جامعة زيان عاشور بالجلفة — السنة الجامعية 2022–2023

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير — مقياس رياضيات 1

قسم الجذع المشترك — مسؤول المقياس: د. شيخاوي عبد العزيز

المحور الخامس: الدوال الاصلية وحساب التكامل

(**The Primitive functions and Integral calculation 1**)

محاضرة رقم 07:

التكامل:

التابع الاصلي (الدالة الاصلية):

تعريف:
التابع الاصلي للدالة $f(x)$ هو ذلك التابع $F(x)$ بحيث $F'(x)=f(x)$ ، هناك مالا نهاية من التوابع الاصلية للدالة $f(x)$ هي $F(x)+c$ حيث يكون: $(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$

2-1-4 التكامل الغير محدود:

ايجاد التابع الاصلي للدالة $f(x)$ بالمكاملة الغير محددة و يرمز له بالرمز $\int f(x)dx$ حيث يسمى $f(x)$ التابع المكامل اما (x) بمتغير التكامل و يكتب على الشكل: $\int f(x)dx=F(x)+c$ ويسمى c ثابت التكامل.

التكامل المحدود:

هو حساب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى البياني Cf الممثل للدالة $f(x)$ و المستقيمين $x=a$ و $x=b$ حيث $a\prec b$

و محور الفواصل (ox) أي: $I=\int_a^b f(x)=F(b)-F(a)$

مثال: احسب التكامل التالي: $I=\int_2^4 3x^2.dx=\left[\frac{3x^3}{3}\right]_2^4=\left[x^3\right]_2^4=4^3-2^3=56$

خصائص التكامل المحدد:

اذا كان $f(x)$ و $g(x)$ دالتين مستمرتين و $x\in[a,b]$ فان:

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

- $\int_a^b f(x).dx = \int_a^k f(x).dx + \int_k^b f(x).dx ......k \in [a,b]$ حسب علاقة شال
- $\int_a^a f(x).dx = 0$
- $\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)] dx = \int_a^b \alpha f(x).dx \pm \int_a^b \beta f(x).dx$
- $f(x) \geq 0; \forall x \in [a,b] / \int_a^b f(x) dx \geq 0$
- $f(x) \leq g(x); \forall x \in [a,b] / \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$
- $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b | f(x) | .dx. / a \prec b$
- $m \leq f(x) \leq M; \forall x \in [a,b] / m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$
- التكامل هو عملية توزيعية على الجمع و الطرح أي: $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
- يمكن اخراج العدد الثابت منم التكامل أي: $\int a.f(x).dx = a \int f(x).dx$

بعض التكاملات الشهيرة:

$1- \int x^n.dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \forall n / n \neq -1$

$2- \int f^n f'.dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + c, \forall n / n \neq -1$

$3- \int (ax+b)^n.dx = \frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c, \forall n / n \neq -1$

$4- \int \frac{1}{x}.dx = \log|x| + c$

$5- \int \frac{f'}{f}.dx = \log|\mathrm{f}| + c$

$6- \int e^x.dx = e^x + c$

$7- \int e^{ax+b}.dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$

$8- \int f'(x) e^{f(x)}.dx = e^{f(x)} + c$

$9- \int a^x.dx = \frac{a^x}{\ln a} + c / a \succ 0$

$10- \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$

$11- \int \frac{-dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arccos \frac{x}{a} + c$

$$12-\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c$$

$$13-\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\arg shx+c$$

$$14-\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\arg chx+c$$

$$15-\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$$

$$16-\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\log\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+c$$

$$17-\int\sin(ax+b).dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$$

$$18-\int\cos(ax+b).dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$$

$$19-\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+c$$

$$20-\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-c\tan+c$$

$$21-\int\tan x.dx=-\log|\cos x|+c$$

$$22-\int c\tan x.dx=\log|\sin x|+c$$

$$23-\int\frac{dx}{\sin x}=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+c$$

$$24-\int\frac{dx}{\cos x}=\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+c$$

$$25-\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+c$$

2-4 طرق عامة في حساب التكامل:

طريقة التكامل بالتجزئة:

