

Université ZIANE Achour - Djelfa  
 Faculté des Sciences Exactes et Informatique  
 Département de Physique  
 Niveau : M1 – Physique de la matière condensée

Date : ??/06/2019, Durée 1H30

**Examen du Rattrapage – Méthodes mathématiques pour la physique -I-**

**Exercice N°1 [06 points] :**

- 1) Trouver le module et l'argument des nombres complexes  $z_1 = \sqrt{3} - i$  et  $z_2 = \sqrt{3} + i$ . (1)
- 2) Calculer :  $\text{Log}(\sqrt{3} + i)$  et  $\text{Log}(\sqrt{3} - i)$ . (1)
- 3) Calculer :  $\text{Log}\left(\frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i}\right)$  et  $\text{Log}(\sqrt{3} + i) - \text{Log}(\sqrt{3} - i)$ . Conclure. (2)
- 4) Ecrire les nombres complexes  $z_1$  et  $z_2$  sous forme exponentielle. (1)
- 5) En déduire la forme exponentielle de  $z = \left(\frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i}\right)^{100}$ . (1)

**Exercice N°2 [06 points]:**

- 1) Montrer que la fonction ( $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ) définie ci-dessous est harmonique. (2)  

$$u(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$
- 2) Trouver une fonction ( $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ) pour que la fonction  $f = u + iv$  soit holomorphe. (2)
- 3) Dédire que l'intégrale :  $\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$ ,  $\Gamma$  est lacet quelconque de  $\mathbb{C}$ . (2)

**Exercice N°3 [08 points] :**

Calculer les intégrales suivantes :

- 1)  $\oint_{\Gamma} z dz$ ,  $\Gamma$  est un cercle de centre (0,0) et du rayon 1. (2)
- 2)  $\oint_{\Gamma} \frac{1}{z} dz$ ,  $\Gamma$  est un cercle de centre (0,0) et du rayon 1. (1)
- 3)  $\oint_{\Gamma} \frac{1}{z} dz$ ,  $\Gamma$  est un cercle de centre (2,0) et du rayon 1. (2)
- 4)  $\oint_{\Gamma} \frac{z^2 + 1}{(z + i)(z + 1)} dz$ ,  $\Gamma$  est un cercle de centre (0,0) et du rayon 2. (2)
- 5)  $\oint_{\Gamma} \frac{z^2 + 1}{(z + i)(z + 1)} dz$ ,  $\Gamma$  est un cercle de centre (-1,0) et du rayon  $\frac{1}{2}$ . (1)

Bon courage

EXON<sup>o</sup> 1 (6 points)

1) Modules et arguments de nombres complexes  $z_1, z_2$

\* )  $z_1 = \sqrt{3} - i$

$|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$  (0,75)

$z_1 = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \right) = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right)$

$z_1 = 2 e^{i \left( -\frac{\pi}{6} \right)} \Rightarrow \boxed{\arg(z_1) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$  (0,25)

\*\* )  $z_2 = \sqrt{3} + i$

$|z_2| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$  (0,25)

$z_2 = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 e^{i \left( \frac{\pi}{6} \right)}$

$\boxed{\arg(z_2) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$  (0,25)

2)  $\text{Log}(z_1) = \text{Ln}|z_1| + i \arg(z_1) = \text{Ln}2 + i \left( -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right)$

$\boxed{\text{Log}(z_1) = \text{Ln}(2) + i \left( -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right), k \in \mathbb{Z}}$  (0,5)

$\text{Log}(z_2) = \text{Ln}|z_2| + i \arg(z_2) = \text{Ln}2 + i \left( \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right)$

