جامعة زيان عاشور بالجلفة | السنة الجامعية 2022–2023

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية وعلوم التسيير | مقياس رياضيات 1

قسم الجذع المشترك | مسؤول المقياس: د.شيخاوي عبد العزيز

المحور الرابع: المشتقات (The Derivatives 1)

المحاضرة رقم 05:

قابلية الاشتقاق:

تعريف:

نقول ان دالة f قابلة للاشتقاق عند a اذا تحقق:

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell \quad / \ \ell\in\Re$$

او

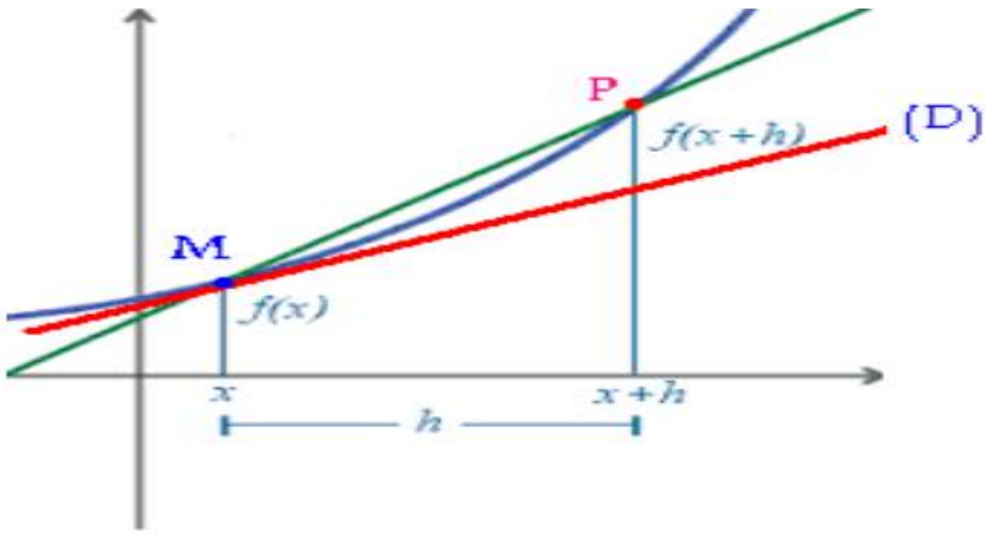
$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell \ / \ \ell\in\Re$$

و ذلك بوضع $x=a+h$ يسمى العدد $f'(a)$ بالعدد المشتق عند a الكتابة التفاضلية

$$f'(x)=\frac{df}{dx}$$

تفسيرها الهندسي منحنيها البياني يقبل مماسا معادلته

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$



قابلية الاشتقاق من اليمين ومن اليسار:

نقول عن الدالة f انها قابلة للاشتقاق عند a من اليسار: $\mathrm{f}'(\mathrm{a}) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{\mathrm{f(x)-f(a)}}{\mathrm{x-a}} = \ell \quad / \ \ell \in \Re$

نقول عن الدالة f انها قابلة للاشتقاق عند a من اليمين: $\mathrm{f}'(\mathrm{a}) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{\mathrm{f(x)-f(a)}}{\mathrm{x-a}} = \ell \quad / \ \ell \in \Re$

بعض الملاحظات:

- نقول عن دالة f انها قابلة للاشتقاق عند a اذا كانت قابلة للاشتقاق من اليمين و من اليسار عند a وتحقق: $l_1 = l_2$ أي ان $f_c'(a) = f'_d(a)$
- اذا كان $l_1 \neq l_2$ أي ان $f_c'(a) \neq f'_d(a)$ فان الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند a و النقطة $M(a; f(a))$ تسمى نقطة زاوية

  تفسيرها الهندسي منحنيها البياني Cf يقبل عند a نصفي مماسين.
- اذا كانت $\mathrm{f}'(\mathrm{a}) = \lim\limits_{x \to a} \frac{\mathrm{f(x)-f(a)}}{\mathrm{x-a}} = 0$ منحنيها البياني Cf يقبل عند a مماسا موازيا لحامل محور الفواصل.
- اذا كانت $\mathrm{f}'(\mathrm{a}) = \lim\limits_{x \to a} \frac{\mathrm{f(x)-f(a)}}{\mathrm{x-a}} = \infty$ منحنيها البياني Cf يقبل عند a مماسا عموديا موازيا لحامل محور التراتيب.
- نقول عن دالة f انها قابلة للاشتقاق على مجال I اذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل مقطة منه.
- كل دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإنها مستمرة على هذا المجال، و العكس ليس دائما صحيحا.

بعض النتائج:

- كل الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على $\Re$.
- كل الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على كل مجال من مجال تعريفها.
- كل الدوال المثلثية قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها.

من خواص الدوال القابلة للاشتقاق:

مشتق التابع الثابت هو 0.

- مشتق التابع f المعرف بـ: $f(x) = x^n$ هو $f'(x) = nx^{n-1}$
-

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(x^n + x^{n-2} x_0 + \ldots x x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \right) = n x_0^{n-1}$$

مشتق التابع الجيبي f المعرف بـ: $f(x) = \sin x$.

لدينا: $\sin x - \sin x_0 = 2\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{2\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x-x_0} = \cos x$$

لان: $\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} = 1$ و منه $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$

- مشتق التابع f المعرف ب: $f(x) = |x|$ من اجل $x \neq 0$ هو

$$- f'(x) = \begin{cases} -1 & si\ x < 0 \\ 1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

الاثبات:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0}= \frac{x}{x} = 1 \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} = -\frac{x}{x} = -1$$

نلاحظ ان الدالة غير قابلة للاشتقاق عند القيمة $x = 0$.

