FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : MÉCANIQUE QUANTIQUE

DURÉE : 01 Heure 30 Minutes

EXERCICE 01:

Soit un système constitué de deux particules de spin s_1=1/2 et s_2=1, dont on ignore les variables orbitales, L'hamiltonien du système est :

$$H = \omega_1 S_{1Z} + \omega_2 S_{2Z}$$

Où S_{1Z} *et* S_{2Z}sont les projections sur un axe $\overrightarrow{OZ}$ des spins $\overrightarrow{S_1}$ et $\overrightarrow{S_2}$ des deux particules, $\omega_1$et ω_2 des constantes réelles positives telles que $\omega_1 > \omega_2$.

1. **1.** Déterminer les états et les énergies propres de ce système en fonction des états propres $\left|\frac{1}{2}\ m_{S_1}\right\rangle$ de $\overrightarrow{S_1}$ et des états propres $\left|1\ m_{S_2}\right\rangle$ de $\overrightarrow{S_2}$. Identifier l'état fondamental et son énergie.
2. **2.** Déterminer les états propres $|SM\rangle$ communs à S^2 et S_Z.
3. **3.** En déduire les valeurs des coefficients de Clebsh-Gordan.

EXERCICE 02:

Soit $\vec{S}$ le moment cinétique intrinsèque d'un système physique de spin S=1.

1. **1.** Déterminer les matrices représentant S_Z, S_+, S_- et S_y dans la base $|SM\rangle$ des Ket propres de S^2 et S_Z.
2. **2.** On désigne par $S_u = \vec{S}.\vec{u}$ la composante de l'opérateur $\vec{S}$ dans la direction repérée par le vecteur unitaire $\vec{u}$ tel que $(\vec{S},\vec{u}) = \varphi$.

On donne $(\vec{S}.\vec{u})^{2P} = (\vec{S}.\vec{u})^2 \quad si\ P \geq 1$ et $(\vec{S}.\vec{u})^{2P+1} = \vec{S}.\vec{u};\ \ \forall\ la\ valeur\ de\ P$

a) Montre que :

$$\exp(-i\varphi S_u) = 1 - i\ sin\varphi\ S_u - (1 - cos\varphi)S_u^2$$

b) Calculer la matrice qui représente, dans la base $\{|SM\rangle\}$, l'opérateur de rotation R(α,β,γ) correspondant à une rotation géométrique $\mathcal{R}(\alpha,\beta,\gamma)$ définie par les trois angles d'Euler.

EMD 2014/15 $\hbar = 1$

Exercice 01 :

1-

$$s_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad s_2 = 1$$

$s_1 = \frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2} \leq m_1 \leq +\frac{1}{2} \leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$

$$B_1 = \left\{ \left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\,\frac{-1}{2}\right\rangle \right\} \qquad \dim B_1 = 2 = 2s_1 + 1 = 2$$

$B_2 = \{|s_2 m_2\rangle\}$

$s_2 = 1 \rightarrow -1 \leq m_2 \leq +1 \leftrightarrow m_2 = 1, 0, -1$

$B_2 = \{|11\rangle, |10\rangle, |1-1\rangle\}$ $\qquad \dim B_2 = 3 = 2s_2 + 1 = 3$

<u>La Base Découplée</u> B_{12}:

$B_{12} = B_1 \otimes B_2 = \left\{ \left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\,\frac{-1}{2}\right\rangle \right\} \otimes \{|11\rangle, |10\rangle, |1-1\rangle\}$

B_1: $\left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right\rangle \quad \left|\frac{1}{2}\,\frac{-1}{2}\right\rangle$

B_2: $|11\rangle, |10\rangle, |1-1\rangle$

$B_{12} = \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}11\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}10\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}1-1\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}11\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}10\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}1-1\right\rangle$

$$H = \omega_1 S_{1Z} + \omega_2 S_{2Z}$$

$H\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}11\right\rangle = \left(\frac{\omega_1}{2} + \omega_2\right)\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}11\right\rangle$

$H\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}10\right\rangle = \left(\frac{\omega_1}{2}\right)\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}10\right\rangle$

$H\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}1-1\right\rangle = \left(\frac{\omega_1}{2} - \omega_2\right)\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}1-1\right\rangle$

$H\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}11\right\rangle = \left(-\frac{\omega_1}{2} + \omega_2\right)\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}11\right\rangle$

$H\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}10\right\rangle = \left(-\frac{\omega_1}{2}\right)\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}10\right\rangle$

$$H\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}1-1\right\rangle=-\left(\frac{\omega_1}{2}+\omega_2\right)\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}1-1\right\rangle$$

l'état fondamental $\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}1-1\right\rangle$ et son énergie $E_0=-\left(\frac{\omega_1}{2}+\omega_2\right)$

2-

La Base Couplée B:

$$|s_1-s_2|\le S\le s_1+s_2\ \to\frac{1}{2}\le S\le\frac{3}{2}\leftrightarrow S=\frac{1}{2},\frac{3}{2}$$

pour $S=1/2\ \ \to M=0$

$$|SM\rangle=\left\{\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle\right\}$$

pour $J=3/2$

$$\to M=-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},\frac{3}{2}$$

$$|SM\rangle=\left\{\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle,\left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle,\left|\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle,\left|\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle\right\}$$

$$B=\left\{\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle,\left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle,\left|\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle,\left|\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle,\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle\right\}$$

3-

$$|JM\rangle=\sum_{m_1m_2}|j_1m_1j_2m_2\rangle\langle j_1m_1j_2m_2|JM\rangle$$

$$\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle=\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}11\right\rangle$$

$$S_-\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle=(s_{1_-}+s_{2_-})\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}11\right\rangle=s_{1_-}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}11\right\rangle+s_{2_-}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}11\right\rangle$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)}\left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}11\right\rangle+\sqrt{1(1+1)-1(1-1)}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}10\right\rangle$$

$$=\sqrt{3}\left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle=\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}11\right\rangle+\sqrt{2}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}10\right\rangle$$

$$\left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}11\right\rangle+\sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}10\right\rangle$$

$$\left|\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}1-1\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}10\right\rangle$$

$$\left|\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle = \left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}1-1\right\rangle$$

$$\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = \alpha\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}10\right\rangle + \beta\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}11\right\rangle$$

Rotation Orthogonalité : $\langle jm|j'm'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'}$

