جامعة زيان عاشور بالجلفة **السنة الجامعية 2022-2023**

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية وعلوم التسيير **مقياس رياضيات 1**

قسم الجذع المشترك **مسؤول المقياس: د.شيخاوي عبد العزيز**

المحور الاول: التحليل التوافقي (Combinatory Analysis 2)

المحاضرة رقم 02:

3 التوفيقة:

لتكن E مجموعة مكونة من n عنصر و ليكن p عدد طبيعي $0\le p\le n$ عندئذ كل مجموعة جزئية مؤلفة من عنصر من E هي توفيقا يضم p عنصرا من E.

نرمز الي عدد التوافيق التي تضم p عنصرا من مجموعة مكونة من n عنصر بالرمز C_n^P و تعطي بالعلاقة التالية:

$$C_n^P=\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

بعض الحالات:

اذا كان:

$$p=0\Rightarrow C_n^0=\frac{n!}{0!(n-0)!}=\frac{n!}{n!}=1$$
$$p=1\Rightarrow C_n^1=\frac{n!}{1!(n-1)!}=\frac{n(n-1)!}{(n-1)!}=n$$
$$p=n-1\Rightarrow C_n^{n-1}=\frac{n!}{(n-1)!(n-n+1)!}=\frac{n(n-1)!}{(n-1)!}=n$$
$$p=n\Rightarrow C_n^n=\frac{n!}{n!(n-n)!}=\frac{n!}{n!}=1$$

مثال:

قسم سنة اولي جذع مشترك به 8طالبات 12 طالب اردنا تشكيل لجنة متكونة من 4 اعضاء.

- ماهي عدد الحالات الممكنة لتشكيل هذه اللجنة.
- طالبة فقط في اللجنة.

- لجنة متساوية الاعضاء.
- لجنة من نفس الجنس.
- طالبان علي الاقل في اللجنة.
- طالبة علي الاكثر في اللجنة.

الحل:

- عدد الحالات الممكنة لتشكيل هذه اللجنة:

$$C_{20}^{4}=\frac{20!}{4!(20-4)!}=\frac{20x19x18x17x16!}{4!16!}=\frac{20x19x18x17}{4x3x2x1}=4845$$

- طالبة فقط في اللجنة: $C_{8}^{1}.C_{12}^{3}=8.\frac{12!}{3!(12-3)!}=8.\frac{12x11x10x9!}{3!9!}=8.\frac{12x11x10}{3x2x1}=1760$
- لجنة متساوية الاعضاء: $C_{8}^{2}.C_{12}^{2}=\frac{8x7}{2x1}.\frac{12x11}{2x1}=28x66=1848$
- لجنة من نفس الجنس: $C_{8}^{4}+C_{12}^{4}=\frac{8x7x6x5}{4x3x2x1}+\frac{12x11x10x9}{4x3x2x1}=70+495=565$
- طالبان علي الاقل في اللجنة:

$$C_{12}^{2}.C_{8}^{2}+C_{12}^{3}.C_{8}^{1}+C_{12}^{4}.C_{8}^{0}=\frac{12x11}{2x1}.\frac{8x7}{2x1}+\frac{12x11x10}{3x2x1}.8+\frac{12x11x10x9}{4x3x2x1}=66x28+220x8+495=4103$$

- طالبة علي الاكثر في اللجنة: $C_{8}^{1}.C_{12}^{3}+C_{8}^{0}.C_{12}^{4}=8.\frac{12x11x10}{3x2x1}+495=2255$

مثال:

اوراق لعب لـ 32 بطاقة بها ثماني بطاقات حمراء مرقمة من $1\rightarrow 8$ وثماني بطاقات سوداء مرقمة من $1\rightarrow 8$ وثماني بطاقات خضراء مرقمة من $1\rightarrow 8$ وثماني بطاقات زرقاء مرقمة من $1\rightarrow 8$ قمنا بسحب خمس بطاقات عشوائيا و دون خيار

ماهو عدد الحالات الممكنة لسحب:

- بطاقتين حمروين.
- بطاقة واحدة علي الاقل تحمل رقم 1
- بطاقة واحدة سوداء علي الاكثر
- عدم ظهور اللون الاخضر في السحب

الحل:

عدد الحالات الممكنة لسحب بطاقتين حمروين:

$$C_8^2.C_{24}^3=\frac{8!}{2!(8-2)!}.\frac{24!}{3!(24-3)!}=\frac{8x7}{2x1}.\frac{24x23x22x21!}{3x2x1x21!}=5667$$

عدد الحالات الممكنة لسحب بطاقة واحدة علي الاقل تحمل رقم 1:

$$C_4^1.C_{28}^4+C_4^2.C_{28}^3+C_4^3.C_{28}^2+C_4^4.C_{28}^0=4.\frac{28!}{4!(28-4)!}+6.\frac{28!}{3!(28-3)!}+4.\frac{28!}{2!(28-2)!}+1$$

$$=4.\frac{28x27x26x25x24!}{4x3x2x24!}+6.\frac{28x27x26x25!}{3x2x25!}+4.\frac{28x27x26!}{2x26!}+1=81900+19656+1513=10306$$