$\boxed{\text{Log}(z_2) = \text{Ln}(2) + i \left( \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right), k \in \mathbb{Z}}$  (0,5)

$$3) \frac{z_2}{z_1} = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{2 e^{i(\pi/6)}}{2 e^{i(-\pi/6)}} = e^{i(\pi/6 + \pi/6)} = e^{i(\pi/3)}$$

$$|\frac{z_2}{z_1}| = 1 \text{ et } \arg(\frac{z_2}{z_1}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (0,5)$$

$$\text{donc } \text{Log}(\frac{z_2}{z_1}) = \ln|\frac{z_2}{z_1}| + i \arg(\frac{z_2}{z_1})$$

$$\log(\frac{z_2}{z_1}) = \ln(1) + i(\frac{\pi}{3} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{\text{Log}(\frac{z_2}{z_1}) = i(\frac{\pi}{3} + 2k\pi); k \in \mathbb{Z}} \quad (0,5)$$

$$(**) \text{Log}(\sqrt{3}+i) - \text{Log}(\sqrt{3}-i) = \text{Log}(z_2) - \text{Log}(z_1)$$

$$\begin{aligned} \text{Log}(z_2) - \text{Log}(z_1) &= \ln(2) + i(\frac{\pi}{6} + 2k\pi) - \ln(2) - i(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi) \\ &= \ln(2) - \ln(2) + i(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi - 2k\pi) \\ &= i(\frac{\pi}{3}) = i(\frac{\pi}{3} + 2k\pi) \text{ pour } k=0 \quad (0,5) \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } \boxed{\text{Log}(\frac{z_2}{z_1}) = \text{Log}(z_2) - \text{Log}(z_1) \text{ pour } k=0 \text{ principal}}$$

$$4) z_1 = 2 e^{i(-\pi/6)}, z_2 = 2 e^{i(\pi/6)} \quad (0,5)$$

$$5) z = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{100} = \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{100} = \left(\frac{2 e^{i(\pi/6)}}{2 e^{i(-\pi/6)}}\right)^{100} = \left(e^{i(\pi/6 + \pi/6)}\right)^{100}$$

$$z = \left(e^{i(\pi/3)}\right)^{100} = e^{i(\frac{100\pi}{3})} = \cos\left(\frac{100\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{100\pi}{3}\right) \quad (0,5)$$

$$\frac{100\pi}{3} = \frac{(33 \times 3 + 1)\pi}{3} = 33\pi + \frac{\pi}{3} = 32\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$



$$\cos\left(32\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(32\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{dmc } z = \cos\frac{100\pi}{3} + i \sin\left(\frac{100\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (015)$$

Fin.

## EXON = 2 :

$$u: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto u(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy + 2x + 3y$$

1) Montrons que  $u$  est harmonique :

$$\text{Calculons } \Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \quad (0,5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right] = \frac{\partial}{\partial x} [2x - 2y + 2]$$

$$= 2 \quad (0,5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right] = \frac{\partial}{\partial y} [-2y - 2x + 3]$$

$$= -2 \quad (0,5)$$

$$\Delta u(x, y) = 2 + (-2) = 0 \Rightarrow \text{la fonction } u \text{ est harmonique} \quad (0,5)$$

2) trouver une fonction  $(v: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R})$  /  $f = u + iv$  soit holomorphe.

$$\text{Condition de Cauchy-Riemann : } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \end{cases} \quad (0,5)$$

pour une fonction holomorphe

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 2x - 2y + 2 \quad \dots \textcircled{1} \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -2y - 2x + 3 \quad \dots \textcircled{2} \end{array} \right\} \quad (0,5)$$

$$\textcircled{1} \quad \partial v = (2x - 2y + 2) dy \Rightarrow v(x, y) = \int (2x - 2y + 2) dy$$

①

$$v(x,y) = 2xy - y^2 + 2y + F(x) \dots \textcircled{3}$$

remplaçons cette équation  $\textcircled{3}$  dans l'équation  $\textcircled{3}$ .