Rotation Normalisation : $\langle jm|jm\rangle = 1$

Orthogonalité:

$$\left\langle\frac{3}{2}\frac{3}{2}\middle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = 0 = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\left\langle\frac{1}{2}\frac{-1}{2}11\right| + \sqrt{\frac{2}{3}}\left\langle\frac{1}{2}\frac{1}{2}\;10\right|\right]\left[\alpha\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}10\right\rangle + \beta\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}11\right\rangle\right] = \alpha\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{\beta}{\sqrt{3}} = 0$$

$$\alpha = -\frac{\beta}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}\ ,\ \beta = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}10\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}11\right\rangle$$

$$\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}10\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}1-1\right\rangle$$

Exercice 02 :

1-

$$S_z|11\rangle = |11\rangle \ ;\ \ S_z|10\rangle = 0 \ ;\ \ S_z|1-1\rangle = -|1-1\rangle$$

$$S_+|11\rangle = 0 \ ;\ \ S_+|10\rangle = \sqrt{2}\,|11\rangle \ ;\ \ S_+|1-1\rangle = \sqrt{2}|10\rangle$$

$$S_-|11\rangle = \sqrt{2}|10\rangle \ ;\ \ S_-|10\rangle = \sqrt{2}|1-1\rangle \ ;\ \ S_-|1-1\rangle = 0$$

$$S_y = \frac{S_+ - S_-}{2i}$$

$$S_z=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\ ;\ S_+=\begin{pmatrix}0&0&0\\\sqrt{2}&0&0\\0&\sqrt{2}&0\end{pmatrix};\ S_-=\begin{pmatrix}0&\sqrt{2}&0\\0&0&\sqrt{2}\\0&0&0\end{pmatrix};\ S_y=\begin{pmatrix}0&-\sqrt{2}/2i&0\\\sqrt{2}/2i&0&-\sqrt{2}/2i\\0&\sqrt{2}/2i&0\end{pmatrix}$$

$$S_y^2=\begin{pmatrix}0&-\sqrt{2}/2i&0\\\sqrt{2}/2i&0&-\sqrt{2}/2i\\0&\sqrt{2}/2i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-\sqrt{2}/2i&0\\\sqrt{2}/2i&0&-\sqrt{2}/2i\\0&\sqrt{2}/2i&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&0&-1/2\\0&1&0\\-1/2&0&1/2\end{pmatrix}$$

2-a)

$$\exp -i\varphi S_u=e^{-i\varphi S_u}=\sum_{p=0}\frac{(-i\varphi S_u)^{2p}}{(2p)!}+\sum_{p=0}\frac{(-i\varphi S_u)^{2p+1}}{(2p+1)!}=\sum_{p=0}\frac{(-1)^p(\varphi S_u)^{2p}}{(2p)!}-i\sum_{p=0}\frac{(-1)^p(\varphi S_u)^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

$$=\sum_{p=0}\frac{(-1)^p\varphi^{2p}S_u^{2p}}{(2p)!}-i\sum_{p=0}\frac{(-1)^p\varphi^{2p+1}S_u^{2p+1}}{(2p+1)!}=1+\sum_{p=1}\frac{(-1)^p\varphi^{2p}S_u^{2p}}{(2p)!}-i\sum_{p=0}\frac{(-1)^p\varphi^{2p+1}S_u^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

$$=1+S_u^2\sum_{p=1}\frac{(-1)^p\varphi^{2p}}{(2p)!}-iS_u\sum_{p=0}\frac{(-1)^p\varphi^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

$$e^{-i\varphi S_u}=1+(\cos\varphi-1)S_u^2-i\sin\varphi\,S_u=1-(1-\cos\varphi)S_u^2-i\sin\varphi\,S_u$$

b-

$$\langle SM|R(\alpha,\beta,\gamma)|SM\rangle=\langle SM\big|e^{-i\alpha S_z}e^{-i\beta S_y}e^{-i\gamma S_z}\big|SM\rangle=e^{-i\alpha M}e^{-i\gamma M}\langle SM\big|e^{-i\beta S_y}\big|SM\rangle$$

$$=e^{-i(\alpha+\gamma)M}\langle SM\big|1-(1-\cos\beta)S_y^2-i\sin\beta\,S_y\big|SM\rangle$$

$$=e^{-i(\alpha+\gamma)M}\left[1-(1-\cos\beta)\begin{pmatrix}1/2&0&-1/2\\0&1&0\\-1/2&0&1/2\end{pmatrix}-i\sin\beta\begin{pmatrix}0&-\sqrt{2}/2i&0\\\sqrt{2}/2i&0&-\sqrt{2}/2i\\0&\sqrt{2}/2i&0\end{pmatrix}\right]$$

$$=e^{-i(\alpha+\gamma)M}\begin{bmatrix}\frac{1+\cos\beta}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta&\frac{1-\cos\beta}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta&\cos\beta&\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta\\\frac{1-\cos\beta}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta&\frac{1+\cos\beta}{2}\end{bmatrix}$$

$$\langle SM|R(\alpha,\beta,\gamma)|SM\rangle=\begin{pmatrix}\frac{1+\cos\beta}{2}e^{-i(\alpha+\gamma)}&\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta\,e^{-i\alpha}&\frac{1-\cos\beta}{2}e^{-i(\alpha-\gamma)}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta\,e^{-i\gamma}&\cos\beta&\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta\,e^{i\gamma}\\\frac{1-\cos\beta}{2}e^{i(\alpha-\gamma)}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta\,e^{i\alpha}&\frac{1+\cos\beta}{2}e^{i(\alpha+\gamma)}\end{pmatrix}$$

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : MÉCANIQUE QUANTIQUE

DURÉE : 01 Heure 30 Minutes

EXERCICE 01:

Nous considérons deux moments cinétiques J_1 et J_2 avec $j_1 = 1/2$ et $j_2 = 3/2$. On définit :
la base "produit tensoriel " $\boldsymbol{B}_1=\{|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle\}$, la base B2 du moment cinétique total $J = J_1 + J_2$ $\boldsymbol{B}_2=\{|JM\rangle\}$.

1. Quelle est la dimension de l'espace de Hilbert pour ce système ?
2. Quelles sont les valeurs du moment cinétique total J, que nous obtenons en faisant l'addition de j_1 et j_2 ?
3. Calculer les coefficients de Clebsch–Gordan
4. Indication:

• Partir de $|22\rangle$• Faire agir l'opérateur d'échelle $\mathbf{J}_-$ pour obtenir les autres coefficients.

EXERCICE 02:

Soit $\vec{S}$ le moment cinétique intrinsèque d'un système physique de spin S=1.

