Université ZIANE Achour - Djelfa
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Physique
Niveau : M1 – Physique de la matière condensée **Date : 23/01/2020, Durée 1H30**

Examen– Méthodes mathématiques pour la physique -I-

Corrigé-type

Exercice N°1 [03 points] :

Etudier la nature des séries numériques suivantes :

$$\sum \frac{1}{n^2},\ \sum \left(\frac{2n+3}{4n+1}\right),\ \sum \left(\frac{2n+3}{4n+1}\right)^n,\ \sum \frac{(-1)^n}{n},\ \sum \frac{(-1)^n}{n^2+1},\ \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n^2+1}.$$

0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5

Exercice N°2 [05 points] :

1) Soit Z un nombre complexe. Monter que : $\mathrm{Log}(z)$ et e^Z sont aussi des nombres complexes. 0,5 0,5
2) Trouver le module et l'argument des nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$. 0,5 0,5
3) Ecrire les nombres complexes z_1 et z_1 sous forme exponentielle. 0,5 0,5
4) Calculer : $\mathrm{Log}(\sqrt{3}+i)$, $\mathrm{Log}(\sqrt{3}-i)$, $e^{(\sqrt{3}+i)}$ et $e^{(\sqrt{3}-i)}$. 0,25 0,25 0,25 0,25
5) Calculer : $\mathrm{Log}\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)$ et $\mathrm{Log}(\sqrt{3}+i)$-$\mathrm{Log}(\sqrt{3}-i)$. Conclure. 0,5 0,25 0,25

Exercice N°3 [05 points]:

1) Montrer que la fonction ($u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) définie ci-dessous est harmonique. 1,5
$$u(x,y) = x^2 - y^2;\ x, y \in \mathbb{R}.$$
2) Trouver une fonction ($v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) pour que la fonction $f = u + iv$ soit holomorphe. 1,5
3) Montrer sans faire de calculs que l'intégrale : $\oint_\Gamma [f(z)+z]dz = 0$, Γ est lacet quelconque de $\mathbb{C}$. 2

Exercice N°4 [07 points] :

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\oint_\Gamma z dz$, Γ est un cercle de centre (0,0) et du rayon 1. (**Méthode : Changement de variable**). 1,5
2) $\oint_\Gamma \frac{1}{z} dz$, Γ est un cercle de centre (0,0) et du rayon 1. (**Méthode : Changement de variable**). 1
3) $\oint_\Gamma \frac{1}{z} dz$, Γ est un cercle de centre (2,0) et du rayon 1. 1
4) $\oint_\Gamma \frac{Z^2+1}{(Z+i)(z+1)} dz$, Γ est un cercle de centre (0,0) et du rayon 2. 2
5) $\oint_\Gamma \frac{Z^2+1}{(Z+i)(z+1)} dz$, Γ est un cercle de centre (-1,0) et du rayon $\frac{1}{2}$. 1,5

Bon courage

Corrigé-type — A.U : 2019/2020

Méthodes Mathématiques pour la physique I

EXO N°1 Nature des séries numériques

1) $\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}$

a) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ continue sur $]0,+\infty[$: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x_0^2}=f(x_0)$

b) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ positive sur $]0,+\infty[$

c) $f'(x)=\frac{-2x}{x^4}=\frac{-2}{x^3}<0$, f décroissante sur $]0,+\infty[$.

d) calculons $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \int_1^{+\infty}(1)(x)^{-2}dx = \left.\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^{+\infty} = \left.-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty}$

$= -\left[\frac{1}{+\infty}-\frac{1}{1}\right] = +1$. c'est à dire

que $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=1$ converge

0,5

de ⓐ, ⓑ, ⓒ et ⓓ $\Rightarrow \sum_{n\geq 1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ cv.

2) $\sum_{n\geq 0}\frac{2n+3}{4n+1}$; $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+3}{4n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\left(\frac{2+\frac{3}{n}}{4+\frac{1}{n}}\right) = \frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

or $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+3}{4n+1}=\frac{1}{2}\neq 0 \Rightarrow \sum_{n\geq 0}\frac{2n+3}{4n+1}$ diverge.

