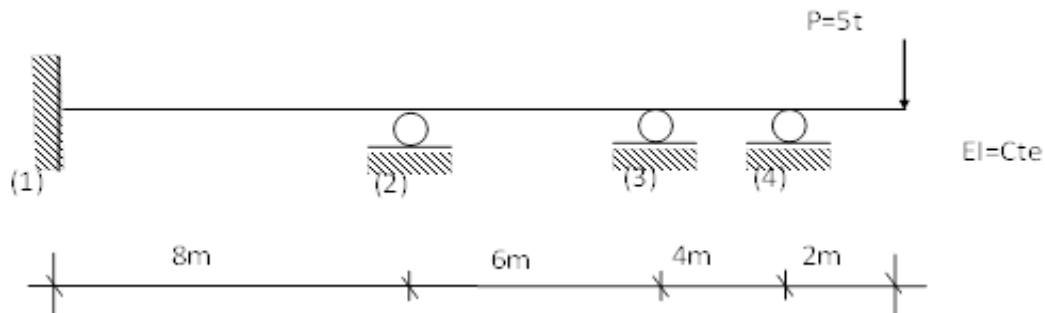
4.1 :



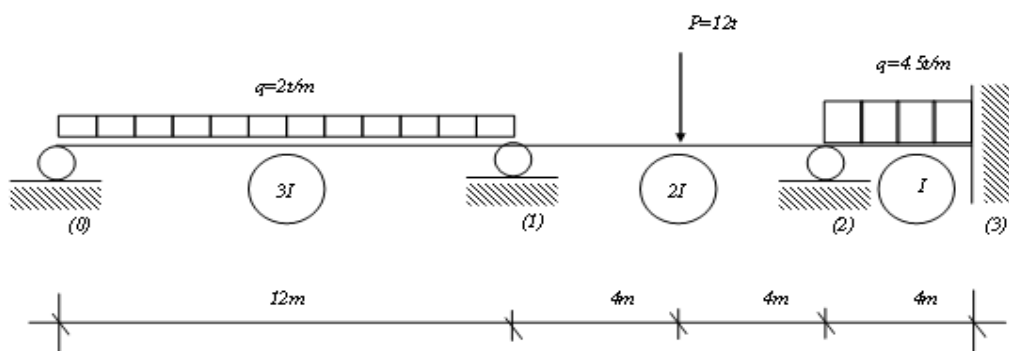
4.2 :



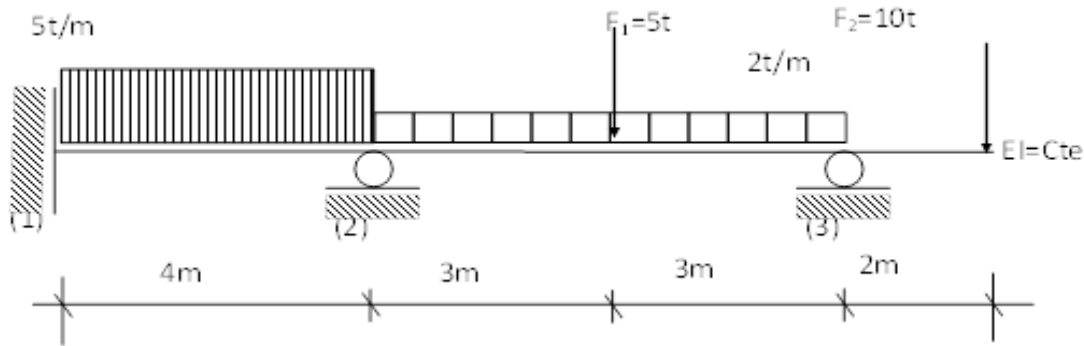
4.3 :



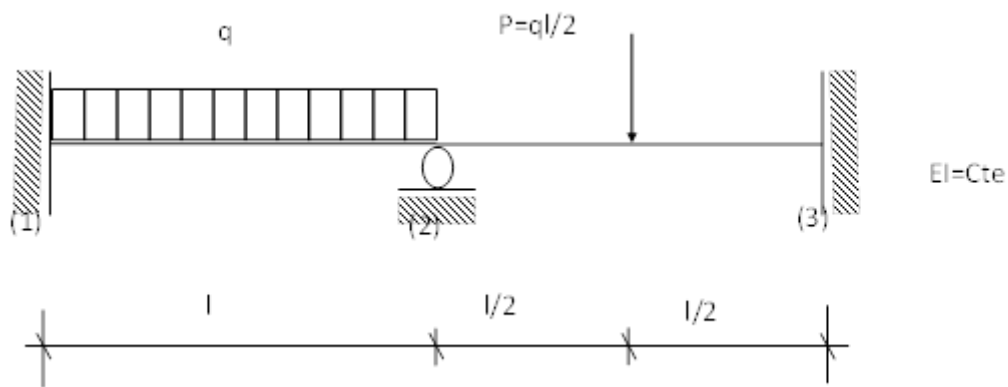
4.4 :



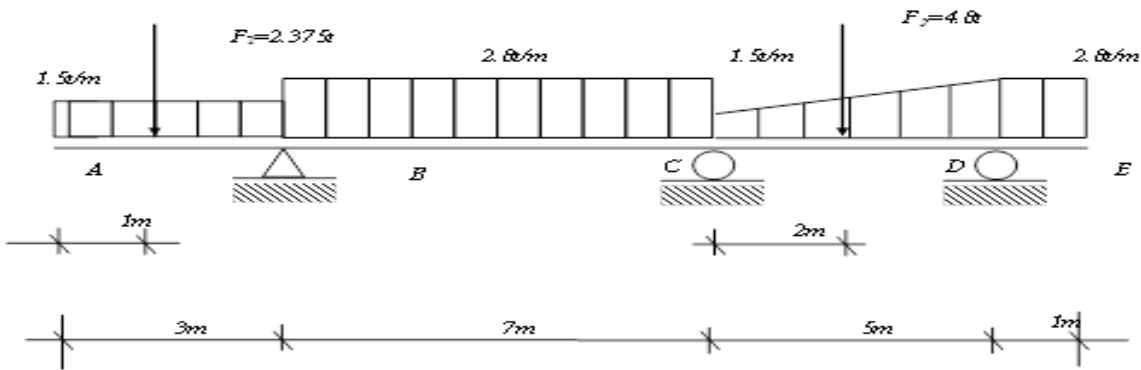
4.5 :



