**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique**

**UNIVERSITE ZIANE ACHOUR**

**de Djelfa**

Faculté *des sciences exactes et de l'informatique*

Département des Sciences de la Matière

# Support cours .I

Thème

---

# *EQUATIONS DIFFERENTIELLES*

---

2019-2020

M.ZITOUNI

www.med.zitouni@gmail.com

## 1. Equations à variables séparables

On met tous les termes en $x$ dans un membre, tous les termes en $y$ dans l'autre, et l'on obtient une expression de la forme : $f(x)d(x) = g(y)d(y)$

Puis on intègre les deux membres, pour trouver la solution sous la forme : $y = \phi(y)$

## 2. Exemple :

Soit l'équation différentielle : $y' = -\dfrac{x}{ye^{x^2}}$ *(E)*

On remplace $y' = \dfrac{d(y)}{d(x)}$, dans ($E$) puis on sépare les variables

$$d(x)y\frac{d(y)}{d(x)} = -\frac{x}{ye^{x^2}}yd(x) \Rightarrow yd(y) = -xe^{-x^2}d(x)$$

Il vient en intégrant $\int yd(y) = \int -xe^{-x^2}d(x)$

Soit

$\int yd(y) = \dfrac{1}{2}y^2 + c_1$ Pour le premier terme

Pour le deuxième terme

$\int -xe^{-x^2}d(x) =$ ?

Nous remarquons que, $\dfrac{d(e^{-x^2})}{d(x)} = -2x$

Intégrale sous la forme $\int ue^u d(u) = e^u$

Donc : $\dfrac{1}{2}\int -2xe^{-x^2}d(x) = e^{-x^2} + c_2$

$$\frac{1}{2}y^2 + c_1 = e^{-x^2} + c_2 \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = e^{-x^2} + c_2 - c_1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{(e^{-x^2} + c)}$$

## 3. Exemple :

Soit l'équation différentielle : $y' + 2xy = 0$ *(E)*

On remplace $y' = \dfrac{d(y)}{d(x)}$, dans ($E$) puis on sépare les variables:

$$\frac{d(y)}{d(x)}+2xy=0 \Rightarrow \frac{d(y)}{d(x)}=-2xy \Rightarrow \frac{d(y)}{y}=-2xd(x)$$

$$\Rightarrow \int \frac{d(y)}{y}=\int -2xd(x)$$

$$\ln|\ y)|+c_1=-x^2+c_2 \Rightarrow \ln|\ y\ |=-x^2+c \Rightarrow y=\pm e^c e^{-x^2} \Rightarrow y=ke^{-x^2}$$

## 4. Exemple

Soit l'équation différentielle : $(1+x)\frac{d(y)}{d(x)}=4y \Rightarrow \frac{d(y)}{y}=4\frac{d(x)}{(1+x)}$ *(E)*

$$\int \frac{d(y)}{y}=\ln|\ y\ |+c_1$$

$$4\int \frac{d(x)}{(1+x)}=4\ln|1+x\ |+c_2$$

$$\ln|\ y\ |+c_1=4\ln|1+x\ |+c_2$$

$$\ln|\ y\ |=\ln(|1+x\ |)^4+c \Rightarrow y=k(1+x)^4$$ , avec $k=\pm e^c$

## 1. Deuxième type : Equations linéaires:

Une équation linéaire du premier ordre est une équation de la forme :

$ay'+by=f(x)$ **(E)**

C'est une équation différentielle homogène du premier ordre avec second membre.

Il y'a trois étape pour résoudre cette équation différentielle.

- Résolution de l'équation homogène associée (son second membre) :

$$ay'+by=0 \Rightarrow ay'=-by \Rightarrow y'=-\frac{b}{a}y \Rightarrow \frac{d(y)}{d(x)}=--\frac{b}{a}y \Rightarrow \frac{d(y)}{y}=-\frac{a}{b}d(x)$$

$$\ln|y\ |+c_1=-\frac{a}{b}x+c_2 \Rightarrow y_h=ke^{-\frac{b}{a}x}$$

Avec : $k=\pm e^{c_2-c_1}$

Recherche d'une solution particulière (méthode de la variation de la constante):

$$y_p=k(x)e^{-\frac{b}{a}x} \Rightarrow y'_p=k'(x)e^{-\frac{b}{a}x}-\frac{b}{a}k(x)e^{-\frac{b}{a}x}$$

