Université ZIANE Achour - Djelfa
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département Sciences de la Matière
Niveau : M1 – Physique de la matière condensée

Date : 15/02/2016, Durée 1H30

Matière : Méthodes mathématiques pour la physique -I-

TD Examen

Exercice N°1 [05 points], TD/8 :

1) Trouver le module et l'argument des nombres complexes $z_1 = 1-i$ et $z_2 = 1+i$. 2 1 2 1

2) En déduire la forme exponentielle de $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10}$. 3 4

Exercice N°2 [5 points], TD/7 :

Etudier la nature des séries suivantes :

1 1 2 2 1

1) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}$, 2) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+1}$, 3) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-1}{n^2+1}$, 4) $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n^3+1}$, 5) $\sum (-1)^n \frac{1}{x^n}$, $x \in]0,1[$

1 1 1 1 1

Exercice N°3 [10 points] (Au choix avec l'exercice n°4) :

Soit $(f_n)_{n\in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie par $f_n(x) = \frac{nx^2}{nx+1}$, $x \in [0,+\infty[$.

2 1) Montrer que la fonction $f_n \in F(E = [0,+\infty[, \mathbb{R})$ définie bien une suite de fonctions.

2 2) Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions.

3 3) Montrer que la suite est convergente uniformément vers une fonction f à déterminer.

3 4) Comparer entre : $\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 \frac{nx^2}{nx+1} dx$ et $\int_1^2 \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{nx^2}{nx+1}\right) dx$. Conclure.

Exercice n°4 [10 points] (Au choix avec l'exercice n°3):

Dans cet exercice, on se propose d'étudier la nature de la série numérique : $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$

I. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $f(x) = 1-\cos(x)$.

1,5 1) Calculer $f(0), f'(0)$ et $f''(0)$.

2) Déterminer le développement limité d'ordre 2 de Maclaurin de cette fonction au voisinage de zéro défini par :

1 $$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + o(x^2) \text{ avec } \lim_{x\to 0} o(x^2) = 0$$

Tourner la page

Corrigé type Examen Maths 1
M1 - physique M Lmd
A.U : 2015/2016

Exo N° 1

~~Examen~~ cours

TD

① Le module et l'argument des deux nombres complexes $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 1 + i$.

ⓐ $z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\cos\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin\right.$

$= \sqrt{2}\, e^{-j\pi/4} = \sqrt{2}\, e^{j(-\frac{\pi}{4})} \Rightarrow \begin{cases} |z_1| = \sqrt{2} \\ Arg(z_1) \equiv -\frac{\pi}{4}\,[2\pi]. \end{cases}$ 1 2

ⓑ $z_2 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\, e^{j(\frac{\pi}{4})}$.

$\Downarrow$

$\begin{cases} |z_2| = \sqrt{2} \\ Arg(z_2) = \frac{\pi}{4}\,(2\pi]. \end{cases}$ 1 2

② Deduction de la forme exponentielle $z = \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{10}$.

$z = \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{10} = \left[\frac{\sqrt{2}\, e^{j(\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2}\, e^{j(-\frac{\pi}{4})}}\right]^{10} = \left[e^{j(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4})}\right]^{10}$

$= \left[e^{j(\frac{\pi}{2})}\right]^{10} = e^{j(\frac{10\pi}{2})} = e^{j(5\pi)}$ 4

donc $\boxed{z = \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{10} = e^{j(5\pi)}}$ 3

Exo N° 2 Examen TD

Etude de la nature des series suivante

1) (1) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}$; $u_n = \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ au $V(+\infty) \Rightarrow$ la serie D.V (1)

2) (1) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+1}$; $u_n = \frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$ au $V(+\infty) \Rightarrow$ la serie C.V. (1)

3) (2) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-1}{n^2+1}$; $u_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$; $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2}\left(\frac{1-1/n^2}{1+1/n^2}\right)$

$= \lim \left(\frac{1-1/n^2}{1+1/n^2}\right)$

$= \frac{1-0}{1+0} = 1 \neq 0$

donc la serie D.V (1)