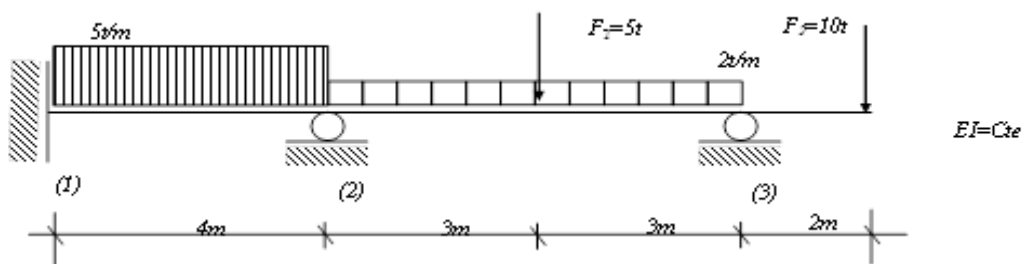
4.6 :



4.7 :



4.8 :



Chapitre 5

Les Treillis hyperstatiques

CHAPITRE 5: TREILLIS HYPERSTATIQUES (Application de la méthode des forces)

5.1 Introduction

Les treillis sont très largement utilisés en construction. Qu'il s'agisse de structures faites d'acier, de bois ou autre, les treillis se retrouvent dans les fermes de toiture, de grues, de ponts roulants, de pylônes, etc. On fait appel à ce mode de réalisation dans le but essentiel d'alléger l'ensemble d'une construction tout en assurant une plus grande stabilité. Les treillis sont des structures dont les pièces sont assemblées de façon à former des triangles. Le triangle a été pris comme base de ces constructions parce qu'il est la seule figure géométrique indéformable. Les treillis peuvent être sollicités par des forces externes comme les charges à supporter, le poids propre de la structure, le poids de la neige, le trafic, les réactions d'appuis, ... tandis que les pièces de ces structures sont soumises à des forces internes de la part des pièces voisines. Ces efforts internes et externes doivent être déterminées pour pouvoir choisir les matériaux requis dans la réalisation des constructions. Des pièces trop grosses ne sont pas économiques par contre des pièces trop petites ne sont pas sécuritaires. Pour pouvoir calculer la structure comme un treillis, **certaines hypothèses** sont posées :

- ✓ les articulations entre barres sont considérées comme parfaites ;
- ✓ les charges sont appliquées au nœud ;
- ✓ les axes des barres doivent concourir aux nœuds.

La première étape consiste à déterminer la nature du treillis. En effet, comme n'importe quelle structure (portiques par exemple), il existe des treillis hyperstatiques. On pose : b : le nombre de barres ; L : le nombre de réactions d'appuis ; n : le nombre de nœuds.

- Si $b + L < 2n$, la structure est hypostatique ;
- Si $b + L = 2n$, la structure est isostatique ;
- Si $b + L > 2n$, **la structure est hyperstatique** ;

Pour le calcul des efforts internes dans les structures en treillis hyperstatiques ce fait par l'application directe de la méthode des forces selon les étapes suivantes:

5.2. Les étapes de calcul des efforts internes dans d'un treillis hyperstatique par la méthode des forces

5.2.1. Calcul du degré d'hyperstaticité d'un treillis

La procédure décrite dans le **chapitre 3** est applicable aux treillis. Il est cependant possible de la simplifier pour l'adapter à ceux-ci. Soit b : le nombre total de barres, L : le nombre de liaisons dans les d'appuis et n : le nombre total de noeuds. Le degré d'hyperstaticité (H) vaut donc : $H = (b + L) - (2n) \dots \dots \dots (5.1)$.

EXEMPLES D'APPLICATION

Exemple 1 : (inconnues hyperstatiques externes)

Soit à résoudre la poutre en treillis hyperstatique indiquée sur la **Figure 5.1**, le module d'élasticité **E** et la section **S** identiques pour toutes les barres ($S=2 \times 10^{-3} \text{m}^2$, $E= 2 \times 10^7 \text{ t/m}^2$). Calculer le degré d'hyperstaticité et déterminer les efforts dans tous les barres (En appliquant la méthode des forces).

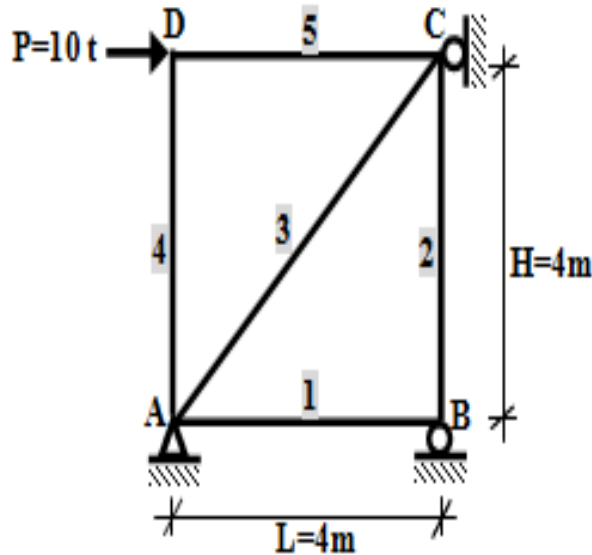


Figure 5.1.

Solution : Le degré d'hyperstaticité: $H=(b+l)-2 \times n = (5+4)-2 \times 4 = 1 \Rightarrow \boxed{H = 1}$

Pour le calcul des efforts normaux ou internes dans le système hyperstatique **externe** on utilisant la méthode des forces.

5.2.2. Le système de base (système isostatique):

Le degré d'hyperstaticité $H=1$, on choisit comme inconnus la réaction verticale à l'appui C ($X_1 = R_c^V$) voir la **Figure 5.2**.