0,5

3) $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2n+3}{4n+1}\right)^n$; posons $u_n=\left(\frac{2n+3}{4n+1}\right)^n$

Calculons $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n+3}{4n+1} = \frac{2}{4}=\frac{1}{2}<1$.

donc la serie donnée $\sum\left(\frac{2n+1}{4n+1}\right)^n$ Converge (Critère de Kauchy)

0,5

4) $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n}$, posons $u_n=\frac{(-1)^n}{n}$, on a u_n s'écrit sous forme

$u_n=(-1)^n v_n$, $v_n>0$. donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une

suite alternée, Appliquant le critère d'Abel

à cette serie.

a) monotonie de suite $v_n=\frac{1}{n}$: $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{n-(n+1)}{(n+1)\cdot n}=\frac{-1}{n(n+1)}<0$

donc suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

b) $\lim_{n\to+\infty} v_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$

les deux critère d'Abel ① et ② sont vérifiés donc la

serie alternée $\sum_{n\geq 0}(-1)^n/n$ est convergente.

0,5

5) $\sum\frac{(-1)^n}{n^2+1}$; posons $u_n=\frac{(-1)^n}{n^2+1}\Rightarrow |u_n|=\frac{1}{n^2+1}\overset{\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}$ CV

donc la serie $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ est absolument convergente

$\sum|u_n|$ CV $\Rightarrow\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ Converge.

0,5

6) $\sum(-1)^n\frac{\sin(n)}{n^2+1}$, posons $u_n=(-1)^n\frac{\sin(n)}{n^2+1}$.

$|u_n|=\frac{|\sin(n)|}{n^2+1}$. $|\sin(n)|\leq 1\Rightarrow\frac{|\sin(n)|}{n^2+1}\leq\frac{1}{n^2+1}$

$n^2+1\geq n^2\Rightarrow\frac{1}{n^2+1}\leq\frac{1}{n^2}$ donc $\frac{|\sin(n)|}{n^2+1}\leq\frac{1}{n^2}$

donc $|u_n|\leq\frac{1}{n^2}$

on a $\begin{cases} |u_n| \leq \frac{1}{n^2} \\ \left(\sum \frac{1}{n^2}\right) \text{ cv} \end{cases} \Rightarrow \sum |u_n| \text{ cv} \Rightarrow \sum \frac{(-1)^n \sin(n)}{n^2+1}$ cv.

0,5

Exo N° 2 :

① Soit $z \in \mathbb{C}$; $z = x + iy$ / $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $Log(z) \in \mathbb{C}$.

$Log(z) = \ln|z| + i\,(Arg(z) + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$ et $-\pi < Arg(z) \leq \pi$

donc $Log(z) = \underbrace{(\ln|z|)}_{X} + i\underbrace{[Arg(z) + 2\pi k]}_{Y}$, $k \in \mathbb{Z}$. 0,5
$(X, Y \in \mathbb{R})$

$Log(z) = X + iY \in \mathbb{C}$.

b) $e^z = e^{(x+iy)} = e^x . e^{iy} = e^x[\cos(y) + i\sin(y)]$.

$= \underbrace{[e^x \cos(y)]}_{X'} + i\underbrace{[e^x \sin(y)]}_{Y'} = X' + iY' \in \mathbb{C}$. 0,5
$(X', Y' \in \mathbb{R})$.