4) (2) $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n^3+1}$; $u_n = (-1)^n \frac{\sin(n)}{n^3+1}$; $|u_n| = \frac{|\sin(n)|}{n^3+1}$

$$|u_n| = \frac{|\sin(n)|}{n^3+1} \leq \frac{1}{n^3+1} \sim \frac{1}{n^3} \text{ au } V(+\infty)$$

Comme la serie $\sum \frac{1}{n^3}$ C.V donc $|u_n|$ C.V. $\Rightarrow$ la serie (c'a.dire $\sum u_n$ absolument convergente)

(1) donnee $\sum u_n$ C.V. (1)

5) $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1}{x^n}$; $x \in]0,1[$, $u_n = (-1)^n \frac{1}{x^n}$; $|u_n| = \frac{1}{x^n}$, $x \in]0,1[$

$S_n = \frac{1}{x^0} + \frac{1}{x^1} + \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1}{x^n}$ (suite des sommes partielles).

$S_n = \frac{1}{x^0}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{x}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{x}\right)}\right]$ (2) ; $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1-0}{1-1/x} = \frac{1}{1-1/x}$

- comme $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \neq \infty$ donc la serie

$\sum |U_n|$. C.V simplement dans $x \in]0,1[\Rightarrow$

$\sum U_n$ C.V simplement ds l'intervalle $]0,1[$.

(1)

EXO N° 3

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{nx+1} \quad x \in [0,+\infty[.$$

1) Montrons que $f_n \in F(E=[0,+\infty[,\mathbb{R})$ définie bien une suite de fonction.

fonction : $f_n : E = [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f_n(x) = \frac{nx^2}{nx+1}.$$

$(f_n) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{F}(E;\mathbb{R})$: ensemble de suite de fonction

$$n \longmapsto f_n(x) = \frac{nx^2}{nx+1}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,+\infty[$, $f_n(x) = \frac{nx^2}{nx+1}$ est bien définie $D_{(f_n)} = \mathbb{N} \Rightarrow (f_n)$ définie bien une suite de fonctions.

(2)

2) Etude de la convergence simple :

$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, $\forall x \in [0,+\infty[$.

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{nx^2}{nx+1} = \lim \frac{n}{n}\left[\frac{x^2}{x+\frac{1}{n}}\right].$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{x^2}{x+1/n} = \frac{x^2}{x+0} = x \quad \text{si } x \neq 0.$$

→ si $\underline{x=0}$ $\quad f_n(x) = \dfrac{n(0)^2}{n(0)+1} = 0.$

$$\boxed{\lim f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0. \\ x & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}}$$

2

la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

3 <u>Montrons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f :</u>

calculons $f_n(x) - f(x) = \dfrac{nx^2}{nx+1} - x \qquad$ si $x \neq 0$

$$f_n(x) - f(x) = \frac{nx^2 - nx^2 - x}{nx+1} = \frac{-x}{nx+1}.$$

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \left|\frac{-x}{nx+1}\right| = \frac{x}{nx+1} \qquad \text{posons } g_n(x) =$$

$$g_n(x) = \frac{x}{nx+1}.$$

si $x = 0$ $\quad f_n(x) - f(x) = 0 - 0 = 0$.

donc $\boxed{g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{nx+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$ 1

Etude de la fonction g_n :

- $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} g_n(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{nx+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x}\left(\frac{1}{n + 1/x}\right) =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n + 1/x} = \frac{1}{n}.$$

- $\displaystyle g_n'(x) = \frac{(nx+1) - nx}{(nx+1)^2} = \frac{1}{(nx+1)^2} > 0 \quad \forall x \in [0$

- table de variation

x	0	$+\infty$
$g_n'(x)$	$+$	
$g_n(x)$	0 $\nearrow$	$1/n$

1

donc $\displaystyle \sup_{x \in [0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\| = \frac{1}{n}$

$\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\| = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow (f_n)_n$ qui converge uniformément vers f. pour $x \in [0, +\infty[$. 1