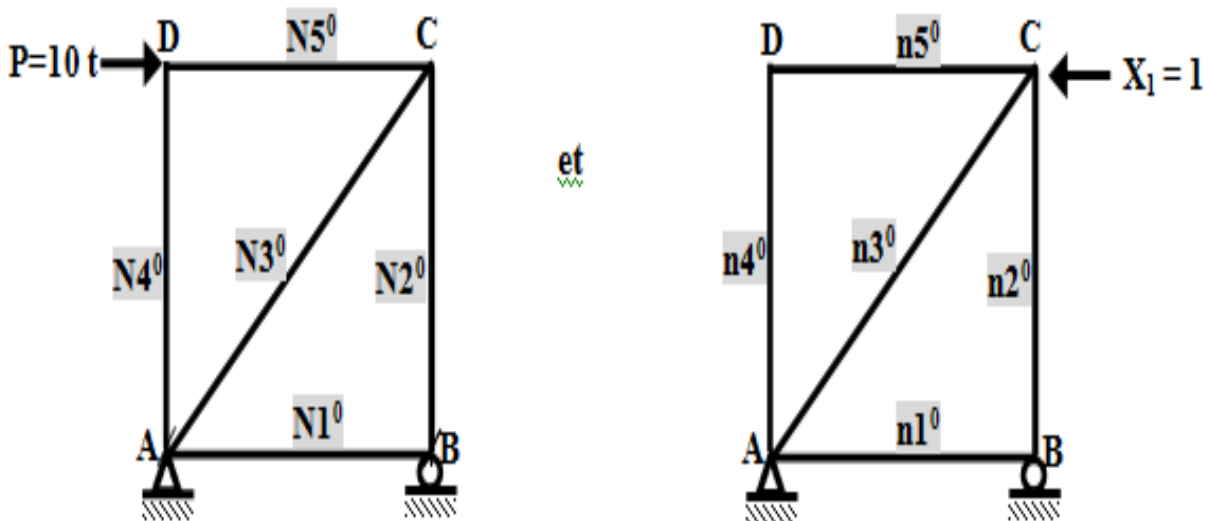


Figure 5.2.

On détermine l'inconnu X_1 par l'équation de continuité (la formule de Müller – Breslau).

5.2.3. L'équation de continuité (la formule de Müller – Breslau).

On détermine l'inconnu X_1 par l'équation (5.2) de continuité (la formule de Müller - Breslau) :

$$\delta_{11}^U \cdot X_1 + \delta_{1F} = 0 \dots \dots \dots (5.2) \quad \rightarrow \quad X_1 = \frac{-\delta_{1F}}{\delta_{11}^U}$$

Sachant que :

$$\begin{cases} \delta_{1F} = \sum_{k=1}^5 \frac{N_k^0 \cdot n_k^0 \cdot L_k}{ES_k} \\ \delta_{11}^U = \sum_{k=1}^5 \frac{n_k^0 \cdot n_k^0 \cdot L_k}{ES_k} \end{cases}$$

Le calcul des efforts internes des barres se fait par la méthode des nœuds. Le tableau 5.1 ci-dessous reprend les valeurs de ces efforts normaux

Tableau 5.1

Barre	ES_k	L_k	N_k^0	n_k^0	$N_k = N_k^0 + n_k^0 \cdot X_1$
1	$4 \cdot 10^4$	4	0	0	0
2	$4 \cdot 10^4$	4	-10	1	0
3	$4 \cdot 10^4$	$4\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0
4	$4 \cdot 10^4$	4	0	0	0
5	$4 \cdot 10^4$	4	-10	0	-10

$$\delta_{1F} = \frac{-40 - 80\sqrt{2}}{ES}$$

et

$$\delta_{11}^U = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{ES}$$

où $X_1 = \frac{-\delta_{1F}}{\delta_{11}^U} = 10 \text{ t} = R_c^V$

$X_1 = R_c^V = 10 \text{ t}$

5.3. Exemple 2 : (inconnues hyperstatiques intérieurement)

Soit à résoudre la poutre en treillis hyperstatique indiquée sur la Figure 5.3, le module d'élasticité E et la section S identiques pour toutes les barres ($S=2 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, $E= 2 \times 10^7 \text{ t/m}^2$). Déterminer le degré d'hyperstaticité et calculer les efforts internes dans toutes les barres.

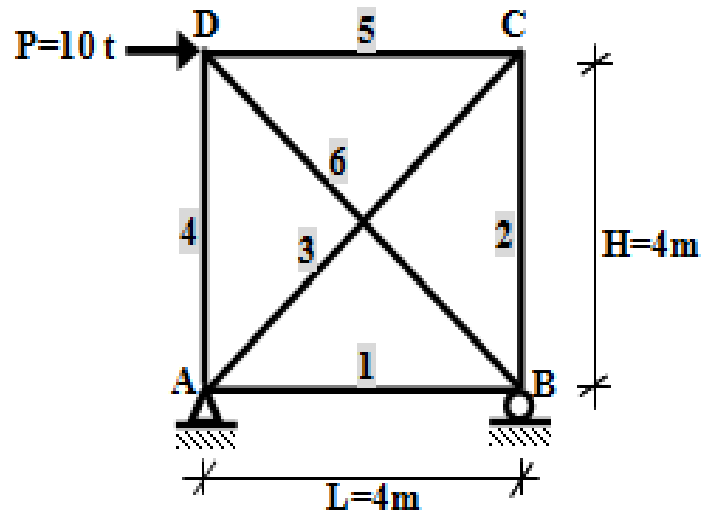


Figure 5.3

Solution d'exemple 2 :

1- Le degré d'hyperstaticité: $H=(b+l)-2 \times n=(6+3)-2 \times 4=1 \Rightarrow H=1$

Pour le calcul des efforts normaux ou internes dans le système hyperstatique **intérieure** on utilisant la méthode des forces.

2- Le système de base (système isostatique):

Le degré d'hyperstaticité $H=1$, on choisit comme inconnus l'effort normal de la barre 6 (N_6) ($X_1=N_6$) voir la Figure 5.4.

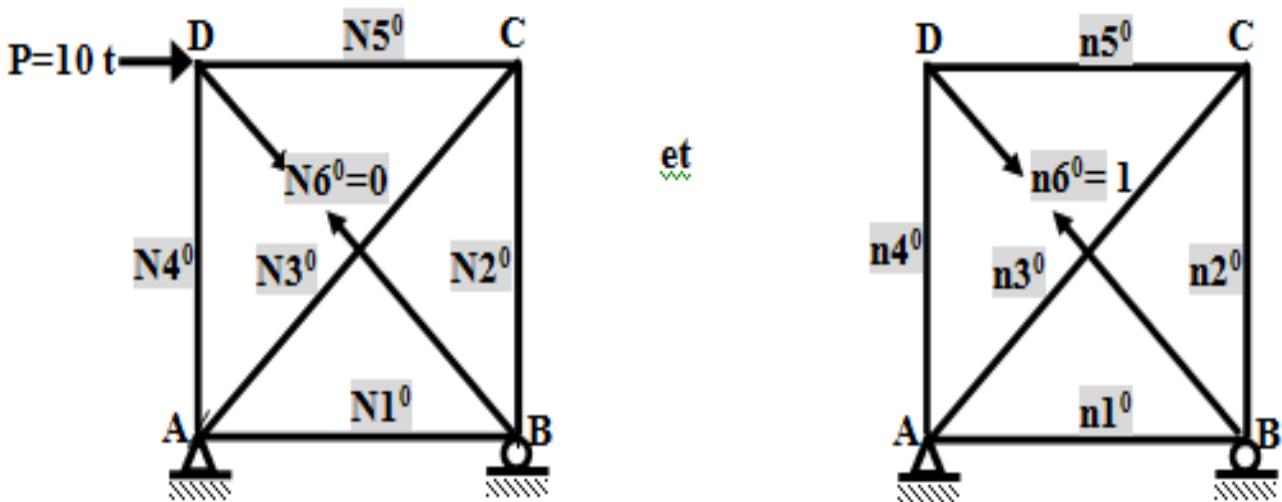


Figure 5.4.