Portons

$y_p'$ dans l'équation (*E*) :

$$a(k^{'}(x)e^{-\frac{b}{a}x}-\frac{b}{a}k(x)e^{-\frac{b}{a}x})+b(k(x)e^{-\frac{b}{a}x})=f(x)\Rightarrow k^{'}(x)e^{-\frac{b}{a}x}=f(x)\Rightarrow k^{'}(x)=f(x)e^{\frac{b}{a}x}$$

$$k(x)=\int f(x)e^{\frac{b}{a}x})d(x)$$

La solution générale : $y_S=y_h+y_p=ke^{-\frac{b}{a}x}+(\int f(x)e^{\frac{b}{a}x})d(x))e^{-\frac{b}{a}x}$

- Exercices : Résoudre les équations différentielles suivantes :

| | |
|---|---|
| ➢ $y'+2y=x^2$ | ($E_1$) |
| ➢ $y'+y=2\sin(x)$ | ($E_2$) |
| ➢ $y'-y=(x+1)e^x$ | ($E_3$) |
| ➢ $y'+y=x-e^x+\cos(x)$ | ($E_4$) |

1.

$$y'+2y=0\Rightarrow y'=-2y\Rightarrow y'=-2y\Rightarrow\frac{d(y)}{d(x)}=-2y\Rightarrow\frac{d(y)}{y}=-2d(x)$$

$$\ln|y|+c_1=-2x+c_2\Rightarrow y_h=ke^{-2x}$$

Avec ; $c=c_2-c_1$ et $k=e^c$

Recherche d'une solution particulière (par la méthode de la variation de la constante):

$$y_p=k(x)e^{-2x}\Rightarrow y^{'}_p=k^{'}(x)e^{-2x}-2k(x)e^{-2x}$$

Nous remplaçons $y_p^{'}$ dans l'équation ($E_1$) :

$$(k^{'}(x)e^{-2x}-2k(x)e^{-2x})+2(k(x)e^{-2x})=x^2\Rightarrow k^{'}(x)e^{-2x}=x^2\Rightarrow k^{'}(x)=x^2e^{2x}$$

$$k(x)=\int(x^2e^{2x})d(x)$$

$k(x)$ , est un produit de deux fonctions, d'où en intégrant par partie :

Posons $u(x)=x^2\Rightarrow u^{'}(x)=2x$

$$v^{'}(x)=e^{2x}\Rightarrow\int v^{'}(x)d(x)=\int e^{2x}d(x)\Rightarrow v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$$

Donc ; $k(x)=(x^2)(\frac{1}{2}e^{2x})-\int(2x)(\frac{1}{2}e^{2x})d(x)=(x^2)(\frac{1}{2}e^{2x})-\int(x)(e^{2x})d(x)$

Posons; $i(x)=\int(x)(e^{2x})d(x)$ dans $k(x)$

Posons : $u(x)=x\Rightarrow u^{'}(x)=1d(x)$

$$v^{'}(x)=e^{2x}\Rightarrow\int v^{'}(x)d(x)=\int e^{2x}d(x)\Rightarrow v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$$

$$i(x)=(x)(\frac{1}{2}e^{2x})-\int(\frac{1}{2}e^{2x})d(x)=(x)(\frac{1}{2}e^{2x})-(\frac{1}{2})\frac{1}{2}e^{2x}\Rightarrow i(x)=\frac{1}{2}e^{2x}(x-\frac{1}{2})$$

$$k(x)=e^{2x}(\frac{1}{2})(x^2-x+\frac{1}{2})$$

La solution générale : $y_S=y_h+y_p=(ke^{-2x})+(\frac{1}{2}(x^2-x+\frac{1}{2}))$, $k\in IR$

- **Deuxième méthode** :

La solution homogène ($f(x)$=0), donc :

$y_h=(ke^{-2x})$

La solution particulière de ($E_1$), dépond de la forme du second membre (ici le coefficient de l'exponentiel égale au coefficient de $y$, alors le degré du polynôme est : $d^{eg}$ Q=$d^{eg}$ p+1):