1. Déterminer les matrices représentant S_Z, S_+, S_- et S_y dans la base $|SM\rangle$ des Ket propres de S^2 et S_Z.
2. On désigne par $S_u = \vec{S}.\vec{u}$ la composante de l'opérateur $\vec{S}$ dans la direction repérée par le vecteur unitaire $\vec{u}$ tel que $(\vec{S},\vec{u}) = \varphi$.

On donne $\left(\vec{S}.\vec{u}\right)^{2P} = \left(\vec{S}.\vec{u}\right)^{2}$ $si\ P \geq 1$ et $\left(\vec{S}.\vec{u}\right)^{2P+1} = \vec{S}.\vec{u};\ \forall\ la\ valeur\ de\ P$

a) Montre que :

$$\exp(-i\varphi S_u) = 1 - i\ sin\varphi\ S_u - (1 - cos\varphi)S_u^2$$

b) Calculer la matrice qui représente, dans la base $\{|SM\rangle\}$, l'opérateur de rotation R(α,β,γ) correspondant à une rotation géométrique $\mathcal{R}(\alpha,\beta,\gamma)$ définie par les trois angles d'Euler.

EXERCICE 03:

Soient b_i^+, b_j^+, b_i et b_j des opérateurs de création et d'annihilation de boson.
Vérifier les relations de commutations suivantes :

- $[b_i\,, b_j\,] = 0$
- $[b_i^+, b_j^+] = 0$
- $[b_i\,, b_j^+] = \delta_{ij}$

EMD 2015/16 $\hbar = 1$

Exercice 01 :

1-

$$j_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad j_2 = \frac{3}{2}$$

$j_1 = \frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2} \leq m_1 \leq +\frac{1}{2} \leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$

$$B_1 = \left\{\left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\,\frac{-1}{2}\right\rangle\right\} \qquad \dim B_1 = 2 = 2j_1 + 1 = 2$$

$B_2 = \{|s_2 m_2\rangle\}$

$j_2 = \frac{3}{2} \rightarrow -1 \leq m_2 \leq +1 \leftrightarrow m_2 = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

$B_2 = \left\{\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle\right\}$ $\qquad \dim B_2 = 4 = 2j_2 + 1 = 4$

La Base Découplée B_{12}:

$B_{12} = B_1 \otimes B_2 = \left\{\left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\,\frac{-1}{2}\right\rangle\right\} \otimes \left\{\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle\right\}$

B_1: $\left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right\rangle \quad \left|\frac{1}{2}\,\frac{-1}{2}\right\rangle$

B_2: $\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle$

$B_{12} = \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle$

2-

La Base Couplée B:

$$|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2 \rightarrow 1 \leq J \leq 2 \leftrightarrow J = 1,2$$

pour $J = 1 \rightarrow M = -1,0,1$

$$|JM\rangle = \{|11\rangle, |10\rangle, |1-1\rangle\}$$

pour $J = 2 \rightarrow M = 2,1,0,-1,-2$

$$|SM\rangle = \{|22\rangle, |21\rangle, |20\rangle, |2-1\rangle, |2-2\rangle\}$$

$$B = \{|22\rangle, |21\rangle, |20\rangle, |2-1\rangle, |2-2\rangle, |11\rangle, |10\rangle, |1-1\rangle\}$$

3-

$$|JM\rangle = \sum_{m_1 m_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM\rangle$$

$$|22\rangle = \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$J_-|22\rangle = (j_{1-} + j_{2-})\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle = j_{1-}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle + j_{2-}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$= \sqrt{2(2+1) - 2(2-1)}|21\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$= 2|21\rangle = \left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle + \sqrt{3}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$|21\rangle = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$J_-|21\rangle = (j_{1-} + j_{2-})\left\{\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle\right\}$$

$$|20\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle$$

$$|2-1\rangle = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle$$

$$|2-2\rangle = \left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle$$

$$|11\rangle = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$|10\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle - \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$|1-1\rangle = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle$$

Exercice 02 :

1-

$$S_z|11\rangle = |11\rangle \quad ; \quad S_z|10\rangle = 0 \quad ; \quad S_z|1-1\rangle = -|1-1\rangle$$

$$S_+|11\rangle = 0 \quad ; \quad S_+|10\rangle = \sqrt{2}\,|11\rangle \quad ; \quad S_+|1-1\rangle = \sqrt{2}|10\rangle$$

$$S_-|11\rangle = \sqrt{2}|10\rangle \quad ; \quad S_-|10\rangle = \sqrt{2}|1-1\rangle \quad ; \quad S_-|1-1\rangle = 0$$

$$S_y = \frac{S_+ - S_-}{2i}$$

$$S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; ; \; S_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}; \; S_- = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; S_y = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2}/2i & 0 \\ \sqrt{2}/2i & 0 & -\sqrt{2}/2i \\ 0 & \sqrt{2}/2i & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2}/2i & 0 \\ \sqrt{2}/2i & 0 & -\sqrt{2}/2i \\ 0 & \sqrt{2}/2i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2}/2i & 0 \\ \sqrt{2}/2i & 0 & -\sqrt{2}/2i \\ 0 & \sqrt{2}/2i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2-a)

$$\exp -i\varphi S_u = e^{-i\varphi S_u} = \sum_{p=0} \frac{(-i\varphi S_u)^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0} \frac{(-i\varphi S_u)^{2p+1}}{(2p+1)!} = \sum_{p=0} \frac{(-1)^p(\varphi S_u)^{2p}}{(2p)!} - i\sum_{p=0} \frac{(-1)^p(\varphi S_u)^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

$$= \sum_{p=0} \frac{(-1)^p\varphi^{2p}S_u^{2p}}{(2p)!} - i\sum_{p=0} \frac{(-1)^p\varphi^{2p+1}S_u^{2p+1}}{(2p+1)!} = 1 + \sum_{p=1} \frac{(-1)^p\varphi^{2p}S_u^{2p}}{(2p)!} - i\sum_{p=0} \frac{(-1)^p\varphi^{2p+1}S_u^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

$$= 1 + S_u^2\sum_{p=1} \frac{(-1)^p\varphi^{2p}}{(2p)!} - iS_u\sum_{p=0} \frac{(-1)^p\varphi^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

$$e^{-i\varphi S_u} = 1 + (\cos\varphi - 1)S_u^2 - i\sin\varphi\, S_u = 1 - (1-\cos\varphi)S_u^2 - i\sin\varphi\, S_u$$