3- L'équation de continuité (la formule de Müller – Breslau) :

On déterminer l'inconnus X_1 par l'équation (5.2) de continuité (la formule de Müller - Breslau) :

$$\delta_{11}^U \cdot X_1 + \delta_{1F} = 0 \dots\dots\dots (5.2) \quad \rightarrow \quad X_1 = \frac{-\delta_{1F}}{\delta_{11}^U}$$

$$\text{Sachant que : } \begin{cases} \delta_{1F} = \sum_{k=1}^6 \frac{N_k^0 \cdot n_k^0 \cdot L_k}{ES_k} \\ \delta_{11}^U = \sum_{k=1}^6 \frac{n_k^0 \cdot n_k^0 \cdot L_k}{ES_k} \end{cases}$$

Le calcul des efforts internes des barres se fait par la méthode des nœuds. Le tableau 5.2 ci-dessous reprend les valeurs de ces efforts normaux

Tableau 5.2

Barre	ES_k	L_k	N_k^0	n_k^0	$N_k = N_k^0 + n_k^0 \cdot X_1$
1	$4 \cdot 10^4$	4	0	$-\sqrt{2}/2$	5,000
2	$4 \cdot 10^4$	4	-10	$-\sqrt{2}/2$	-5,000
3	$4 \cdot 10^4$	$4\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	1	7,071
4	$4 \cdot 10^4$	4	0	$-\sqrt{2}/2$	5,000
5	$4 \cdot 10^4$	4	-10	$-\sqrt{2}/2$	-5,000
6	$4 \cdot 10^4$	$4\sqrt{2}$	0	1	-7,071

$$\delta_{1F} = \frac{80 + 40\sqrt{2}}{ES}$$

et

$$\delta_{11}^U = \frac{8 + 8\sqrt{2}}{ES}$$

où $X_1 = \frac{-\delta_{1F}}{\delta_{11}^U} = -5\sqrt{2}t = N_6$
 $N_6 = -7.071 t$

5.4. Exemple 3 : (deux inconnues hyperstatiques intérieurement)

Soit à résoudre la poutre en treillis hyperstatique indiquée sur la **Figure 5.5**, le module d'élasticité **E** et la section **S** identiques pour toutes les barres ($S=2 \times 10^{-3} m^2$, $E= 2 \times 10^7 t/m^2$). Déterminer le degré d'hyperstaticité et calculer les efforts internes dans tous les barres.

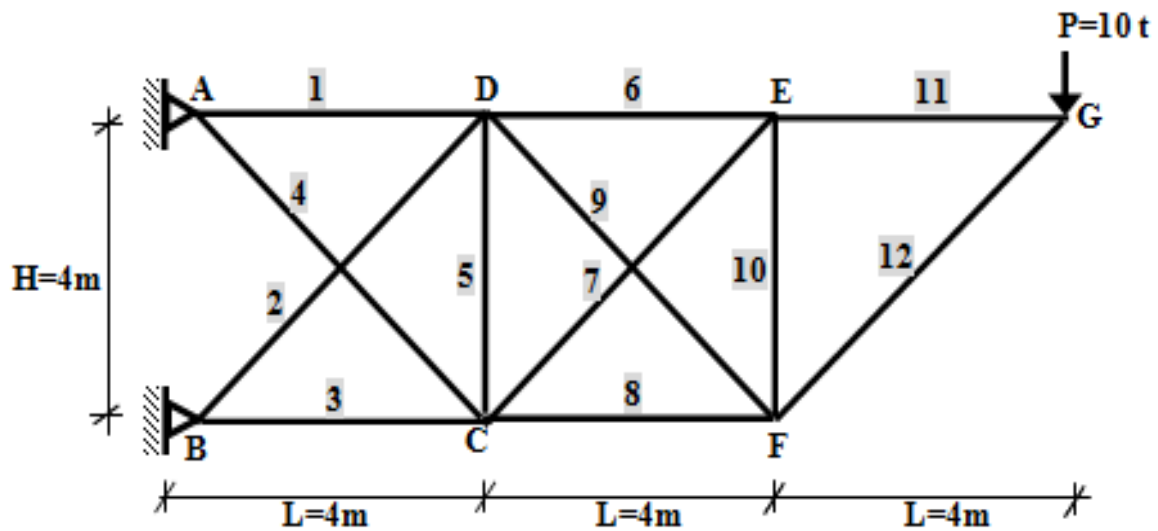


Figure 5.5

Solution d'exemple 3 :

1- Le degré d'hyperstaticité: $H=(b+l)-2 \times n = (12+4)-2 \times 7 = 2 \Rightarrow \boxed{H=2}$

Pour le calcul des efforts normaux ou internes dans le système hyperstatique **intérieure** on utilisant la méthode des forces.

2- Le système de base (système isostatique):

Le degré d'hyperstaticité $H=2$, on choisit comme deux inconnus l'effort normal de la barre 4 (N_4) ($X_1= N_4$) et l'effort normal de la barre 9 (N_9) ($X_2= N_9$) la barre voit la **Figure 5.6**.

