جامعة زيان عاشور بالجلفة — السنة الجامعية 2022–2023

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير — مقياس رياضيات 1

قسم الجذع المشترك — مسؤول المقياس: د. شيخاوي عبد العزيز

المحور الخامس: الدوال الاصلية وحساب التكامل

(The Primitive functions and Integral calculation 2)

محاضرة رقم 08:

تكامل الكسور الناطقة من الشكل $\frac{f(x)}{g(x)}$

بعض الحالات الخاصة:

اذا كان $g \prec f$ حيث f كثير حدود اقل درجة g و g كثير حدود من الدرجة الثانية نميز ما يلي:

الحالة الاولى:

$$I=\int\frac{dx}{a^2+x^2}\Rightarrow I=\int\frac{dx}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}\Rightarrow I=\frac{1}{a}\int\frac{\frac{dx}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

مثال1:

$$I=\int\frac{dx}{x^2+2x+3}\Rightarrow I=\int\frac{dx}{2+(x+1)^2}\Rightarrow I=\int\frac{dx}{\left(\sqrt{2}\right)^2+(x+1)^2}$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+c$$

مثال2:

$$I=\int\frac{dx}{2x^2+4x+5}\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+2x+\frac{5}{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\frac{5}{2}-1+(x+1)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\frac{3}{2}+(x+1)^2}$$

$$I=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}.\arctan\frac{x+1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}+c$$

الحالة الثانية:

$$I=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{ax^2+bx+c}dx=\frac{A}{2a}\log|ax^2+bx+c|+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$$
$$I=\frac{A}{2a}\log|ax^2+bx+c|+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_k$$

مثال1:

$$I=\int\frac{x+5}{x^2-2x+3}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x-2)+6dx}{x^2-2x+3}=\frac{1}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+3}dx+6\int\frac{dx}{x^2-2x+3}$$
$$I=\frac{1}{2}\log|x^2-2x+3|+6\int\frac{dx}{(x-1)^2-1+3}=\frac{1}{2}\log|x^2-2x+3|+6\int\frac{dx}{(x-1)^2+2}$$
$$I=\frac{1}{2}\log|x^2-2x+3|+\frac{6}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{a}}+c$$

مثال2:

$$I=\int\frac{x+3}{x^2-2x-5}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x-2)+4dx}{x^2-2x-5}=\frac{1}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x-5}dx+4\int\frac{dx}{x^2-2x-5}$$
$$I=\frac{1}{2}\log|x^2-2x-5|+4\int\frac{dx}{(x-1)^2-1-5}=\frac{1}{2}\log|x^2-2x+3|+4\int\frac{dx}{(x-1)^2-6}$$
$$I=\frac{1}{2}\log|x^2-2x+3|+4\frac{1}{2\sqrt{6}}\log\left|\frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-1)}\right|+c$$
$$I=\frac{1}{2}\log|x^2-2x+3|+\frac{2}{\sqrt{6}}\log\left|\frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-1)}\right|+c$$

الحالة الثالثة:

اذا كان $f\prec g$ حيث f كثير حدود اقل درجة g و g كثير حدود على شكل جداء عوامل أي :

$$g(x)=(x-a)(x-b)(x-c)......(x-d)$$

$$\int\frac{f(x)}{g(x)}dx=\int\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)......(x-d)}dx=\int\frac{A}{x-a}dx+\int\frac{B}{x-b}dx+\int\frac{C}{x-c}dx...$$
$$\int\frac{D}{x-d}dx=A\log|x-a|+B\log|x-b|+C\log|x-c|+......+D\log|x-d|+c$$

مثال:

$$\begin{cases} c+d=3 \\ b-2c=0 \\ a-2b=0 \\ -2a=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \\ c=-\dfrac{1}{2} \\ d=\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