$y_p=ax^2+bx+c\Rightarrow y_p^{'}\ =2ax+b$

Portons $y_p^{'}$ dans ($E_1$) ;

$$(2a(x)+b)+2(ax^2+b(x)+c)=x^2\Rightarrow 2ax^2+2(b+a)(x)+2c+b=x^2$$

$$\Rightarrow 2(a)=1\Rightarrow a=\frac{1}{2}\ \text{ et }\ 2(a+b)=0\Rightarrow b=-a\Rightarrow b=-\frac{1}{2}\ \text{ et}$$

$$2c+b=0\Rightarrow 2c=-b\Rightarrow c=-\frac{b}{2}\Rightarrow c=\frac{1}{4}$$

Alors $y_p=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$

La solution générale est : $y_s=y_h+y_p=ke^{-2x}+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$

2. $y'+y=2\sin(x)$ ($E_2$)

$$y'+y=0\Rightarrow y'=-y\Rightarrow\frac{d(y)}{d(x)}=-y\Rightarrow\frac{d(y)}{y}=-d(x)$$

$$\ln|y|+c_1=-x+c_2\Rightarrow y_h=ke^{-x}$$

Avec ; $c=c_2-c_1$ et $k=e^c$

Recherche d'une solution particulière (la variation de la constante):

$$y_p=k(x)e^{-2x}\Rightarrow y'_p=k^{'}(x)e^{-2x}-2k(x)e^{-x}$$

Portons $y_p^{'}$ dans l'équation ($E_2$) :

$(k^{'}(x)e^{-x} - k(x)e^{-x}) + (k(x)e^{-x}) = 2\sin(x) \Rightarrow k^{'}(x)e^{-x} = 2\sin(x) \Rightarrow k^{'}(x) = 2\sin(x)e^{x}$

$k(x) = 2\int(\sin(x)e^{x})d(x)$

$k(x)$ est un produit de deux fonctions, en intégrant par partie :

Posons $u(x) = \sin(x) \Rightarrow u^{'}(x) = \cos(x)$

$v^{'}(x) = e^{x} \Rightarrow \int v^{'}(x)d(x) = \int e^{x}d(x) \Rightarrow v\ (x) = e^{x}$

Donc ; $k(x) = (\sin(x))(e^{x}) - \int(\cos(x)(e^{x})d(x) = (\sin(x))(e^{x}) - i(x)$

Posons ; $i(x)$=$\int(\cos(x)(e^{x})d(x)$, on integer $i(x)$ .

Posons : $u(x) = \cos(x) \Rightarrow u^{'}(x) = -\sin(x)$

$v^{'}(x) = e^{x} \Rightarrow \int v^{'}(x)d(x) = \int e^{x}d(x) \Rightarrow v\ (x) = e^{x}$

$i(x) = \cos(x)(e^{x}) - \int\sin(x)(e^{x})d(x)$

$k(x) = 2\int\sin(x)d(x) = (\sin(x)(e^{x}) - ((\cos(x)e^{x} - \int \sin(x)e\ )$

$\Rightarrow k(x) = 2\int\sin(x)d(x) = (\sin(x)(e^{x}) - (\cos(x)e^{x} + \int \sin(x)e\ )$

$\Rightarrow k(x) = 2\int\sin(x)d(x) - \int\sin(x)d(x) = \sin(x)(e^{x}) - (\cos(x)e^{x}$

$\Rightarrow k(x) = \int\sin(x)d(x) = \sin(x)(e^{x}) - (\cos(x)e^{x}$

La solution générale :

$$\begin{matrix} y_S = y_h + y_p = (ke^{-x}) + (e^{x}(\sin(x) - \cos(x))(e^{-x}) \\ y_S = y_h + y_p = (ke^{-x}) + (\sin(x) - \cos(x)) \end{matrix} \quad , \quad k \in IR$$

- **Deuxième méthode** :

La solution homogène ($f(x)$=0),

Donc : $y_h = (ke^{-x})$

La solution particulière de ($E_2$), dépond de la forme du second membre :

$y_p = a\sin(x) + b\cos(x) \Rightarrow y_p^{'} = a\cos(x) - b\sin(x)$

Portons $y_p^{'}$ dans ($E_2$) ;

$$a\cos(x) - b\sin(x) + a\sin(x) + b\cos(x) = 2\sin(x) \Rightarrow (a+b)\cos(x) - (b-a)\sin(x) = 2\sin(x)$$
$$\Rightarrow (a+b) = 0 \Rightarrow a = -b$$
*et*
$$(b-a) = 2 \Rightarrow a = -1 \wedge b = 1$$