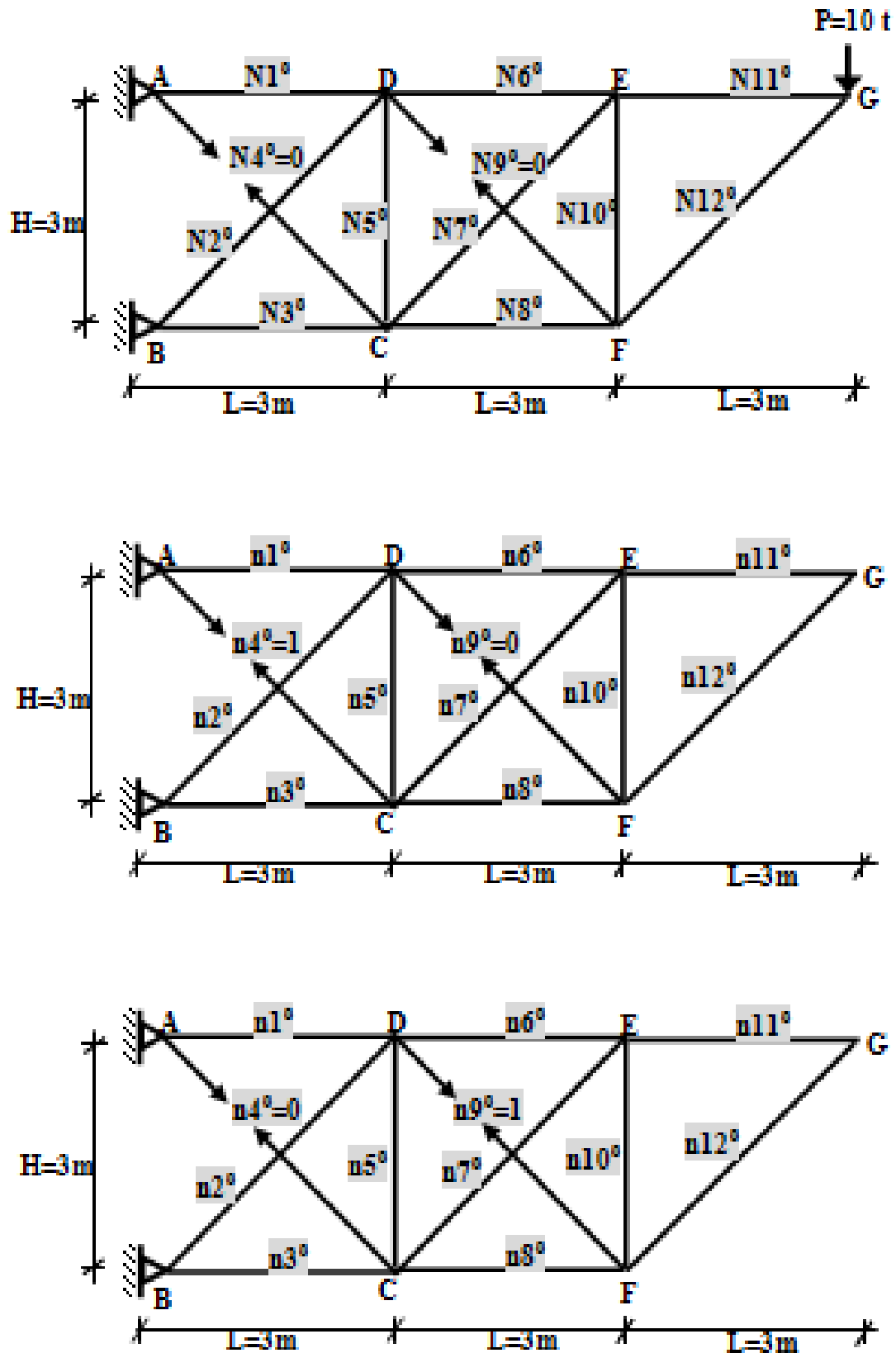


Figure 5.6.

3- L'équation de continuité (la formule de Müller – Breslau) :

On détermine les inconnus $X_1=N_4$ et $X_2=N_9$ par l'équation (5.3) de continuité (la formule de Müller - Breslau) :

$$\begin{cases} \delta_{11}^U \cdot X_1 + \delta_{12}^U \cdot X_2 + \delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}^U \cdot X_1 + \delta_{22}^U \cdot X_2 + \delta_{2F} = 0 \end{cases} \dots (5.3)$$

Sachant que :

$$\begin{cases} \delta_{1F} = \sum_{k=1}^{12} \frac{N_k^0 \cdot n_{1k}^0 \cdot L_k}{ES_k}, & \delta_{2F} = \sum_{k=1}^{12} \frac{N_k^0 \cdot n_{2k}^0 \cdot L_k}{ES_k} \\ \delta_{11}^U = \sum_{k=1}^{12} \frac{n_{1k}^0 \cdot n_{1k}^0 \cdot L_k}{ES_k}, & \delta_{12}^U = \sum_{k=1}^{12} \frac{n_{1k}^0 \cdot n_{2k}^0 \cdot L_k}{ES_k}, & \delta_{22}^U = \sum_{k=1}^{12} \frac{n_{2k}^0 \cdot n_{2k}^0 \cdot L_k}{ES_k} \end{cases}$$

Le calcul des efforts internes des barres se fait par la méthode des nœuds. Le tableau 5.3 ci-dessous reprend les valeurs de ces efforts normaux.

Tableau 5.3

Barre	ES_k	L_k	N_k^0	n_{1k}^0	n_{2k}^0	$N_k = N_k^0 + n_{1k}^0 \cdot X_1 + n_{2k}^0 \cdot X_2$
1	$4 \cdot 10^4$	3	30	$-1/\sqrt{2}$	0	25.06
2	$4 \cdot 10^4$	$3\sqrt{2}$	$-10\sqrt{2}$	1	0	7
3	$4 \cdot 10^4$	3	-20	$-1/\sqrt{2}$	0	-24.94
4	$4 \cdot 10^4$	$3\sqrt{2}$	0	1	0	-7.16
5	$4 \cdot 10^4$	3	10	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	-0.47
6	$4 \cdot 10^4$	3	20	0	$-1/\sqrt{2}$	14.48
7	$4 \cdot 10^4$	$3\sqrt{2}$	$-10\sqrt{2}$	0	1	7.81
8	$4 \cdot 10^4$	3	-10	0	$-1/\sqrt{2}$	-6.33
9	$4 \cdot 10^4$	$3\sqrt{2}$	0	0	1	-15.52
10	$4 \cdot 10^4$	3	10	0	$-1/\sqrt{2}$	4.48
11	$4 \cdot 10^4$	3	10	0	0	10
12	$4 \cdot 10^4$	$3\sqrt{2}$	$-10\sqrt{2}$	0	0	14.14

Le calcul des δ_{iF} et δ_{ij}^U donne alors ;

$$\delta_{11}^U = \sum_{k=1}^{12} \frac{n_{1k}^0 \cdot n_{1k}^0 \cdot L_k}{ES_k} = \frac{12.984}{ES}; \delta_{12}^U = \delta_{21}^U = \sum_{k=1}^{12} \frac{n_{1k}^0 \cdot n_{2k}^0 \cdot L_k}{ES_k} = \frac{1.5}{ES}; \delta_{22}^U = \sum_{k=1}^{12} \frac{n_{2k}^0 \cdot n_{2k}^0 \cdot L_k}{ES_k} = \frac{14.484}{ES};$$

$$\delta_{1F}^U = \sum_{k=1}^{12} \frac{N_k^0 \cdot n_{1k}^0 \cdot L_k}{ES_k} = \frac{-102.42}{ES}; \delta_{2F}^U = \sum_{k=1}^{12} \frac{N_k^0 \cdot n_{2k}^0 \cdot L_k}{ES_k} = \frac{-123.63}{ES}$$

La résolution du système : $\begin{cases} 12.984.X_1 + 1.5.X_2 - 102.42 = 0 \\ 1.5.X_1 + 14.484.X_2 - 123.63 = 0 \end{cases}$ (5.4) donne alors les valeurs :

$X_1=N_4=7.81 \text{ t}$ et $X_2=N_9=7 \text{ t}$.