② Modules et arguments des nombres complexes : z_1 et z_2

a) $z_1 = \sqrt{3} - i$; $|z_1|^2 = (\sqrt{3})^2 + (-1)^2 = 3 + 1 = 4 \Rightarrow \boxed{|z_1| = \sqrt{4} = 2}$ 0,25

$z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

$\boxed{Arg(z_1) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$ 0,25

b) $z_2 = \sqrt{3} + i$; $|z_2| = (\sqrt{3})^2 + (1)^2 = 4 \Rightarrow \boxed{|z_2| = \sqrt{4} = 2}$. 0,25

$z_2 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \boxed{Arg(z_2) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$

0,25

3) z_1, z_2 sous forme exponentielle :

$z_1 = 2\left[\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})\right] = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$ (0,1)

$z_2 = 2\left[\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})\right] = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$ (0,1)

4) : Calcul : (a) $\mathrm{Log}(\sqrt{3}+i) = \mathrm{Log}(z_2) = \mathrm{Ln}|z_2| + i(\mathrm{Arg}(z_2) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

$= \mathrm{Ln}(2) + i(\frac{\pi}{6} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\mathrm{Log}(\sqrt{3}+i) = \mathrm{Ln}(2) + i(\frac{\pi}{6} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}}$$ (0,25)

(b) $\mathrm{Log}(\sqrt{3}-i) = \mathrm{Log}(z_1) = \mathrm{Ln}|z_1| + i(\mathrm{Arg}(z_1) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\mathrm{Log}(\sqrt{3}-i) = \mathrm{Ln}(2) + i(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}}$$ (0,25)

(c) $e^{\sqrt{3}+i} = e^{\sqrt{3}} e^{i} = e^{\sqrt{3}}[\cos(1) + i\sin(1)]$.

$$\boxed{e^{\sqrt{3}+i} = (e^{\sqrt{3}}\cos(1)) + i(e^{\sqrt{3}}\sin(1))}$$ (0,25)

(d) $e^{\sqrt{3}-i} = e^{\sqrt{3}} \cdot e^{-i} = e^{\sqrt{3}}[\cos(-1) + i\sin(-1)]$.

$$\boxed{e^{\sqrt{3}-i} = (e^{\sqrt{3}}\cos(1)) - i(e^{\sqrt{3}}\sin(1))}$$ (0,25)

5) (a) Calcul $\mathrm{Log}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right) = ?$

$$\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{2e^{\frac{\pi}{6}i}}{2e^{-\frac{\pi}{6}i}} = e^{(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6})i} = e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$\log\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right) = \ln\left|\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right| + i\left(\mathrm{Arg}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right) + 2k\pi\right);\ k\in\mathbb{Z}.$$

$$= \ln(1) + i\,\mathrm{Arg}\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right);\ k\in\mathbb{Z}$$

0,5

$$\boxed{\mathrm{Log}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right) = i\,\mathrm{Arg}\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right);\ k\in\mathbb{Z}}$$

⑤ Calcul $\mathrm{Log}(\sqrt{3}+i) - \mathrm{Log}(\sqrt{3}-i) = ?$

$$\mathrm{Log}(\sqrt{3}+i) = \mathrm{Ln}(2) + i\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\mathrm{Log}(\sqrt{3}-i) = \mathrm{Ln}(2) + i\left(-\frac{\pi}{6} + 2k'\pi\right);\ k'\in\mathbb{Z}.$$

$$\mathrm{Log}(\sqrt{3}+i) - \mathrm{Log}(\sqrt{3}-i) = i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + 2\underbrace{(k-k')}_{K}\pi\right)$$

$$= i\left(\frac{\pi}{3} + 2K\pi\right);\ K\in\mathbb{Z}.$$

0,75

Donc : $\boxed{\mathrm{Log}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right) = \mathrm{Log}(\sqrt{3}+i) - \mathrm{Log}(\sqrt{3}-i) \quad \text{modulo } (2\pi i)}$

0,25

Exo N°3,
$$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto u(x,y) = x^2 - y^2.$$

① Montrons que la fonction u est harmonique ;

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}(2x) = 2$$ 0,1

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -2y \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = -2$$ 0,1

$$\Delta u_{(x,y)} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x,y) = 2 - 2 = 0 \Rightarrow u \text{ est harmonique}$$ 0,5

② Trouvons une fonction $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ / $f = u + iv$ soit holomorphe

condition de Cauchy-Riemann :
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \end{cases}$$ 0,5

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 2x \quad \ldots ①$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -2y \quad \ldots ①$$