Alors : $y_p = a\sin(x) + b\cos(x) \Rightarrow y_p = -\sin(x) + \cos(x)$

La solution générale est : $y_s = y_h + y_p = ke^{-x} + (-\sin(x) + \cos(x))$

*3.* $y' - y = (x+1)e^{x}$ ($E_3$)

La solution homogène ($f(x)$=0),

$$y' - y = 0 \Rightarrow \frac{d(y)}{d(x)} = y \Rightarrow \frac{d(y)}{y} = d(x)$$

$$y_h = (ke^{x})$$

La solution particulière de ($E_3$), dépond de la forme de second membre :

$y_p = p(x)e^{x}$ , alors le degré de polynôme ici égale 2 (puisque $e^x$ apparier dans les solutions homogène et particulière).

Donc $y_p = (ax^2 + bx + c)e^{x} \Rightarrow y_p' = (2ax + b)e^{x} + (ax^2 + bx + c)e^{x}$

Portons $y_p'$ dans ($E_3$) ;

$$(2ax + b)e^{x} + (ax^2 + bx + c)e^{x} - (ax^2 + bx + c)e^{x} = (x+1)e^{x}$$
$$\Rightarrow (2ax + b)e^{x} = (x+1)e^{x} \Rightarrow 2ax + b = x + 1$$

$$\Rightarrow (2a) = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ et } b = 1$$

Alors : $y_p = (\frac{1}{2}x^2 + x)e^{x}$

La solution générale est : $y_s = y_h + y_p = ke^{x} + (\frac{1}{2}x^2 + x)e^{x} = e^{x}(\frac{1}{2}x^2 + x + k)$

*4.* $y' + y = x - e^{x} + \cos(x)$ ($E_4$)

La solution homogène ($f(x)$=0),

$$y' - y = 0 \Rightarrow \frac{d(y)}{d(x)} = y \Rightarrow \frac{d(y)}{y} = d(x)$$

$$y_p = (ke^{x})$$

SM 19/2020

$$y'+y=0 \Rightarrow y'=-y \Rightarrow \frac{d(y)}{d(x)}=-y \Rightarrow \frac{d(y)}{y}=-d(x)$$

$$\ln|y|+c_1=-x+c_2 \Rightarrow y_h=ke^{-x}$$

Avec ; $c=c_2-c_1$ et $k=e^c$

La solution particulière de : $y'+y=x$

La solution particulière de ($E_4$), dépond de la forme du second membre :

$$y_p=(ax+b) \Rightarrow y_p^{'}=a+(ax+b)$$

Portons $y_p^{'}$ dans ($E_4$) ;

$$a+(ax+b)=x+1$$
$$\Rightarrow ax=x \Rightarrow a=1$$

$$\Rightarrow (a+b)=0 \Rightarrow b=-1$$

Alors : $y_{p1}=x-1$

La solution particulière de $y'+y=-e^x$

$$y_p=(a)e^x \Rightarrow y_p^{'}=ae^x$$

Portons $y_p^{'}$ dans ($E_4$) ;

$$ae^x+(a)e^x=-e^x$$
$$\Rightarrow 2a=-1 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

Alors : $y_{p2}=-\frac{1}{2}e^x$

La solution particulière de $y'+y=\cos(x)$

$$y_p=a\cos(x)+b\sin(x) \Rightarrow y_p^{'}=-a\sin(x)+b\cos(x)$$

Portons $y_p^{'}$ dans ($E_4$) ;

$$-a\sin(x)+b\cos(x)+a\cos(x)+b\sin(x)=\cos(x)$$
$$\Rightarrow (b-a)\sin(x)+(b+a)\cos(x)=\cos(x) \Rightarrow b-a=0 \Rightarrow b=a$$
$$\Rightarrow (b+a)=1 \Rightarrow 2a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2} \Rightarrow b=\frac{1}{2}$$

Alors : $y_{p3}=\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{1}{2}\sin(x)$

La solution générale est :

$$y_s = y_h + y_{p1} + y_{p2} + y_{p3} = ke^{-x} + (x-1) - \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)\,,\quad k \in IR$$

## II. **Equations différentielles du deuxième ordre**

Une équation différentielle du deuxième ordre est de la forme : $y'' = f(x, y, y')$

Il existe deux classes : - Equations incomplètes (se ramenant au premier ordre) – Equations Linéaires.