5.5. Exemple 4 : (deux inconnues hyperstatiques intérieurement et extérieurement)

Soit à résoudre la poutre en treillis hyperstatique indiquée sur la Figure 5.7, le module d'élasticité **E** et la section **S** identiques pour toutes les barres ($S=2 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, $E= 2 \times 10^7 \text{ t/m}^2$). Déterminer le degré d'hyperstaticité et calculer les efforts internes dans tous les barres.

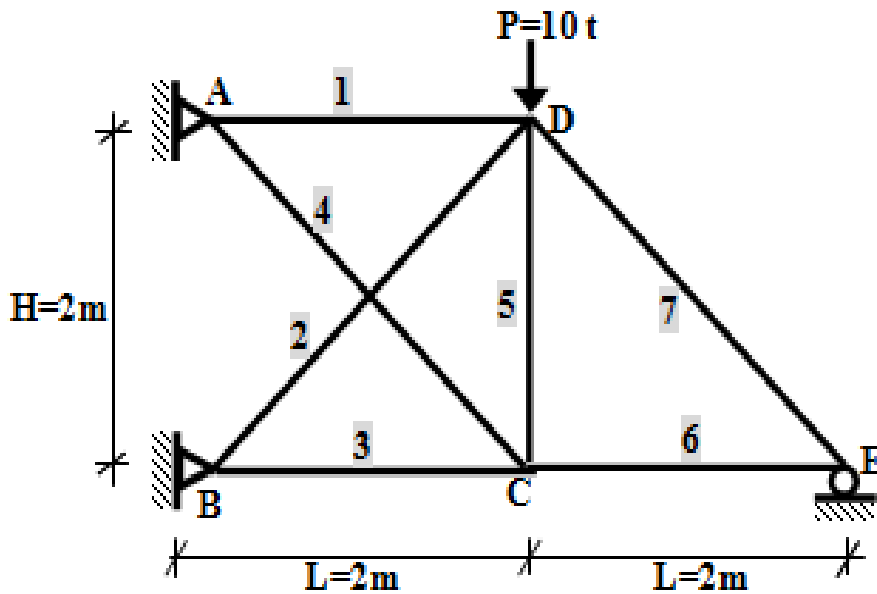


Figure 5.7.

Solution d'exemple 4 :

1- Le degré d'hyperstaticité: $H=(b+1)-2 \times n = (7+5)-2 \times 5 = 2 \Rightarrow \boxed{H=2}$

Pour le calcul des efforts normaux ou internes dans le système hyperstatique on utilisant la méthode des forces.

2- Le système de base (système isostatique):

Le degré d'hyperstaticité $H=2$, on choisit comme deux inconnus l'effort normal de la barre 4 (N_4) ($X_1= N_4$) et la réaction verticale à l'appui E ($X_2= R_E^V$) voit la Figure 5.8.

3- L'équation de continuité (la formule de Müller – Breslau) :

On déterminer les inconnus $X_1 = N_4$ et $X_2 = R_E^V$ par l'équation (5.3) de continuité (la formule de Müller - Breslau) :

$$\begin{cases} \delta_{11}^U \cdot X_1 + \delta_{12}^U \cdot X_2 + \delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}^U \cdot X_1 + \delta_{22}^U \cdot X_2 + \delta_{2F} = 0 \end{cases} \dots (5.3)$$

Sachant que :

$$\begin{cases} \delta_{1F} = \sum_{k=1}^{12} \frac{N_k^0 \cdot n_{1k}^0 \cdot L_k}{ES_k} , \delta_{2F} = \sum_{k=1}^{12} \frac{N_k^0 \cdot n_{2k}^0 \cdot L_k}{ES_k} \\ \delta_{11}^U = \sum_{k=1}^{12} \frac{n_{1k}^0 \cdot n_{1k}^0 \cdot L_k}{ES_k} , \delta_{12}^U = \sum_{k=1}^{12} \frac{n_{1k}^0 \cdot n_{2k}^0 \cdot L_k}{ES_k} , \delta_{22}^U = \sum_{k=1}^{12} \frac{n_{2k}^0 \cdot n_{2k}^0 \cdot L_k}{ES_k} \end{cases}$$