0,5

de ① $v(x,y) = \int 2x\, dy = 2xy + F(x)$ remplaçant cette équation dans ① $-\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}(2xy + F(x))$

$$= -2y - F'(x) = -2y.$$

$$F'(x) = 0 \Rightarrow F(x) = C, C \in \mathbb{R}$$

donc $\boxed{v(x,y) = 2xy + C \;;\; C \in \mathbb{R}}$ 0,5

3) Montrons (sans faire de calcul) que :

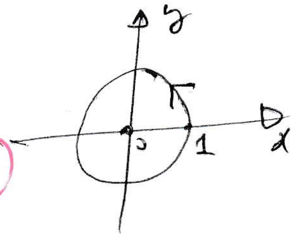
$$\oint_{\Gamma} (f(z)+z)\,dz = 0, \quad \Gamma \text{ un lacet de } \mathbb{C}.$$

Comme $f(z)$ est une fonction holomorphe 0,5 et $g(z)=z$ est aussi une fonction holomorphe 0,5 $\Big\} \Rightarrow f(z)+z \in H(\mathbb{C})$; 0,5

donc $\oint_{\Gamma} (f(z)+z)\,dz = 0$. 0,5

Exo N°4 : Calcul d'intégrale :

1) $\oint_\Gamma z\,dz$; $z=\Gamma(\theta)=e^{i\theta}$. 0,5



$$\oint_\Gamma z\,dz = \int_0^{2\pi} e^{i\theta}\, d(e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} e^{i\theta}\, i e^{i\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} i e^{i2\theta}\, d\theta$$ 0,5

$$= i\int_0^{2\pi} e^{i2\theta}\, d\theta.$$

$$\left[e^{(2i)\theta}\right]' = 2i\, e^{(2i)\theta} \qquad e^{(2i)\theta} = 2i\int e^{(2i)\theta}\, d\theta.$$

$$\int e^{(2i)\theta}\, d\theta = \frac{e^{(2i)\theta}}{2i}$$

$$\oint_\Gamma z\,dz = i\int_0^{2\pi} e^{(2i)\theta}\, d\theta = i\left[\frac{e^{(2i)\theta}}{2i}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\cos 2\theta + i\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos 4\pi + i\sin 4\pi - \cos 0 - i\sin 0\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + 0 - 1 - 0\right] = 0.$$ 0,5

$$\boxed{\oint_\Gamma z\,dz = 0}\ , \quad z=\Gamma(\theta)=e^{i\theta}$$

2) $\oint_\Gamma \frac{dz}{z}$; $z=\Gamma(\theta)=e^{i\theta}$

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{d(e^{i\theta})}{e^{i\theta}} = \int_0^{2\pi} \frac{i e^{i\theta}}{e^{i\theta}}\, d\theta = i\int_0^{2\pi} d\theta.$$ 0,5

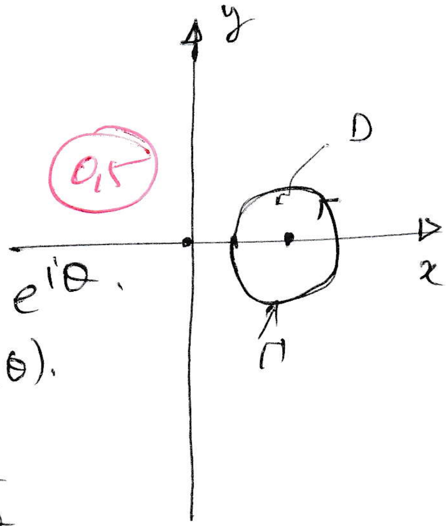
$$\oint_\Gamma \frac{dz}{z} = i\int_0^{2\pi} d\theta = i\,\left[2\pi - 0\right] = 2\pi i$$

$$\boxed{\oint_\Gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i}\ ;\quad z = \Gamma(\theta) = e^{i\theta}.$$ 0,5