عدد الحالات الممكنة لسحب بطاقة واحدة سوداء علي الاكثر:

$$C_8^1.C_{24}^4+C_8^0.C_{24}^5=8.\frac{24!}{4!(24-4)!}=8.\frac{24x23x22x21x20!}{4x3x2x1x20!}=8.\frac{24x23x22x21}{4x3x2}=8500$$

عدم ظهور اللون الاخضر في السحب:

$$C_8^0.C_{24}^5=1.\frac{24!}{5!(24-5)!}=\frac{24x23x22x21x20x19!}{5x4x3x2x1x19!}=\frac{24x23x22x21x20}{5x4x3x2}=4250$$

عمليات علي العاملي:

بسط العمليات التالية ثم اكتب النتيجة علي شكل كسر غير قابل للاختزال:

$C_{11}^4.C_5^2$	$C_7^3+C_6^2$	$C_8^2+C_7^2-C_{10}^4$	$2C_9^3-4C_8^3$
$\frac{C_7^4}{C_6^3}$	$\frac{2C_5^3}{3C_6^3}$	$C_7^5xC_7^3-C_7^2$	$3C_7^3+5C_7^2$
$C_n^2+C_n^3$	$C_n^{n-1}+C_{n+1}^n$	$C_n^{n-1}xC_{n+1}^n-n^2$	$C_{n+3}^{n+1}+C_{n+2}^n$
$C_n^p=C_{n-1}^p+C_{n-1}^{p-1}$			بين صحة العلاقة
$C_n^2=28$			حل المعادلة التالية

حل بعض العمليات:

$$C_8^2+C_7^2-C_{10}^4=\frac{8!}{2!(8-2)!}+\frac{7!}{2!(7-2)!}-\frac{10!}{4!(10-4)!}=\frac{8x7}{2x1}+\frac{7x6}{2x1}-\frac{10x9x8x7x6!}{4x3x2x1x6!}$$

$$=28+21-\frac{10x9x8x7}{4x3x2}=49-210=-161$$

$$\frac{2C_5^3}{3C_6^3}=\frac{2\frac{5x4x3}{3x2}}{3\frac{6x5x4}{3x2}}=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$$

$$C_n^2+C_n^3=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3x2}=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=\frac{3n(n-1)+n(n-1)(n-2)}{6}$$
$$=\frac{n(n-1)(n+1)}{6}=\frac{n(n^2-1)}{6}$$

$$C_n^{n-1}xC_{n+1}^n-n^2=nxn-n^2=n^2-n^2=0$$

دستور ثنائي الحد:

$$(a+b)^n=\sum_{p=0}^{p=n}C_n^p a^{n-p}b^p$$

من اجل $n=2$:
$$(a+b)^2=C_2^0a^{2-0}b^0+C_2^1a^{2-1}b^1+C_2^2a^{2-2}b^2=a^2+2ab+b^2$$

من اجل $n=3$:
$$(a+b)^3=C_3^0a^{3-0}b^0+C_3^1a^{3-1}b^1+C_3^2a^{3-2}b^2+C_3^3a^{3-3}b^3=$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

مثلث باسكال:

$n=0$	$(a+b)^0$	1	1						
$n=1$	$(a+b)^1$	$a+b$	1	1					
$n=2$	$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$	1	2	1				
$n=3$	$(a+b)^3$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	1	3	3	1			
.	.	.	1	4	6	4	1		
.	.	.	1	5	10	10	5	1	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
n	$(a+b)^n$	.	1	.	.	.	.	.	.	1

باستعمال معاملات مثلث باسكال نستطيع حساب المنشور: $(a+b)^4$

$$(a+b)^4=a^4b^0+4a^3b^1+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

مثال:

انشر كل من:

$l=\left(x+\frac{2}{x}\right)^4$	$l=\left(3x-\frac{2}{x^2}\right)^3$
$l=\left(2x^2-\frac{1}{x^2}\right)^4$	$l=\left(\frac{1}{x^3}-2x\right)^5$

الحل:

لدينا: $(a+b)^n=\sum_{p=0}^{p=n} C_n^p a^{n-p}b^p$

$$l=\left(x+\frac{2}{x}\right)^4=C_4^0(x)^4\left(\frac{2}{x}\right)^0+C_4^1(x)^3\left(\frac{2}{x}\right)^1+C_4^2(x)^2\left(\frac{2}{x}\right)^2+C_4^3(x)\left(\frac{2}{x}\right)^3+C_4^4(x)^0\left(\frac{2}{x}\right)^4$$
$$=x^4+4x^3\frac{2}{x}+6x^2\frac{4}{x^2}+4x\frac{8}{x^3}+\frac{16}{x^4}=x^4+8x^2+24+\frac{32}{x^2}+\frac{16}{x^4}=x^4+8x^2+24+\frac{16}{x^4}+\frac{32}{x^2}$$