لدينا $d(u.v)=v.du+u.dv$

بمكاملة الطرفين نجد:

$$\int d(u.v)=\int v.du+\int u.dv\Rightarrow u.v=\int v.du+\int u.dv\Rightarrow$$
$$\int u.dv=u.v-\int v.du$$

يستعمل التكامل بالتجزئة في كثير من الحالات نذكر البعض منها:

الحالة الاولى:

تكامل من الشكل: $I=\int x^n.e^{ax+b}.dx$

نستعمل التكامل بالتجزئة نضع:

$$\begin{cases} u = x^n \Rightarrow du = nx^{n-1}.dx \\ dv = e^{ax+b}dx \Rightarrow v = \frac{1}{a}e^{ax+b} \end{cases}$$

مثال:

$$I = \int (3x+2)e^{5x+1}.dx$$

$$\begin{cases} u = 3x+2 \Rightarrow du = 3.dx \\ dv = e^{5x+1}dx \Rightarrow v = \frac{1}{5}e^{5x+1} \end{cases}$$

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

$$I = \int (3x+2)e^{5x+1}.dx = \frac{1}{5}(3x+2).e^{5x+1} - \int 3.\frac{1}{5}e^{5x+1}dx$$

$$I = \frac{1}{5}(3x+2).e^{5x+1} - \frac{3}{5}\int e^{5x+1}dx = \frac{1}{5}(3x+2).e^{5x+1} - \frac{3}{5}.\frac{1}{5}e^{5x+1} = \frac{1}{5}\left(3x+\frac{7}{5}\right).e^{5x+1} + c$$

الحالة الثانية:

تكامل من الشكل:

$$I = \int x^n.\sin(tx).dx \quad \text{او} \quad I = \int x^n.\cos(tx).dx$$

$$\begin{cases} u = x^n \Rightarrow du = nx^{n-1}.dx \\ dv = \sin(t.x)dx \Rightarrow v = -\frac{1}{t}\cos(tx) \end{cases}$$

مثال:

$$I = \int (5x+2).\sin(2x+1).dx$$

$$\begin{cases} u = 5x+2 \Rightarrow du = 5.dx \\ dv = \sin(2x+1).dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) \end{cases}$$

$$I = \int (5x+2).\sin(2x+1).dx = -\frac{1}{2}(5x+2)\cos(2x+1) - \int -\frac{5}{2}\cos(2x+1).dx$$

$$I = -\frac{1}{2}(5x+2)\cos(2x+1) + \frac{5}{2}\int \cos(2x+1).dx = -\frac{1}{2}(5x+2)\cos(2x+1) + \frac{5}{2}.\frac{1}{2}\sin(2x+1) + c$$

$$I = -\frac{1}{2}(5x+2)\cos(2x+1) + \frac{5}{4}\sin(2x+1) + c$$

الحالة الثالثة:

تكامل من الشكل:

$$I = \int x^n.\log x.dx$$

نستعمل التكامل بالتجزئة باختيار ما يلي:

$$\begin{cases} u=\log x \Rightarrow du=\frac{1}{x}.dx \\ dv=x^{n} \Rightarrow v=\frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

مثال:

$$I=\int 1.\log x.dx$$

$$\begin{cases} u=\log x \Rightarrow du=\frac{1}{x}.dx \\ dv=1 \Rightarrow v=x \end{cases}$$

$$I=\int \log x.dx=x\log x-\int 1.dx=x\log x-x+c=x(\log x-1)+c$$

الحالة الرابعة:

تكامل من الشكل:

$$I=\int e^{ax}.\sin(t.x).dx \quad \text{او} \quad I=\int e^{ax}.\cos(tx).dx$$

نلاحظ ان التكامل عبارة عن جداء دالة جيبية في دالة اسية نستعمل التكامل بالتجزئة مرتين لاحظ:

$$I=\int e^{ax}.\cos(tx).dx$$

$$\begin{cases} u=e^{ax} \Rightarrow du=a.e^{ax}.dx \\ dv=\cos(tx)dx \Rightarrow v=\frac{1}{t}\sin(t.x) \end{cases}$$