احسب التكامل التالي: $\int \frac{3x^3+4}{x^3(x-2)}dx$

لحساب هذا التكامل يجب ان نجزئه الي مجموعة من الكسور لاحظ:

$$\frac{3x^3+4}{x^3(x-2)} = \frac{a}{x^3}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x}+\frac{d}{x-2} = \frac{a(x-2)+bx(x-2)+cx^2(x-2)+dx^3}{(x+1)^2(x-3)}$$

$$\frac{ax-2a+bx^2-2bx+cx^3-2cx^2+dx^3}{(x+1)^2(x-3)} = \frac{(c+d)x^3+(b-2c)x^2+(a-2b)x-2a}{(x+1)^2(x-3)}$$

$$\int \frac{3x^3+4}{x^3(x-2)}dx = \int \frac{-2}{x^3}dx + \int \frac{-1}{x^2}dx + \int \frac{-\frac{1}{2}}{x}dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x-2}dx = \frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\log|x|+\frac{1}{2}\log|x-2|$$

$$\int \frac{3x^3+4}{x^3(x-2)}dx = \frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\log\left|\frac{\text{x-2}}{\text{x}}\right|+c$$

الحالة الرابعة:

اذا كان الكسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ بسطه اكبر من المقام أي $f \succ g$ ، نستعمل القسمة الاقليدية للعبارة ثم نحسب التكامل

مثال: احسب التكامل التالي: $\int \frac{x^3-2x^2+3x+1}{x^2+x+1}dx$

نقوم بإجراء القسمة الاقليدية للعبارة نجد:

$$\begin{array}{l|l} x^3-2x^2+3x+1 & x^2+x+1 \\ \hline -x^3-x^2-x & x-3 \\ -3x^2+2x+1 & \\ 3x^2+3x-3 & \\ 5x-2 & \end{array}$$

$$x^3-2x^2+3x+1=(x^2+x+1)(x-3)+5x-2$$

$$\int \frac{x^3-2x^2+3x+1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{(x^2+x+1)(x-3)+5x-2}{x^2+x+1}dx = \int (x-3)dx + 5\int \frac{x}{x^2+x+1}dx - 2\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$$

$$\int (x-3)dx + \frac{5}{2}\int \frac{2x+1-1}{x^2+x+1}dx - 2\int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \int (x-3)dx + \frac{5}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} - 2\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$$

$$\int(x-3)dx+\frac{5}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-\frac{9}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\int(x-3)dx+\frac{5}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-\frac{9}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1}$$

$$\int(x-3)dx+\frac{5}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-\frac{9}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{5}{2}\log|x^2+x+1|-\frac{5}{2}.\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+c$$

$$\int\frac{x^3-2x^2+3x+1}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{5}{2}\log|x^2+x+1|-\frac{5}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c$$

تكامل الدوال المثلثية:

عند حساب التكامل من الشكل: $\int f(\sin x;\cos x;\tan x)dx$

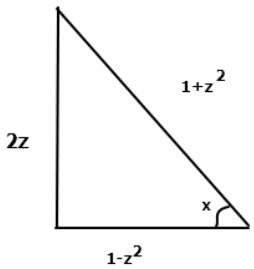
- نكتبه على شكل كسر ناطق
- نستعمل النسب المثلثية
- وضع مجهول مساعد من الشكل

$$z=\tan\frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{2}=\arctan z\Rightarrow\frac{dx}{2}=\frac{dz}{1+z^2}\Rightarrow dx=\frac{2dz}{1+z^2}$$

لدينا: $\tan x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$

$$\tan x=\frac{2z}{1-z^2}$$
$$\sin x=\frac{2z}{1+z^2}$$
$$\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$$



و بالتعويض نجد:

مثال: احسب التكامل التالي: $\int\frac{\sin x}{\sin x-1}dx$

نضع مجهول مساعد

$$z = \tan\frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \arctan z \Rightarrow \frac{dx}{2} = \frac{dz}{1+z^2} \Rightarrow dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

$$\sin x = \frac{2dz}{1+z^2}$$

بالتعويض نجد:

$$\int \frac{\sin x}{\sin x - 1}dx = \int \frac{\frac{2z}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2} - 1} \cdot \frac{2dz}{1+z^2} = \int \frac{4z}{(z-1)^2(z^2+1)}dz$$