b-

$$\langle SM|R(\alpha,\beta,\gamma)|SM\rangle = \left\langle SM\middle|e^{-i\alpha S_z}e^{-i\beta S_y}e^{-i\gamma S_z}\middle|SM\right\rangle = e^{-i\alpha M}e^{-i\gamma M}\left\langle SM\middle|e^{-i\beta S_y}\middle|SM\right\rangle$$

$$= e^{-i(\alpha+\gamma)M}\left\langle SM\middle|1-(1-\cos\beta)S_y^2 - i\sin\beta\, S_y\middle|SM\right\rangle$$

$$= e^{-i(\alpha+\gamma)M}\left[1-(1-\cos\beta)\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} - i\sin\beta\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2}/2i & 0 \\ \sqrt{2}/2i & 0 & -\sqrt{2}/2i \\ 0 & \sqrt{2}/2i & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= e^{-i(\alpha+\gamma)M}\begin{bmatrix} \frac{1+\cos\beta}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta & \frac{1-\cos\beta}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta & \cos\beta & \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta \\ \frac{1-\cos\beta}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta & \frac{1+\cos\beta}{2} \end{bmatrix}$$

$$\langle SM|R(\alpha,\beta,\gamma)|SM\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\beta}{2}e^{-i(\alpha+\gamma)} & \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta\, e^{-i\alpha} & \frac{1-\cos\beta}{2}e^{-i(\alpha-\gamma)} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta\, e^{-i\gamma} & \cos\beta & \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta\, e^{i\gamma} \\ \frac{1-\cos\beta}{2}e^{i(\alpha-\gamma)} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta\, e^{i\alpha} & \frac{1+\cos\beta}{2}e^{i(\alpha+\gamma)} \end{pmatrix}$$

Exercice 03 :

$$[b_i, b_j] = 0 \quad , \quad [b_i{}^+, b_j{}^+] = 0 \quad , \quad [b_i, b_j{}^+] = \delta_{ij}$$

$b_i b_j^+ - b_j^+ b_i =$

$i \neq j$:

$$b_i b_j^+|n_1, n_2, \dots n_i \dots n_j \dots.\rangle = \sqrt{n_j+1}\,.\,b_i|n_1, n_2, \dots n_i \dots n_j+1 \dots.\rangle$$

$$= \sqrt{n_j+1}\,.\sqrt{n_i}|n_1, n_2, \dots n_i-1 \dots n_j+1 \dots.\rangle$$

$$b_j^+ b_i|n_1, n_2, \dots n_i \dots n_j \dots.\rangle = b_j^+\sqrt{n_i}\,|n_1, n_2, \dots n_i-1 \dots n_j \dots.\rangle$$

$$= \sqrt{n_i}\sqrt{n_j+1}\,|n_1, n_2, \dots n_i-1 \dots n_j+1 \dots.\rangle$$

$$\rightarrow b_i b_j^+ - b_j^+ b_i = 0$$

$i = j$:

$$b_i b_j^+|n_1, n_2, \dots n_i \dots\rangle = \sqrt{n_i+1}\,.\,b_i|n_1, n_2, \dots n_i+1 \dots\rangle$$

$$= \sqrt{n_i+1}\,.\sqrt{n_i+1}|n_1, n_2, \dots n_i \dots\rangle = (n_i+1)|n_1, n_2, \dots n_i \dots\rangle$$

$$b_j^+ b_i|n_1, n_2, \dots n_i \dots n_j \dots.\rangle = b_i^+\sqrt{n_i}\,|n_1, n_2, \dots n_i-1 \dots.\rangle$$

$$= \sqrt{n_i}\sqrt{n_i}\,|n_1, n_2, \dots n_i \dots.\rangle = n_i|n_1, n_2, \dots n_i \dots.\rangle$$

$$(b_i b_j^+ - b_j^+ b_i)|n_1, n_2, \dots n_i \dots\rangle = (b_i b_i^+ - b_i^+ b_i)|n_1, n_2, \dots n_i \dots\rangle = (n_i+1-n_i)|n_1, n_2, \dots n_i \dots\rangle$$
$$= |n_1, n_2, \dots n_i \dots\rangle$$

$[b_i, b_i{}^+] = 1$

EMD 2016/17 $\hbar = 1$

Exercice 01 :

1-

$$s_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad s_2 = 2$$

$s_1 = \frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2} \leq m_1 \leq +\frac{1}{2} \leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$

$$B_1 = \left\{ \left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\,\frac{-1}{2}\right\rangle \right\} \qquad \dim B_1 = 2 = 2s_1 + 1 = 2$$

$B_2 = \{|s_2 m_2\rangle\}$

$s_2 = 2 \rightarrow -2 \leq m_2 \leq +2 \leftrightarrow m_2 = 2,1,0,-1,-2$

$B_2 = \{|22\rangle, |21\rangle, |20\rangle, |2-1\rangle, |2-2\rangle\}$ $\qquad \dim B_2 = 5 = 2s_2 + 1 = 5$

<u>La Base Découplée</u> B_{12}:

$B_{12} = B_1 \otimes B_2 = \left\{ \left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\,\frac{-1}{2}\right\rangle \right\} \otimes \{|22\rangle, |21\rangle, |20\rangle, |2-1\rangle, |2-2\rangle\}$

B_1: $\left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right\rangle \quad \left|\frac{1}{2}\,\frac{-1}{2}\right\rangle$

B_2: $|22\rangle, |21\rangle, |20\rangle, |2-1\rangle, |2-2\rangle$

$$B_{12} = \left\{ \begin{array}{c} \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}22\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}21\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}20\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}2-1\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}2-2\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}22\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}21\right\rangle, \\ \left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}20\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}2-1\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}2-2\right\rangle \end{array} \right\}$$

$$H = \omega_1 S_{1Z} + \omega_2 S_{2Z}$$

$H\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}22\right\rangle = \left(\frac{\omega_1}{2} + 2\omega_2\right)\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}22\right\rangle$

$H\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}21\right\rangle = \left(\frac{\omega_1}{2} + \omega_2\right)\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}21\right\rangle$

$H\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}20\right\rangle = \left(\frac{\omega_1}{2}\right)\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}20\right\rangle$

$H\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}2-1\right\rangle = \left(\frac{\omega_1}{2} - \omega_2\right)\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}2-1\right\rangle$