مثال:

$$I=\int e^{3x+1}.\cos(2x).dx$$

$$\begin{cases} u=e^{3x+1} \Rightarrow du=3e^{3x+1}.dx \\ dv=\cos(2x)dx \Rightarrow v=\frac{1}{2}\sin(2x) \end{cases}$$

$$I=\int e^{3x+1}.\cos(2x).dx=\frac{1}{2}e^{3x+1}.\sin(2x)-\frac{3}{2}\int e^{3x+1}.\sin(2x).dx$$

نستعمل التكامل بالتجزئة مرة ثانية:

$$\begin{cases} u=e^{3x+1} \Rightarrow du=3e^{3x+1}.dx \\ dv=\sin(2x)dx \Rightarrow v=-\frac{1}{2}\cos(2x) \end{cases}$$

$$\int e^{3x+1}.\sin(2x).dx=-\frac{1}{2}e^{3x+1}.\cos(2x)+\frac{3}{2}\int e^{3x+1}.\cos(2x).dx$$

بالتعويض نجد:

$$I=\int e^{3x+1}.\cos(2x).dx=\frac{1}{2}e^{3x+1}.\sin(2x)-\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{3x+1}.\cos(2x)+\frac{3}{2}\int e^{3x+1}.\cos(2x).dx\right]$$

$$I=\int e^{3x+1}.\cos(2x).dx=\frac{1}{2}e^{3x+1}.\sin(2x)+\frac{3}{4}e^{3x+1}.\cos(2x)-\frac{9}{4}\int e^{3x+1}.\cos(2x).dx$$

$$\int e^{3x+1}.\cos(2x).dx+\frac{9}{4}\int e^{3x+1}.\cos(2x).dx=\frac{1}{2}e^{3x+1}.\sin(2x)+\frac{3}{4}e^{3x+1}.\cos(2x)$$

$$\frac{13}{4}\int e^{3x+1}.\cos(2x).dx=\frac{1}{2}e^{3x+1}.\sin(2x)+\frac{3}{4}e^{3x+1}.\cos(2x)$$

$$\int e^{3x+1}.\cos(2x).dx=\frac{4}{13}.\frac{1}{2}e^{3x+1}.\sin(2x)+\frac{4}{13}.\frac{3}{4}e^{3x+1}.\cos(2x)+c$$

$$\int e^{3x+1}.\cos(2x).dx=\frac{2}{13}e^{3x+1}.\sin(2x)+\frac{3}{13}e^{3x+1}.\cos(2x)+c$$

طريقة تغيير متحول:

مثال1:

احسب التكامل التالي:

$$I=\int\frac{x+1}{\left(x^2+2x+5\right)^3}dx$$

نضع مجهول مساعد لحساب التكامل

$$u=x^2+2x+5\Rightarrow du=(2x+2)dx\Rightarrow dx=\frac{du}{2(x+1)}$$

$$I=\int\frac{x+1}{\left(x^2+2x+5\right)^3}dx\Rightarrow I=\int\frac{x+1}{u^3}.\frac{du}{2(x+1)}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^3}=\frac{1}{2}\int u^{-3}.du=\frac{1}{2}.\frac{u^{-2}}{-2}+c=-\frac{1}{4u^2}+c$$

$$I=\int\frac{x+1}{\left(x^2+2x+5\right)^3}dx=-\frac{1}{4\left(x^2+2x+5\right)^2}+c$$

مثال2:

احسب التكامل التالي:

$$I=\int\frac{\tan x}{\cos^4 x}dx$$

$$I=\int\frac{\tan x}{\cos^4 x}dx=\int\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\cos^4 x}dx=\int\frac{\sin x}{\cos^5 x}dx$$

نضع مجهول مساعد لحساب التكامل

$$u=\cos x\Rightarrow du=-\sin x.dx\Rightarrow dx=-\frac{du}{\sin x}$$

$$I=\int\frac{\tan x}{\cos^4 x}dx=\int\frac{\sin x}{\cos^5 x}dx=-\int\frac{\sin x}{u^5}\cdot\frac{du}{\sin x}=-\int\frac{du}{u^5}=-\int u^{-5}du=-\frac{u^{-4}}{-4}+c$$

$$I=\int\frac{\tan x}{\cos^4 x}dx=\frac{u^{-4}}{4}+c=\frac{1}{4u^4}+c=\frac{1}{4\cos^4 x}+c$$