$$l=\left(3x-\frac{2}{x^2}\right)^3=C_3^0(3x)^3\left(\frac{2}{x^2}\right)^0-C_3^1(3x)^2\left(\frac{2}{x^2}\right)^1+C_3^2 3x\left(\frac{2}{x^2}\right)^2-C_3^3\left(\frac{2}{x^2}\right)^3$$
$$=27x^3-27x^2\frac{2}{x^2}+\frac{36}{x^3}-\frac{8}{x^6}$$

$$l=\left(2x^2-\frac{1}{x^2}\right)^4=C_4^0\left(2x^2\right)^4\left(\frac{1}{x^2}\right)^0-C_4^1\left(2x^2\right)^3\left(\frac{1}{x^2}\right)^1+C_4^2\left(2x^2\right)^2\left(\frac{1}{x^2}\right)^2-C_4^3\left(2x^2\right)\left(\frac{1}{x^2}\right)^3+C_4^4\left(2x^2\right)^0\left(\frac{1}{x^2}\right)^4$$
$$=16x^8-32x^6\frac{1}{x^2}+24x^4\frac{1}{x^4}-8x^2\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^8}=16x^8-32x^4+24-\frac{8}{x^4}+\frac{1}{x^8}$$

$$l=\left(\frac{1}{x^3}-2x\right)^5=C_5^0\left(\frac{1}{x^3}\right)^5(2x)^0-C_5^1\left(\frac{1}{x^3}\right)^4(2x)^1+C_5^2\left(\frac{1}{x^3}\right)^3(2x)^2-C_5^3\left(\frac{1}{x^3}\right)^2(2x)^3+C_5^4\left(\frac{1}{x^3}\right)(2x)^4-C_5^5\left(\frac{1}{x^3}\right)^0(2x)^5$$
$$=\frac{1}{x^{15}}-\frac{10}{x^{11}}+\frac{40}{x^7}-\frac{80}{x^3}+80x-32x^5$$

تمرين رقم 1:

ليكن لدينا المنشور التالي: $l=\left(\frac{2}{x^3}+5x^3\right)^3$

1- ماهو الحد الخالي من المتغير x

2- ماهو معامل الحد الثالث.

3- ماهو اس المتغيرة x للحد الرابع.

تمرين رقم 2:

ليكن لدينا المنشور التالي: $l=\left(\frac{1}{x^2}+4x^3\right)^4$

1- ماهو الحد الخالي من المتغير x

2- ماهو معامل الحد الثالث.

3- ماهو اس المتغيرة x للحد الرابع.

تمرين رقم 3:

ليكن لدينا المنشور التالي: $l=\left(2x^3-\frac{1}{x^4}\right)^5$

1- ماهو الحد الخالي من المتغير x

2- ماهو معامل الحد الثالث.

3- ماهو اس المتغيرة x للحد الرابع.

4- اوجد الحد الخامس

تمرين رقم 4:

ليكن لدينا المنشور التالي: $l=\left(x^4+\frac{3}{x^6}\right)^8$

1- ماهو معامل الحد السادس.

2- ماهو اس المتغيرة x للحد السابع.

3- اوجد الحد الخامس

4- ماهو الحد الخالي من المتغير x

5- اوجد الحد الثالث

حل التمرين الاول:

لدينا المنشور: $l=\left(\frac{2}{x^3}+5x^3\right)^3$

الحد الخالي من المتغير x :

$$v_{p+1}=\left(\frac{2}{x^3}+5x^3\right)^3 \Rightarrow a=\frac{2}{x^3}, b=5x^3, n=3, p?$$

نضع

$$v_{p+1}=C_n^p\left(\frac{2}{x^3}\right)^{n-p}\left(5x^3\right)^p$$

$$v_{p+1}=C_3^p\left(\frac{2}{x^3}\right)^{3-p}\left(5x^3\right)^p=5^p.2^{3-p}.C_3^p.x^{-9+3p+3p}=5^p.2^{3-p}.C_3^p.x^{-9+6p}$$

يكون حدا خاليا من المتغيرة x : اذا كان اس المتغيرة معدوما اي:

$$6p-9=0\Rightarrow 6p=9\Rightarrow p=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}\notin \mathrm{N}$$

و منه لا يوجد حدا خاليا من المتغيرة x

2- معامل الحد الثالث:

لدينا:

$$v_{p+1}=\left(\frac{2}{x^3}+5x^3\right)^3 \Rightarrow a=\frac{2}{x^3}, b=5x^3, n=3, p+1=3\Rightarrow p=2$$

$$v_{p+1}=C_3^2\left(\frac{2}{x^3}\right)^{3-2}\left(5x^3\right)^2=2C_3^2\frac{1}{x^3}25x^6=150x^3$$

معامل الحد الثالث هو: 150

3 اس المتغيرة x للحد الرابع:

$$v_{p+1}=\left(\frac{2}{x^3}+5x^3\right)^3 \Rightarrow a=\frac{2}{x^3}, b=5x^3, n=3, p+1=4\Rightarrow p=3$$

$$v_{p+1}=C_3^3\left(\frac{2}{x^3}\right)^0\left(5x^3\right)^3=125x^9=125x^9$$

اس المتغيرة x للحد الرابع هي:9.