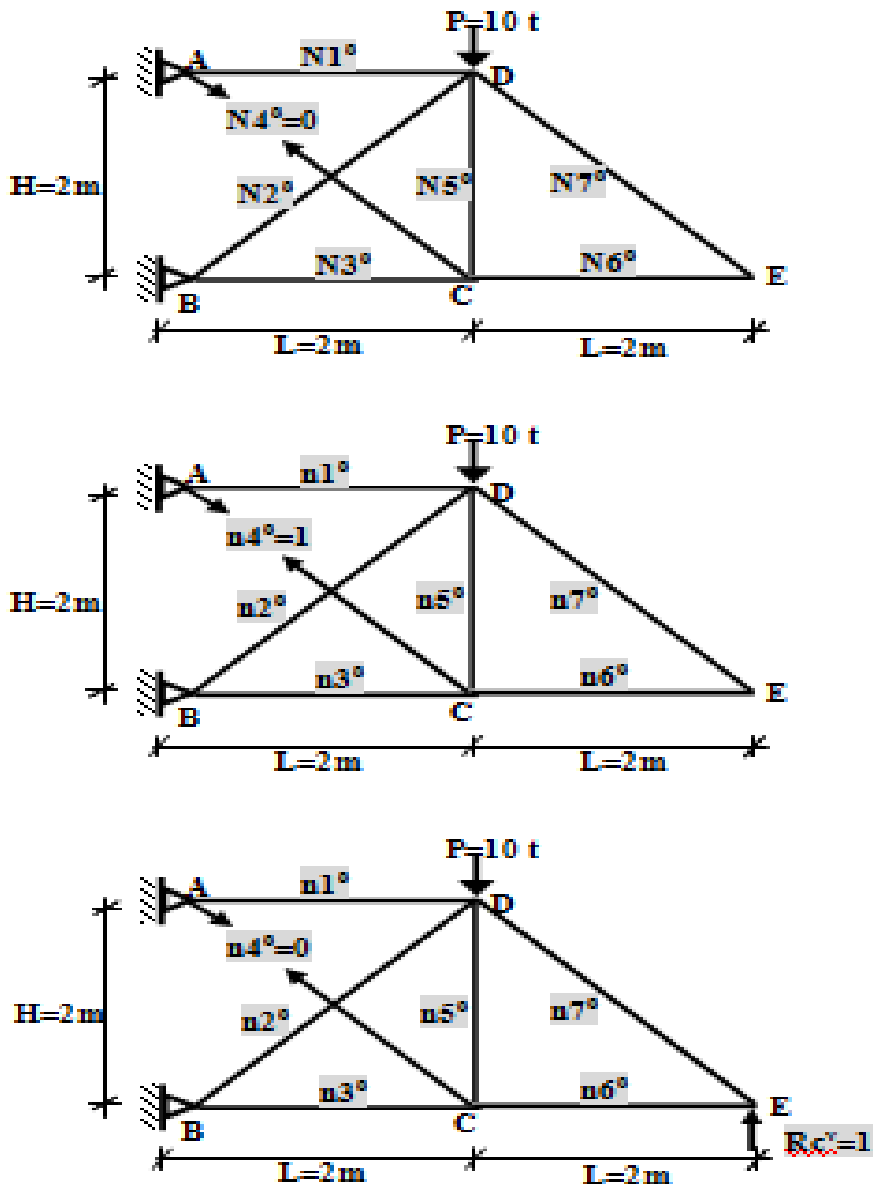


Figure 5.8

Le calcul des efforts internes des barres se fait par la méthode des nœuds. Le tableau 5.4 ci-dessous reprend les valeurs de ces efforts normaux.

Tableau 5.4

Barre	ES_k	L_k	N_k^0	n_{1k}^0	n_{2k}^0	$N_k = N_k^0 + n_{1k}^0 \cdot X_1 + n_{2k}^0 \cdot X_2$
1	4.10^4	2	10	$-\sqrt{2}/2$	-2	0.67 t
2	4.10^4	2	0	$-\sqrt{2}/2$	1	0.12 t
3	4.10^4	$2\sqrt{2}$	$-10\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	-5.40 t
4	4.10^4	$2\sqrt{2}$	0	1	0	4.28 t
5	4.10^4	2	0	$-\sqrt{2}/2$	0	-3.03 t
6	4.10^4	2	0	0	1	3.15 t
7	4.10^4	$2\sqrt{2}$	0	0	$-\sqrt{2}$	-4.45 t

Le calcul des δ_{iF} et δ_{ij}^U donne alors ;

$$\delta_{11}^U = \sum_{k=1}^{12} \frac{n_{1k}^0 \cdot n_{1k}^0 \cdot L_k}{ES_k} = \frac{4.32}{ES}; \delta_{12}^U = \delta_{21}^U = \sum_{k=1}^{12} \frac{n_{1k}^0 \cdot n_{2k}^0 \cdot L_k}{ES_k} = \frac{2.7}{ES}; \delta_{22}^U = \sum_{k=1}^{12} \frac{n_{2k}^0 \cdot n_{2k}^0 \cdot L_k}{ES_k} = \frac{11.62}{ES};$$

$$\delta_{1F}^U = \sum_{k=1}^{12} \frac{N_k^0 \cdot n_{1k}^0 \cdot L_k}{ES_k} = \frac{-27.10}{ES}; \delta_{2F}^U = \sum_{k=1}^{12} \frac{N_k^0 \cdot n_{2k}^0 \cdot L_k}{ES_k} = \frac{-48.11}{ES}$$

La résolution du système : $\begin{cases} 4.32 \cdot X_1 + 2.7 \cdot X_2 - 27.10 = 0 \\ 2.7 \cdot X_1 + 11.62 \cdot X_2 - 48.11 = 0 \end{cases}$ (5.5) donne alors les valeurs :

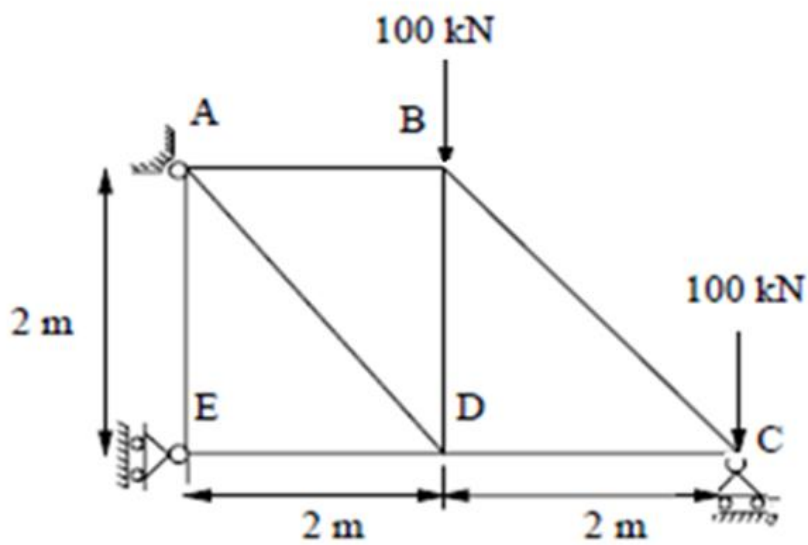
$X_1 = N_4 = 4.28 \text{ t}$ et $X_2 = R_F^V = 3.15 \text{ t}$.