### II.1 Equations incomplètes

Ce sont les équations ou la fonction n'apparait que par ses dérivées. Elles sont de la forme $y'' = f(x, y')$

Pour ramener la fonction au premier ordre, en posant : $z = y'$

L'on dérive cette dernière, on obtient $z' = y'' \Rightarrow z' = f(x, z)$

Nous avons la fonction $z$, il reste à en calculer les primitives pour obtenir $y$.

**Exemple:**

1. Soit l'équation différentielle, $ay'' = \sqrt{1+y'^2}$

Posons : $z = y' \Rightarrow z' = y'' \Rightarrow az' = \sqrt{1+z^2}$

$$z' = \frac{1}{a}\sqrt{1+z^2} \Rightarrow \frac{d(z)}{d(x)} = \frac{1}{a}\int\sqrt{1+z^2}\,d(z)$$

$$\Rightarrow \frac{d(z)}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{d(x)}{a} \Rightarrow \int\frac{d(z)}{\sqrt{1+z^2}} = \int\frac{d(x)}{a}$$

On en déduit, $\arg sh(z) + c_1 = \frac{1}{a}x + c_2 \Rightarrow \arg sh(z) = \frac{1}{a}x + C$

Avec, $y' = z = sh(\frac{1}{a}x + C)$

Séparons les variables, $d(y) = sh(\frac{1}{a}x + C)d(x)$

Il donne après intégration, $y = a(ch(\frac{1}{a}x + C) + m \Rightarrow y - m = a(ch(\frac{1}{a}x + C)$

2. Intégrer l'équation différentielle, $(1+x^2)y'' + xy' = ax$

3. Intégrer l'équation différentielle, $(1+y'^2)^3 = z'^2$

### II.2 Equation ou la fonction n'intervient que par sa dérivée seconde

Le cas de la forme, $y'' = f(x)$

On obtient $y'$ en calculant les primitives de *f*, puis $y$ en calculant les primitive de $y'$

**Exemple:**

1. Soit l'équation différentielle, $y'' - 4x = 0$

   Implique, $y'' = 4x \Rightarrow \int y'' = \int 4x \Rightarrow y' = 2x^2 + c$

   Implique, $\Rightarrow \int y' = \int 2x^2 + c \Rightarrow y = \frac{2}{3}x^3 + cx + b$

2. Intégrer l'équation différentielle, $y'' = xe^x$

**III. Equation différentielle ou la variable n'apparait pas**

Le cas de la forme, $f(y, y', y'') = 0$

Pour se ramène au premier ordre, Posons : $z = y' = \frac{d(y)}{d(x)}$

On considère $y$ comme la variable et $z$ comme une fonction inconnue de $y$

$$y'' = \frac{d(y')}{d(x)} = \frac{d(z)}{d(x)} = \frac{d(z)}{d(y)}\frac{d(y)}{d(x)} = z\frac{d(z)}{d(y)}$$

L'équation différentielle devient, $f(y, z, z\frac{d(z)}{d(y)}) = 0$

**Exemple:**

1. Intégrer l'équation différentielle, $yy'' = 1 + y'^2$

   Le cas de la forme, $f(y, y', y'') = 0$

Nous remarquons que $y'$ n'intervient que par son carré,

Posons : $z = y'^2 \Rightarrow y' = \sqrt{z} \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}z \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}\frac{d(z)}{d(y)}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}y\frac{d(z)}{d(y)} = 1 + z$$

Séparons les variables : $\frac{d(z)}{1+z} = 2\frac{d(y)}{y}$

$\ln(1+z) = \ln(y) \Rightarrow 1 + z = ky^2 \Rightarrow z = ky^2 - 1$

D'autre part on a : $z = y'^2 \Rightarrow y' = \pm\sqrt{z} \Rightarrow \frac{d(y)}{d(x)} = \pm\sqrt{ky^2 - 1}$

Comme $k$ est strictement positive ; la solution est : $y = \pm\frac{1}{\sqrt{k}}$