نظرية:

لتكن $f: I \to \Re$ و $g: I \to \Re$ دالتين حقيقيتين معرفتين علي المجال المفتوح I و قابلتين للاشتقاق عند النقطة x_0 من I

يحقق ما يلي:

1. المجموع $f+g$ يقبل الاشتقاق عند النقطة x_0 و لدينا: $(f+g)'x_0 = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. الجداء $f.g$ يقبل الاشتقاق عند النقطة x_0 و لدينا: $(f.g)'x_0 = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$
3. اذا كان $g \neq 0$ فان الكسر $\frac{f}{g}$ يقبل الاشتقاق ولدينا: $\left(\frac{f}{g}\right)'x_0 = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x0)}$

مشتق بعض الدوال المألوفة:

الدالة f	المشتقة f'	شرط الاشتقاق	الدالة f	المشتقة f'	شرط الاشتقاق
a	0	$x\in\Re$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x\in\Re$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$x\in\Re^*$	a^x	$a^x\ln a$	$a\in\Re^*_+;x\in\Re$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x\in\Re^*_+$	$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$x\in\Re^*$
ax^n	anx^{n-1}	$n\in\aleph^*;x\in\Re$	e^x	e^x	$x\in\Re$
ax^n	anx^{n-1}	$n\in\Im/\aleph;x\in\Re^*$	shx	chx	$x\in\Re$
$\cos x$	$-\sin x$	$x\in\Re$	chx	shx	$x\in\Re$
$\sin x$	$\cos x$	$x\in\Re$	$thx=\frac{shx}{chx}$	$\frac{1}{ch^2x}$	$x\in\Re$
$\tan x$	$1+\tan^2 x;\frac{1}{\cos^2 x}$	$k\in Z;x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\in\left]-1;1\right[$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\in\left]-1;1\right[$	$thx=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1};chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2};shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$		

مشتق الدالة المركبة:

تعريف:

لتكن f و g دوال معرفة كما يلي: $f:I\to J$ و $g:k\to\Re, J\subset k$

اذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 من I وكانت الدالة g قابلة للاشتقاق عند $y_0=f(x_0)$ من J ، اذا: $g\circ f$

قابلة للاشتقاق عند x_0 و لدينا: $(g\circ f)'x_0=g'\left[f(x_0)\right].f'(x_0)$

امثلة:

1. $f(x)=\cos^5(3x)$ ، f دالة قابلة للاشتقاق على $\Re$ لدينا $f'(x)=-15\cos^4(3x)\sin 3x$
2. $f(x)=\sin^8(2-3x)$ ، f دالة قابلة للاشتقاق على $\Re$ لدينا: $f'(x)=-24\sin^7(2-3x)\cos(2-3x)$
3. $f(x)=\tan^4(1+2x)$ ، f دالة قابلة للاشتقاق على $\Re$ لدينا: $f'(x)=\frac{8}{\cos^2(1+2x)}\tan^3(1+2x)$

4. $f(x)=e^{3x^2+2x-5}$ ، f دالة قابلة للاشتقاق على $\Re$ لدينا: $f'(x)=(6x+2)e^{3x^2+2x-5}$

مشتق الدالة العكسية:

تعريف:

لتكن f دالة معرفة و مستمرة و رتيبة علي المجال $[a;b]$ و f^{-1} دالتها العكسية

اذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق عند x_0 و $f'(x_0)\neq 0$ فان f^{-1} قابلة للاشتقاق عند $y_0=f(x_0)$:

$$\left(f^{-1}\right)'=\frac{1}{f'\circ f^{-1}} \quad , \quad \left(f^{-1}\right)'y_0=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

امثلة:

- $f(x)=\arcsin(3x)$ ، f هي دالة تقابلية وقابلة للاشتقاق من $]-1;1[$ الى $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ $f'(x)=\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$
- $f(x)=\arctan(2x)$ ، f هي دالة تقابلية وقابلة للاشتقاق على $\Re$ الى $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ $f'(x)=\frac{2}{1+4x^2}$
- $f(x)=\arccos(5x)$ ، f دالة تقابلية وقابلة للاشتقاق من $]-1;1[$ الى $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ $f'(x)=-\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$
- $f(x)=\arctan(\sqrt{x})$ ، f هي دالة تقابلية وقابلة للاشتقاق على $\Re^+$ الى $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ $f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x^2}$

مشتق الدوال من الرتب العليا:

لتكن f الدالة قابلة للاشتقاق على المجال I ، و مشتقتها f' وكانت f' دالة قابلة للاشتقاق على المجال I مشتقتها f''

نقول ان f'' هي المشتق الثاني للدالة f .

و بصفة عامة المشتق الي الدرجة n لـ f هو المشتق من الدرجة n و يعطى بالعلاقة التراجعية التالية:

$$f^{(n)}=\left(f^{(n-1)}\right)', \forall n\geq 0, f^{(0)}=f$$

مثال:

1- من اجل $x\in\Re, n\in\aleph$ لدينا $\sin^{(n)}x=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

$$f(x)=\sin x$$

$$f(x)=\sin x\Rightarrow f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$f''(x) = -\sin x = \sin(x+\pi)$.

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

2 – من اجل $x \in \Re, n \in \aleph$ لدينا:

$$\cos^{(n)} x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$