4) comparaison entre $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^2 \frac{nx^2}{nx+1}\,dx$ et $\int_1^2\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{nx^2}{nx+1}\right)dx$

a)

$$I_n(x)=\int\left(\frac{nx^2}{nx+1}\right)dx$$

$$\begin{array}{r|l} nx^2 & nx+1 \\ \hline -nx^2+x & x-1/n \\ \hline =-x & \\ =x-1/n & \\ \hline 1/n & \end{array}$$

$$\cancel{I_n(x)=\int\frac{x(nx+1)-x}{(nx+1)}dx=\int x}$$

$$I_n(x)=\int\frac{(nx+1)(x-\frac{1}{n})+\frac{1}{n}}{(nx+1)}dx.$$

$$=\int\left(x-\frac{1}{n}\right)dx+\frac{1}{n}\int\frac{dx}{nx+1}$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{n}x\right)+\frac{1}{n^2}\int\frac{n\,dx}{nx+1}$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{n}x\right)+\frac{1}{n^2}\ln(nx+1).$$

$$I_n=\int_1^2\frac{nx^2}{nx+1}dx=\left(\frac{1}{2}4-\frac{1}{n}2\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n^2}\ln(2n+1)-\frac{1}{n^2}\ln(n+1)$$

$$\boxed{I_n=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n^2}\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}I_n=\frac{3}{2}+\frac{1}{\infty}\ln(2)=\frac{3}{2}+0=\frac{3}{2}.$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_1^2\left(\frac{nx^2}{nx+1}\right)dx=\frac{3}{2}}$$

1

(1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{nx^2}{nx+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n}\left(\frac{x^2}{x+\frac{1}{n}}\right) = \frac{x^2}{x} = x$

$I = \int_1^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$

donc on a $\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 \frac{nx^2}{nx+1}dx = \int_1^2 \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{nx^2}{nx+1}\right)dx = \frac{3}{2}$ 1

Ce resultat est prevu car la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Converge uniformément vers f. 1

$(\lim \int = \int \lim)$.

Exo N°4 :

I) $f(x)$ $1-\cos x$; $x \in \mathbb{R}$.

1) $f(0) = 1-\cos(0) = 1-1 = 0$ 0,5

$f'(x) = 0-(-\sin x) = 0+\sin(x)$; $f'(0) = 0$. 0,5

$f''(x) = \cos(x)$; $f''(0) = 1$ 0,5

2) $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2)$

$= 0 + 0.x + \frac{1}{2}(1)x^2 + o(x^2) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$ 1,5

$\lim_{x\to 0} o(x^2) = 0$

3) $\boxed{f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{t^2}}$. DL $f\left(\frac{1}{t}\right)$ au $\mathcal{V}(+\infty)$ 1,5

II). $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in [1, +\infty[$, $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ est et bien définie et positive 0,5

$$f'_\alpha(x) = \frac{0 - \alpha x^{\alpha-1}}{(x^\alpha)^2} = \frac{-\alpha x^{\alpha-1}}{x^{2\alpha}} < 0 \Rightarrow f_\alpha \text{ décroissante}$$

0,5

5) Calcul de $I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^{+\infty} x^{-\alpha} dx = \int_1^{+\infty} f_{(1)} x^{-\alpha} dx$

$$I(\alpha) = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_1^{+\infty} \qquad \frac{\alpha > 0}{\alpha \neq 1}.$$

$$(1-\alpha) I(\alpha) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) - 1 = \begin{cases} \infty & \text{si } \alpha < 1 \\ -1 & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

$$I_\alpha = \begin{cases} \infty & \text{si } \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha - 1} & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

si $\alpha = 1$; $I_1(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^{+\infty} = +\infty.$

$$I_\alpha = \begin{cases} \infty & \text{si } \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

1

6) La serie $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge ssi $\alpha > 1$. 2

7) Deduction de la nature de serie $\sum_{n \geq 0} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$ 2

$1 - \cos\frac{1}{n} \simeq \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}$ Donc la serie donnée converge

Fin.

7