ولحساب التكامل نجزئه الى مجموعة من الكسور لاحظ:

$$\frac{4z}{(z-1)^2(z^2+1)} = \frac{a}{(z-1)^2} + \frac{b}{(z-1)} + \frac{cz+d}{z^2+1}$$

نحسب المعاملات بعد توحيد المقامات نجد:

$$\frac{4z}{(z-1)^2(z^2+1)} = \frac{a(z^2+1) + b(z-1)(z^2+1) + (cz+d)(z-1)^2}{(z-1)^2(z^2+1)}$$

$$\frac{4z}{(z-1)^2(z^2+1)} = \frac{az^2 + a + bz^3 - bz^2 + bz - b + cz^3 - 2cz^2 + cz + dz^2 - 2dz + d}{(z-1)^2(z^2+1)}$$

$$\frac{4z}{(z-1)^2(z^2+1)} = \frac{(b+c)z^3 + (a-b-2c+d)z^2 + (b+c-2d)z + a - b + d}{(z-1)^2(z^2+1)}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} b+c=0 \\ a-b-2c+d=0 \\ b+c-2d=4 \\ a-b+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=-2 \end{cases}$$

$$\frac{4z}{(z-1)^2(z^2+1)}=\frac{2}{(z-1)^2}+\frac{-2}{z^2+1}$$

$$\int\frac{4z}{(z-1)^2(z^2+1)}dz=\int\frac{2}{(z-1)^2}dz+\int\frac{-2}{z^2+1}dz=2\int\frac{dz}{(z-1)^2}-2\int\frac{dz}{z^2+1}$$

$$\int\frac{4z}{(z-1)^2(z^2+1)}dz=-\frac{2}{z-1}-2\arctan z$$

$$\int\frac{4z}{(z-1)^2(z^2+1)}dz=-\frac{2}{\tan\frac{x}{2}-1}-2\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right)+c$$

اذا تكامل من الشكل:

- $\int\frac{dx}{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2a}\log|\frac{x+a}{x-a}|+c$
- $\int\frac{dx}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\log|\frac{x-a}{x+a}|+c$
- $\int\frac{dx}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c$

تكامل من الشكل: $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

نكتب الشكل النموذجي للكثير الحدود الموجود داخل الجذر نجد:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{dx}{\sqrt{a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{dx}{\sqrt{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]}}==\int\frac{dx}{\sqrt{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]}}$$

حيث Δ يمثل المميز و يعطى بالعلاقة التالية : $\Delta=b^2-4ac$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{dx}{\sqrt{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}}}$$

و لحساب هذا التكامل نميز الحالات التالية:

- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \log\left| x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$

مثال1: احسب التكامل $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-4+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-1}} = \log\left| x+\sqrt{(x+2)^2-1}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}} = \log\left| x+\sqrt{x^2+4x+3}\right| + c$$

مثال2: احسب التكامل: $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x-x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5-\left(2x+x^2\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5-\left[(1+x)^2-1\right]}} = \int \frac{dx}{\sqrt{6-(1+x)^2}} = \arcsin\frac{x+1}{\sqrt{6}} + c$$

تكامل من الشكل: $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

نضع مجهول مساعد $z = ax^2+bx+c \Rightarrow dz = (2ax+b)dx \Rightarrow dx = \frac{dz}{2ax+b} \Rightarrow xdx = \frac{dz-bdx}{2a}$

$$\int \frac{Axdx+Bdx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{A\left(\frac{dz-bdx}{2a}\right)+Bdx}{\sqrt{z}} = \int \frac{\frac{A}{2a}dz}{\sqrt{z}} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$\int \frac{Axdx+Bdx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{A}{2a}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

مثال: احسب التكامل: $\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$

$$\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx = \int \frac{2x-3}{\sqrt{(x+1)^2-1+5}}dx = \int \frac{2x+2-2-3}{\sqrt{(x+1)^2+4}}dx = \int \frac{2x+2}{\sqrt{(x+1)^2+4}}dx - 5\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}}$$

$$\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx = 2\sqrt{(x+1)^2+4} - 5\log\left| x+1+\sqrt{(x+1)^2+4}\right| + c$$

$$\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx = 2\sqrt{x^2+2x+5} - 5\log\left| x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right| + c$$