$$-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -[2y + F'(x)] = -2y - 2x + 3.$$

$$-2y - F'(x) = -2y - 2x + 3$$

$$F'(x) = 2x - 3 \Rightarrow F(x) = \int (2x - 3) dx$$

$$F(x) = x^2 - 3x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

donc  $\boxed{v(x,y) = 2xy - y^2 + 2y + x^2 - 3x + C, \quad C \in \mathbb{R}}$   $\textcircled{0,5}$

$\textcircled{3}$  Démonstration que  $\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$ ,  $\Gamma$  lacet quelconque

en appliquant le théorème de Cauchy sur la fonction holomorphe (puisque  $f$  est holomorphe)  $\Rightarrow$

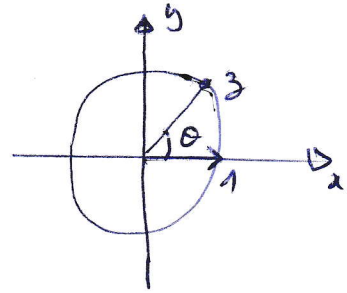
$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0, \quad \forall \Gamma \text{ lacet fermé dans } \mathbb{C}. \quad \textcircled{2}$$

Fin

### EXON 3

1)  $\oint_{\Gamma} z dz$ ,  $\Gamma$  Cercle du centre  $(0,0)$  et du rayon 1.

$$\begin{cases} z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \\ \theta \in [0, 2\pi[ \end{cases} \quad (1)$$



$$dz = d(e^{i\theta}) = i e^{i\theta} d\theta.$$

$$\oint_{\Gamma} z dz = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} i e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} i e^{i(2\theta)} d\theta \quad (0,5)$$

$$= \left[ \frac{i}{2i} e^{2i\theta} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} [e^{4\pi i} - e^0]$$

$$e^{4\pi i} = e^{(0+4\pi)i} = e^0$$

$$\oint_{\Gamma} z dz = \frac{1}{2} [e^0 - e^0] \Rightarrow \boxed{\oint_{\Gamma} z dz = 0} \quad (0,5)$$

2<sup>e</sup> Méthode (application du théorème de Cauchy)

$f(z) = z$  est une fonction dérivable ( $f'(z) = 1$ ) et  $f'(z) = 1$  continue sur  $\mathbb{C} \Rightarrow f$  holomorphe

$$\Downarrow$$
$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \oint_{\Gamma} z dz = 0. \quad (2)$$

2)  $\oint_{\Gamma} \frac{1}{z} dz$ ;  $\Gamma$  Cercle du centre  $(0,0)$  et du rayon 1



En utilisant le même changement de variable que ①.

$$z = e^{i\theta} \Rightarrow dz = i e^{i\theta} d\theta \quad (95)$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} \cdot i e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = i \theta \Big|_0^{2\pi}$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = i [2\pi - 0] = 2\pi i$$

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i} \quad (95)$$

③  $\oint_{\Gamma} \frac{1}{z} dz$ ,  $\Gamma$  est un cercle de centre  $(2, 0)$  et de rayon 1.

le point  $z=0$  n'est pas à l'intérieur

du contour et  $f(z) = \frac{1}{z}$  dérivable

et sa dérivée est continue sur  $\mathbb{C} - \{0\}$ .

donc  $f$  est holomorphe sur dans le cercle.

∴ théorème de Cauchy.

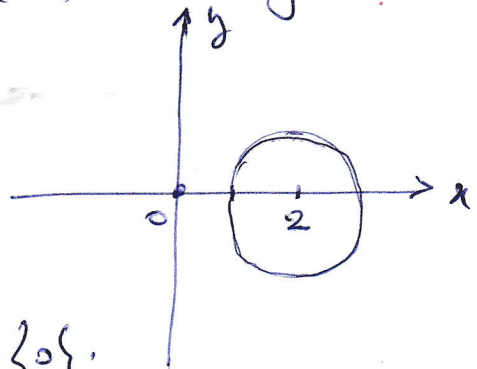
$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = 0. \quad (91)$$