$H\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}2-2\right\rangle = \left(\frac{\omega_1}{2} - 2\omega_2\right)\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}2-2\right\rangle$

$$H\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}22\right\rangle = \left(-\frac{\omega_1}{2}+2\omega_2\right)\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}22\right\rangle$$

$$H\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}21\right\rangle = \left(-\frac{\omega_1}{2}+\omega_2\right)\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}21\right\rangle$$

$$H\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}20\right\rangle = \left(-\frac{\omega_1}{2}\right)\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}20\right\rangle$$

$$H\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}2-1\right\rangle = \left(-\frac{\omega_1}{2}-\omega_2\right)\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}2-1\right\rangle$$

$$H\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}2-2\right\rangle = -\left(\frac{\omega_1}{2}+2\omega_2\right)\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}2-2\right\rangle$$

l'état fondamental $\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}2-2\right\rangle$ et son énergie $E_0 = -\left(\frac{\omega_1}{2}+2\omega_2\right)$

2-

<u>La Base Couplée B:</u>

$$|s_1 - s_2| \leq S \leq s_1 + s_2 \;\rightarrow \frac{3}{2} \leq S \leq \frac{5}{2} \;\leftrightarrow S = \frac{5}{2},\frac{3}{2}$$

pour $S = \frac{5}{2} \;\rightarrow M = -\frac{5}{2},-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2}$

$$|SM\rangle = \left\{\left|\frac{5}{2}\frac{5}{2}\right\rangle,\left|\frac{5}{2}\frac{3}{2}\right\rangle,\left|\frac{5}{2}\frac{1}{2}\right\rangle,\left|\frac{5}{2}\frac{-5}{2}\right\rangle,\left|\frac{5}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle,\left|\frac{5}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle\right\}$$

pour $J = 3/2$

$$\rightarrow M = -\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},\frac{3}{2}$$

$$|SM\rangle = \left\{\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle,\left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle,\left|\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle,\left|\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle\right\}$$

$$B = \left\{\left|\frac{5}{2}\frac{5}{2}\right\rangle,\left|\frac{5}{2}\frac{3}{2}\right\rangle,\left|\frac{5}{2}\frac{1}{2}\right\rangle,\left|\frac{5}{2}\frac{-5}{2}\right\rangle,\left|\frac{5}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle,\left|\frac{5}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle,\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle,\left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle,\left|\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle,\left|\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle\right\}$$

3-

$$|JM\rangle = \sum_{m_1 m_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle\langle j_1 m_1 j_2 m_2|JM\rangle$$

$$\left|\frac{5}{2}\frac{5}{2}\right\rangle = \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}22\right\rangle$$

$$S_-\left|\frac{5}{2}\frac{5}{2}\right\rangle = (s_{1-}+s_{2-})\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}22\right\rangle = s_{1-}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}22\right\rangle + s_{2-}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}22\right\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}+1\right)-\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}-1\right)}\left|\frac{5}{2}\frac{3}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}22\right\rangle + \sqrt{2(2+1)-2(2-1)}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}21\right\rangle$$

$$= \sqrt{5}\left|\frac{5}{2}\frac{3}{2}\right\rangle = \left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}22\right\rangle + 2\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}21\right\rangle$$

$$\left|\frac{5}{2}\frac{3}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}22\right\rangle + \sqrt{\frac{4}{5}}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}21\right\rangle$$

$$\left|\frac{5}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}21\right\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}20\right\rangle$$

$$\left|\frac{5}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}2-1\right\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}20\right\rangle$$

$$\left|\frac{5}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}2-2\right\rangle + \sqrt{\frac{4}{5}}\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}2-1\right\rangle$$

$$\left|\frac{5}{2}\frac{5}{2}\right\rangle = \left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}2-2\right\rangle$$

$$\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}22\right\rangle - \sqrt{\frac{4}{5}}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}21\right\rangle$$

$$\left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}21\right\rangle - \sqrt{\frac{3}{5}}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}20\right\rangle$$

$$\left|\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}2-2\right\rangle + \sqrt{\frac{4}{5}}\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}2-1\right\rangle$$

$$\left|\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle = -\sqrt{\frac{2}{5}}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}2-1\right\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}20\right\rangle$$

Exercice 02 :

1-

$$\exp -i\varphi J_u = e^{-i\varphi J_u} = \sum_{p=0} \frac{(-i\varphi J_u)^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0} \frac{(-i\varphi J_u)^{2p+1}}{(2p+1)!} = \sum_{p=0} \frac{(-1)^p(\varphi J_u)^{2p}}{(2p)!} - i\sum_{p=0} \frac{(-1)^p(\varphi J_u)^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

$$= \sum_{p=0} \frac{(-1)^p \varphi^{2p} J_u^{2p}}{(2p)!} - i\sum_{p=0} \frac{(-1)^p \varphi^{2p+1} J_u^{2p+1}}{(2p+1)!} = 1 + \sum_{p=1} \frac{(-1)^p \varphi^{2p} J_u^{2p}}{(2p)!} - i\sum_{p=0} \frac{(-1)^p \varphi^{2p+1} J_u^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

$$= 1 + J_u^2 \sum_{p=1} \frac{(-1)^p \varphi^{2p}}{(2p)!} - iJ_u \sum_{p=0} \frac{(-1)^p \varphi^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

$$e^{-i\varphi J_u} = 1 + (\cos\varphi - 1)J_u^2 - i\sin\varphi\, J_u = 1 - (1-\cos\varphi)J_u^2 - i\sin\varphi\, J_u$$

$$e^{-i\alpha S_z}e^{-i\beta S_y}e^{-i\gamma S_z}|11\rangle = e^{-i(\alpha+\gamma)}e^{-i\beta J_y}|11\rangle = e^{-i(\alpha+\gamma)}\big(1-(1-\cos\beta)J_y^2 - i\sin\beta\, J_y\big)|11\rangle$$

$$= e^{-i(\alpha+\gamma)}\big(|11\rangle - (1-\cos\beta)J_y^2|11\rangle - i\sin\beta\, J_y|11\rangle\big)$$

$$J_y^2|11\rangle = J_yJ_y|11\rangle = \frac{1}{2}(|11\rangle - |1-1\rangle)$$

$$J_y|11\rangle = -\frac{\sqrt{2}}{2i}|10\rangle$$

$$e^{-i\alpha S_z}e^{-i\beta S_y}e^{-i\gamma S_z}|11\rangle = e^{-i(\alpha+\gamma)}\left(\frac{1+\cos\beta}{2}|11\rangle + \frac{1-\cos\beta}{2}|1-1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta\,|10\rangle\right)$$

$$e^{-i\alpha S_z}e^{-i\beta S_y}e^{-i\gamma S_z}|10\rangle = e^{-i(\alpha+\gamma)}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta\,|11\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta\,|1-1\rangle + \cos\beta\,|10\rangle\right)$$