3) la fonction $f(z)=\frac{1}{z}$ est holomorphe dans D. 0,5

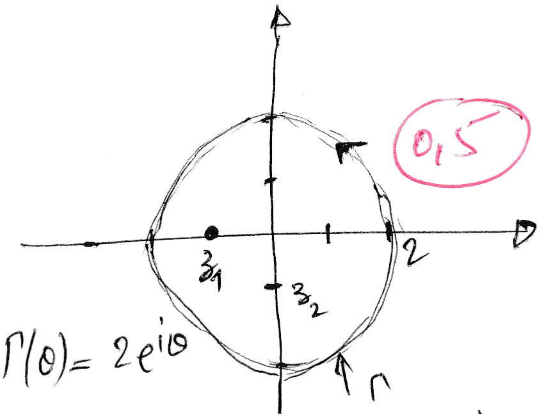
donc $\boxed{\oint_\Gamma \frac{dz}{z} = 0}$; $\Gamma(\theta) = 2 + e^{i\theta}$

$z = 2 + e^{i\theta}$.
$= \Gamma(\theta)$.



4)

$$f(z) = \frac{z^2+1}{(z+i)(z+1)}$$



$z = \Gamma(\theta) = 2e^{i\theta}$

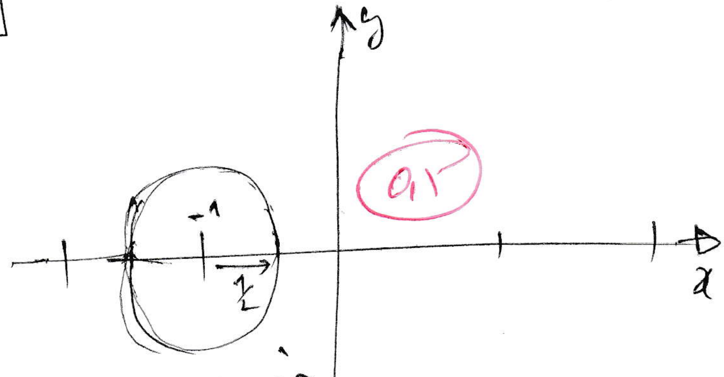
Les pôles sont $z_2 = -i$ et $z_1 = -1$; les deux pôles sont à l'intérieur du Lacet. 0,5 Posons $g(z) = z^2 + 1$.

$$\oint_\Gamma \frac{z^2+1}{(z+i)(z+1)}\,dz = \frac{2\pi i}{-i+1}\left[g(-i) - g(-1)\right] = \frac{2\pi i}{1-i}\left[(-i)^2+1 - \left((-1)^2+1\right)\right]$$

$$= \frac{2\pi i}{1-i}\left[(-1+1) - (1+1)\right] = \frac{-4\pi i}{1-i}$$ 1

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \frac{z^2+1}{(z+i)(z+1)}\,dz = \frac{4\pi i}{i-1}} \quad ; \quad \Gamma(\theta) = 2e^{i\theta}.$$

$$2) \quad \oint_{\Gamma} \frac{z^2+1}{(z+i)(z+1)}\,dz$$



$\Gamma(\theta) = -1 + \frac{1}{2}e^{i\theta}$

Les pôles sont $z_2 = -i$ et $z_1 = -1$, or $z_1 = -1$ à l'intérieur du lacet Γ et z_2 en dehors du lacet Γ

0,5

$$\oint_{\Gamma} \frac{z^2+1}{(z+i)(z+1)}\,dz = \oint_{\Gamma} \frac{\left(\frac{z^2+1}{z+i}\right)}{z+1}\,dz \; ; \quad \text{posons } g(z) = \frac{z^2+1}{z+i}$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{z^2+1}{(z+i)(z+1)}\,dz = 2\pi i \left[g(z)\right]_{z=-1} = 2\pi i \left[\frac{(-1)^2+1}{-1+i}\right].$$

$$= 2\pi i \left[\frac{2}{i-1}\right] = \frac{4\pi i}{i-1}$$

0,5

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \frac{z^2+1}{(z+i)(z+1)}\,dz = \frac{4\pi i}{i-1}} \quad ; \quad \Gamma(\theta) = -1 + \frac{1}{2}e^{i\theta}$$