Deuxième méthode (par calcul): en utilisant le changement

de variable  $z = z_0 + r e^{i\theta}$ ,  $z_0 = 2$  et  $r = 1$ .

donc  $z = 2 + e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi[$ . (1)

②





$$dz = i e^{i\theta} d\theta$$

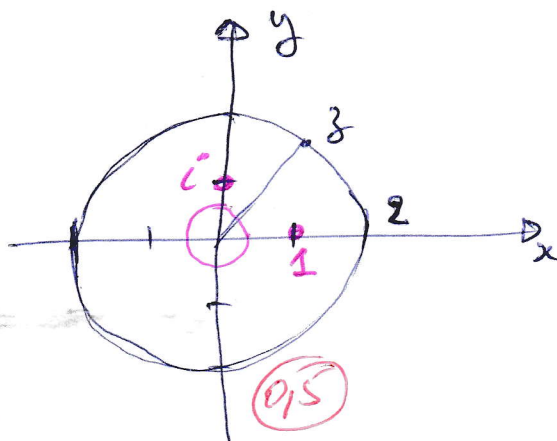
$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+e^{i\theta}} i e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{i e^{i\theta}}{2+e^{i\theta}} d\theta$$

$$= \text{Ln}(2+e^{i\theta}) \Big|_0^{2\pi} = \text{Ln}(2+e^{(2\pi)}) - \text{Ln}(2+e^{i0})$$

$$= \text{Ln} 2 - \text{Ln} 2 = 0 \quad (1)$$

$$\leq 1) \quad \oint_{\Gamma} \frac{z^2+1}{(z+i)(z+1)} dz, \quad \Gamma \text{ Cercle du rayon } (0,0) \text{ et du rayon } 2$$

on a la fonction  $f(z) = z^2 + 1$   
est holomorphe dans  $\mathbb{C}$ .



En utilisant la formule d'intégrale  
de Cauchy.

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z+i)(z+1)} dz = \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-(-i))(z-(-1))} dz \quad (0,5)$$

$$= \frac{2\pi i}{(-i)-(-1)} [f(-i) - f(-1)] \quad (0,5)$$

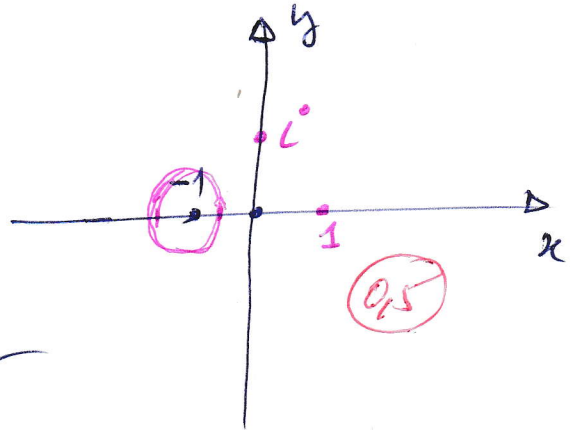
$$= \frac{2\pi i}{1-i} [(-i)^2 + 1 - ((-1)^2 + 1)]$$

$$= \frac{2\pi i}{1-i} [-1 + 1 - 2] = \frac{-4\pi i}{1-i}$$

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \frac{z^2+1}{(z+i)(z+1)} dz = \frac{-4\pi i}{1-i}} \quad (0,5)$$

(3)

$\oint_{\Gamma} \frac{z^2+1}{(z+i)(z+1)} dz$ ,  $\Gamma$  est un arc de centre  $(-1,0)$  et de rayon  $\frac{1}{2}$



La fonction  $f(z) = \frac{z^2+1}{(z+i)(z+1)}$  est

holomorphe à l'intérieure du cercle de centre  $(-1,0)$  et de

rayon  $\frac{1}{2} \implies$   $\oint_{\Gamma} \frac{z^2+1}{(z+i)(z+1)} dz = 0$  (théorème de Cauchy)

$f(z)$