Exercices / Chapitre 8

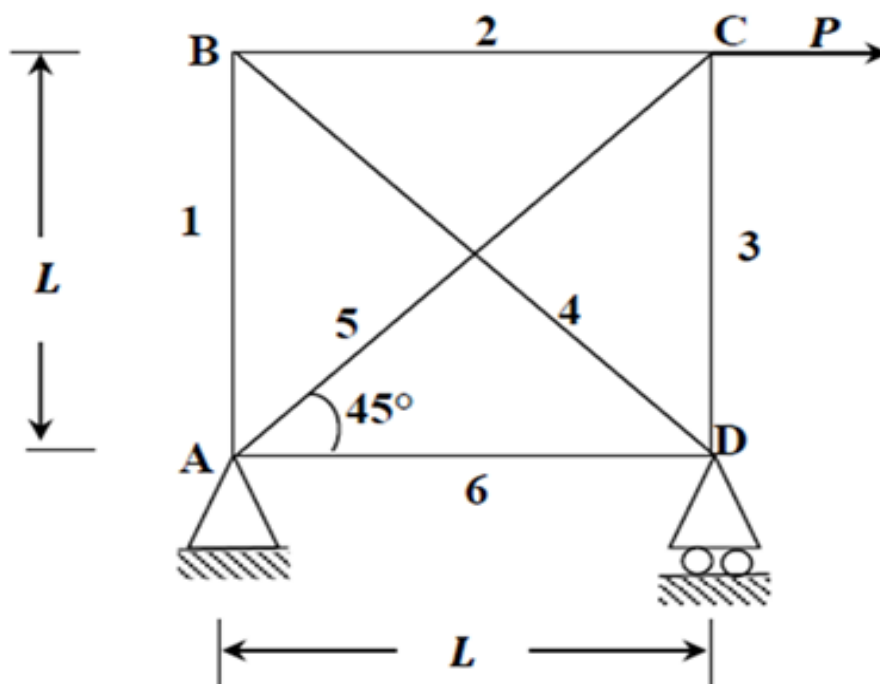
Exercices 5.1 à 5.4

Pour les treillis hyperstatiques suivants, on demande de déterminer les efforts dans toutes les barres (**Module d'élasticité E et section A identiques pour toutes les barres**).

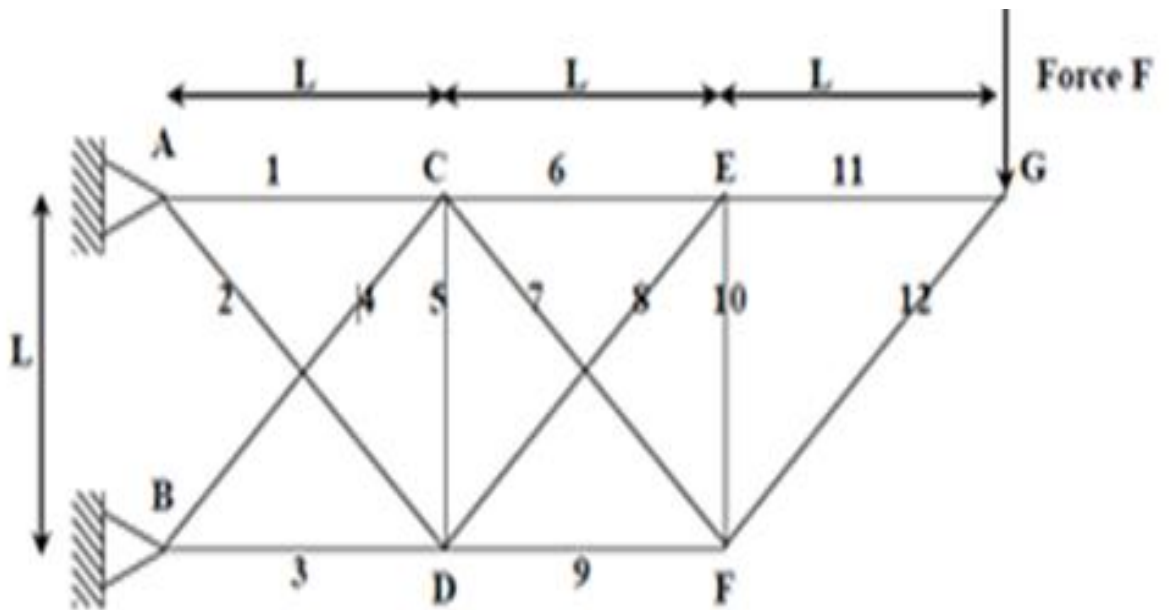
5.1:



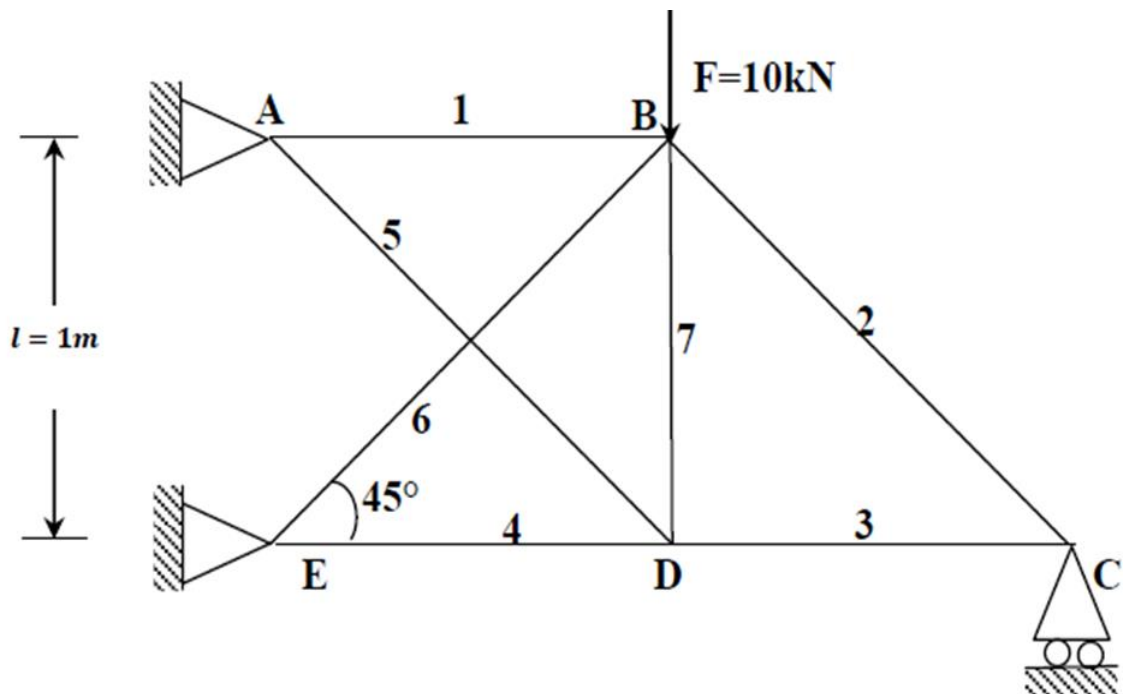
5.2:



5.3:



5.4:



Références bibliographiques

Références bibliographiques

- 1) M. Kerguignas & G. Caignaert, "Résistance des matériaux", Ed. Dunod Université.
- 2) S. Timoshenko, "Résistance des matériaux", Ed. Dunod, 1986.
- 3) L. Aleinik & J. Durler, "Résistance des matériaux", Ed. SpesDunod.
- 4) W. Nash, "Résistance des matériaux 1", Ed. McGraw-Hill, 1974.
- 5) I. Miropoubov et coll, "Problèmes de résistance des matériaux", Editions de Moscou.
- 6) F. Beer, "Mécanique à l'usage des ingénieurs – statique", McGraw-Hill, 1981.