2-

$$\langle 1M|R(\alpha,\beta,\gamma)|1M\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\beta}{2}e^{-i(\alpha+\gamma)} & \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta\, e^{-i\alpha} & \frac{1-\cos\beta}{2}e^{-i(\alpha-\gamma)} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta\, e^{-i\gamma} & \cos\beta & \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta\, e^{i\gamma} \\ \frac{1-\cos\beta}{2}e^{i(\alpha-\gamma)} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta\, e^{i\alpha} & \frac{1+\cos\beta}{2}e^{i(\alpha+\gamma)} \end{pmatrix}$$

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

ÉPREUVE de Rattrapage

MODULE : MÉCANIQUE QUANTIQUE

DURÉE : 01 Heure 30 Minutes

EXERCICE 01:

Soit un système constitué de 3 électrons identique indépendants, numérotés arbitrairement 1, 2, 3, possèdent seulement 3 niveaux d'énergie : 0, $\hbar\omega, 2\hbar\omega,$ correspond aux états suivant :$|\varphi_0>, |\varphi_1>, |\varphi_2>$. « fonction orbital».

On suppose que : $H_{total} = h(1) + h(2) + h(3)$. Tel que h : est l'hamiltonien d'une particule.

1. Trouvez les 4 premiers niveaux d'énergie de H et leur degré de dégénérescences.
2. Donner l'expression des états propres correspondants.

EXERCICE 02:

Nous considérons deux moments cinétiques J_1 et J_2 avec $j_1 = 1$ et $j_2 = 3/2$. On définit :

la base "produit tensoriel " $\boldsymbol{B}_1$={$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$}, la base B2 du moment cinétique total $J = J_1 + J_2$

$\boldsymbol{B}_2$={$|JM\rangle$}.

1. Quelle est la dimension de l'espace de Hilbert pour ce système ?
2. Quelles sont les valeurs du moment cinétique total J, que nous obtenons en faisant l'addition de j_1 et j_2 ?
3. Calculer les coefficients de Clebsch–Gordan
4. Indication:
   - Partir de $\left|\frac{5}{2}\frac{5}{2}\right\rangle$• Faire agir l'opérateur d'échelle J_- pour obtenir les autres coefficients.

EXERCICE 03:

On considère un moment cinétique L=1.

1. Déterminer la matrice qui représente l'opérateur L_x dans la base ou M= -1, 0, 1.
2. Calculer L_x^2 puis L_x^3 en déduire les relations suivantes : $(L_x)^{2P} = (L_x)^2$ et $(L_x)^{2P+1} = L_x$, avec p : entier.
3. Montre que :

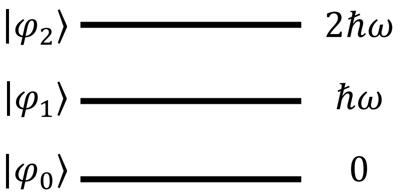
$$\exp(-i\varphi L_x) = 1 + v\,L_x + u\,L_X^2$$

où u et v sont des nombres complexes que l'on déterminera ?

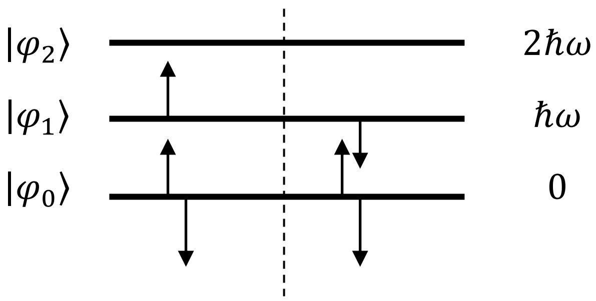
RATTRAPAGE 2014/15 $\hbar = 1$

Exercice 01 :

1- 2-



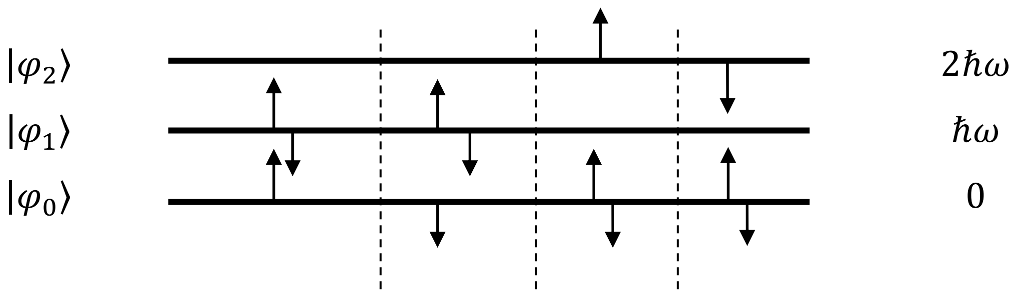
$E_1 = \hbar\omega \qquad g = 2$



$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3!}}\begin{pmatrix} \varphi_0(1)\beta(1) & \varphi_0(1)\alpha(1) & \varphi_1(1)\beta(1) \\ \varphi_0(2)\beta(2) & \varphi_0(2)\alpha(2) & \varphi_1(2)\beta(2) \\ \varphi_0(3)\beta(3) & \varphi_0(3)\alpha(3) & \varphi_1(3)\beta(3) \end{pmatrix}$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3!}}\begin{pmatrix} \varphi_0(1)\beta(1) & \varphi_0(1)\alpha(1) & \varphi_1(1)\alpha(1) \\ \varphi_0(2)\beta(2) & \varphi_0(2)\alpha(2) & \varphi_1(2)\alpha(2) \\ \varphi_0(3)\beta(3) & \varphi_0(3)\alpha(3) & \varphi_1(3)\alpha(3) \end{pmatrix}$$

$E_2 = 2\hbar\omega \qquad g = 4$



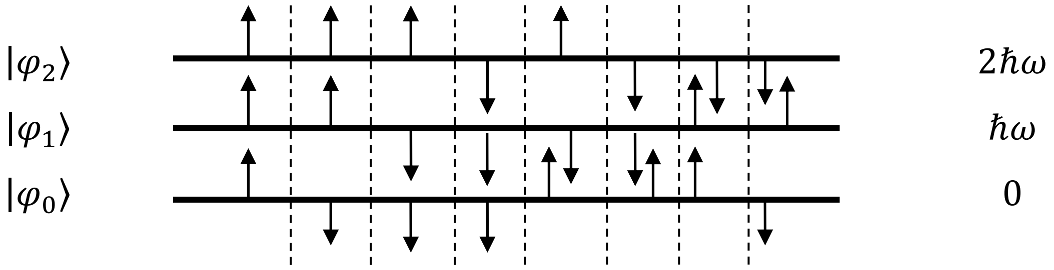
$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3!}}\begin{pmatrix} \varphi_0(1)\alpha(1) & \varphi_1(1)\alpha(1) & \varphi_1(1)\beta(1) \\ \varphi_0(2)\alpha(2) & \varphi_1(2)\alpha(2) & \varphi_1(2)\beta(2) \\ \varphi_0(3)\alpha(3) & \varphi_1(3)\alpha(3) & \varphi_1(3)\beta(3) \end{pmatrix}$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3!}}\begin{pmatrix} \varphi_0(1)\beta(1) & \varphi_1(1)\alpha(1) & \varphi_1(1)\beta(1) \\ \varphi_0(2)\beta(2) & \varphi_1(2)\alpha(2) & \varphi_1(2)\beta(2) \\ \varphi_0(3)\beta(3) & \varphi_1(3)\alpha(3) & \varphi_1(3)\beta(3) \end{pmatrix}$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3!}}\begin{pmatrix} \varphi_2(1)\alpha(1) & \varphi_1(1)\alpha(1) & \varphi_1(1)\beta(1) \\ \varphi_2(2)\alpha(2) & \varphi_1(2)\alpha(2) & \varphi_1(2)\beta(2) \\ \varphi_2(3)\alpha(3) & \varphi_1(3)\alpha(3) & \varphi_1(3)\beta(3) \end{pmatrix}$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3!}}\begin{pmatrix} \varphi_2(1)\beta(1) & \varphi_1(1)\alpha(1) & \varphi_1(1)\beta(1) \\ \varphi_2(2)\beta(2) & \varphi_1(2)\alpha(2) & \varphi_1(2)\beta(2) \\ \varphi_2(3)\beta(3) & \varphi_1(3)\alpha(3) & \varphi_1(3)\beta(3) \end{pmatrix}$$

$E_3 = 3\hbar\omega \qquad g = 8$



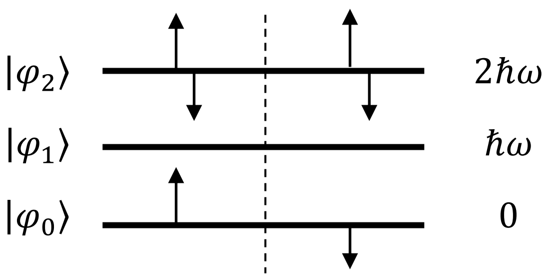
$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3!}}\begin{pmatrix} \varphi_0(1)\alpha(1) & \varphi_1(1)\alpha(1) & \varphi_2(1)\alpha(1) \\ \varphi_0(2)\alpha(2) & \varphi_1(2)\alpha(2) & \varphi_2(2)\alpha(2) \\ \varphi_0(3)\alpha(3) & \varphi_1(3)\alpha(3) & \varphi_2(3)\alpha(3) \end{pmatrix} \qquad \psi = \frac{1}{\sqrt{3!}}\begin{pmatrix} \varphi_0(1)\beta(1) & \varphi_1(1)\alpha(1) & \varphi_2(1)\alpha(1) \\ \varphi_0(2)\beta(2) & \varphi_1(2)\alpha(2) & \varphi_2(2)\alpha(2) \\ \varphi_0(3)\beta(3) & \varphi_1(3)\alpha(3) & \varphi_2(3)\alpha(3) \end{pmatrix}$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3!}}\begin{pmatrix} \varphi_0(1)\beta(1) & \varphi_1(1)\beta(1) & \varphi_2(1)\alpha(1) \\ \varphi_0(2)\beta(2) & \varphi_1(2)\beta(2) & \varphi_2(2)\alpha(2) \\ \varphi_0(3)\beta(3) & \varphi_1(3)\beta(3) & \varphi_2(3)\alpha(3) \end{pmatrix} \qquad \psi = \frac{1}{\sqrt{3!}}\begin{pmatrix} \varphi_0(1)\beta(1) & \varphi_1(1)\beta(1) & \varphi_2(1)\beta(1) \\ \varphi_0(2)\beta(2) & \varphi_1(2)\beta(2) & \varphi_2(2)\beta(2) \\ \varphi_0(3)\beta(3) & \varphi_1(3)\beta(3) & \varphi_2(3)\beta(3) \end{pmatrix}$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3!}}\begin{pmatrix} \varphi_0(1)\alpha(1) & \varphi_1(1)\beta(1) & \varphi_2(1)\alpha(1) \\ \varphi_0(2)\alpha(2) & \varphi_1(2)\beta(2) & \varphi_2(2)\alpha(2) \\ \varphi_0(3)\alpha(3) & \varphi_1(3)\beta(3) & \varphi_2(3)\alpha(3) \end{pmatrix} \qquad \psi = \frac{1}{\sqrt{3!}}\begin{pmatrix} \varphi_0(1)\alpha(1) & \varphi_1(1)\beta(1) & \varphi_2(1)\beta(1) \\ \varphi_0(2)\alpha(2) & \varphi_1(2)\beta(2) & \varphi_2(2)\beta(2) \\ \varphi_0(3)\alpha(3) & \varphi_1(3)\beta(3) & \varphi_2(3)\beta(3) \end{pmatrix}$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3!}}\begin{pmatrix} \varphi_0(1)\alpha(1) & \varphi_1(1)\alpha(1) & \varphi_2(1)\beta(1) \\ \varphi_0(2)\alpha(2) & \varphi_1(2)\alpha(2) & \varphi_2(2)\beta(2) \\ \varphi_0(3)\alpha(3) & \varphi_1(3)\alpha(3) & \varphi_2(3)\beta(3) \end{pmatrix} \qquad \psi = \frac{1}{\sqrt{3!}}\begin{pmatrix} \varphi_0(1)\beta(1) & \varphi_1(1)\alpha(1) & \varphi_2(1)\beta(1) \\ \varphi_0(2)\beta(2) & \varphi_1(2)\alpha(2) & \varphi_2(2)\beta(2) \\ \varphi_0(3)\beta(3) & \varphi_1(3)\alpha(3) & \varphi_2(3)\beta(3) \end{pmatrix}$$

$E_4 = 4\hbar\omega \qquad g = 2$



$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3!}}\begin{pmatrix} \varphi_0(1)\alpha(1) & \varphi_2(1)\alpha(1) & \varphi_2(1)\beta(1) \\ \varphi_0(2)\alpha(2) & \varphi_2(2)\alpha(2) & \varphi_2(2)\beta(2) \\ \varphi_0(3)\alpha(3) & \varphi_2(3)\alpha(3) & \varphi_2(3)\beta(3) \end{pmatrix}$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3!}}\begin{pmatrix} \varphi_0(1)\beta(1) & \varphi_2(1)\alpha(1) & \varphi_2(1)\beta(1) \\ \varphi_0(2)\beta(2) & \varphi_2(2)\alpha(2) & \varphi_2(2)\beta(2) \\ \varphi_0(3)\beta(3) & \varphi_2(3)\alpha(3) & \varphi_2(3)\beta(3) \end{pmatrix}$$

Exercice 02 :

$$j_1 = 1 \quad ; \quad j_2 = \frac{3}{2}$$

$j_1 = 1 \rightarrow -1 \leq m_1 \leq +1 \quad \leftrightarrow m_1 = -1{,}0{,}1$

$$B'_1 = \{|11\rangle, |10\rangle, |1-1\rangle\} \qquad \dim B_1{}' = 3 = 2j_1 + 1 = 3$$

$B_2 = \{|s_2 m_2\rangle\}$

$j_2 = \frac{3}{2} \rightarrow -1 \leq m_2 \leq +1 \quad \leftrightarrow m_2 = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

$$B_2{}' = \left\{\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle\right\} \qquad \dim B_2{}' = 4 = 2j_2 + 1 = 4$$

<u>La Base Découplée</u> B_{12}:

$B_1 = B_{12} = B_1 \otimes B_2 = \{|11\rangle, |10\rangle, |1-1\rangle\} \otimes \left\{\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle\right\}$

$B'_1 : |11\rangle, |10\rangle, |1-1\rangle$

$B'_2 : \left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle$

$$B_1 = B_{12} = \left\{ \begin{matrix} \left|11\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle, \left|11\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle, \left|11\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle, \left|11\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle, \left|10\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle, \left|10\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle, \left|10\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle, \left|10\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle, \\ \left|1-1\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle, \left|1-1\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle, \left|1-1\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle, \left|1-1\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle \end{matrix} \right\}$$

2-

<u>La Base Couplée</u> B:

$$|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2 \rightarrow \frac{1}{2} \leq J \leq \frac{5}{2} \leftrightarrow J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$$

pour $J = 1/2 \quad \rightarrow M = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

$$|JM\rangle = \left\{\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right\rangle\right\}$$

pour $J = 3/2 \rightarrow M = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

$$|JM\rangle = \left\{\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle\right\}$$

pour $J=\frac{5}{2}\rightarrow M=-\frac{5}{2},-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2}$

$$|JM\rangle=\left\{\left|\frac{5}{2}\frac{5}{2}\right\rangle,\left|\frac{5}{2}\frac{3}{2}\right\rangle,\left|\frac{5}{2}\frac{1}{2}\right\rangle,\left|\frac{5}{2}\frac{-5}{2}\right\rangle,\left|\frac{5}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle,\left|\frac{5}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle\right\}$$

$$B=B_2=\left\{\left|\frac{5}{2}\frac{5}{2}\right\rangle,\left|\frac{5}{2}\frac{3}{2}\right\rangle,\left|\frac{5}{2}\frac{1}{2}\right\rangle,\left|\frac{5}{2}\frac{-5}{2}\right\rangle,\left|\frac{5}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle,\left|\frac{5}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle,\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle,\left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle,\left|\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle,\left|\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle,\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle,\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right\rangle\right\}$$

3-

$$|JM\rangle=\sum_{m_1m_2}|j_1m_1j_2m_2\rangle\langle j_1m_1j_2m_2|JM\rangle$$

$$\left|\frac{5}{2}\frac{5}{2}\right\rangle=\left|11\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$J_-\left|\frac{5}{2}\frac{5}{2}\right\rangle=(j_{1-}+j_{2-})\left|11\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle=j_{1-}\left|11\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle+j_{2-}\left|11\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$\left|\frac{5}{2}\frac{3}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{2}{5}}\left|10\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle+\sqrt{\frac{3}{5}}\left|11\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\frac{5}{2}\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{3}{5}}\left|10\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle+\frac{1}{\sqrt{10}}\left|1-1\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle+\sqrt{\frac{3}{10}}\left|11\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\frac{5}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{3}{5}}\left|10\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle+\frac{1}{\sqrt{10}}\left|11\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle+\sqrt{\frac{3}{10}}\left|1-1\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\frac{5}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{2}{5}}\left|10\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle+\sqrt{\frac{3}{5}}\left|1-1\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\frac{5}{2}\frac{-5}{2}\right\rangle=\left|1-1\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle$$

$$\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{2}{5}}\left|11\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle-\sqrt{\frac{3}{5}}\left|10\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$\left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle=-\sqrt{\frac{6}{15}}\left|1-1\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle-\frac{1}{\sqrt{15}}\left|10\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle+\sqrt{\frac{8}{15}}\left|11\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{6}{15}}\left|11\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle+\frac{1}{\sqrt{15}}\left|10\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle-\sqrt{\frac{8}{15}}\left|1-1\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle = -\sqrt{\frac{2}{5}}\left|1-1\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}\left|10\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle$$

$$\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{3}{6}}\left|1-1\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}\left|11\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{6}}\left|10\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{3}{6}}\left|11\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}\left|1-1\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{6}}\left|10\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle$$

Exercice 03 :

1-

$$L_x = \frac{L_+ + L_-}{2}$$

$$L_x|11\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|10\rangle \quad ; \quad L_x|10\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(|11\rangle + |1-1\rangle) \quad ; \quad L_x|1-1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|10\rangle$$

$$L_x = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

2-

$$L_x^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$L_x^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

3-

$$\exp -i\varphi L_x = e^{-i\varphi L_x} = \sum_{p=0} \frac{(-i\varphi L_x)^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0} \frac{(-i\varphi L_x)^{2p+1}}{(2p+1)!} = \sum_{p=0} \frac{(-1)^p(\varphi L_x)^{2p}}{(2p)!} - i\sum_{p=0} \frac{(-1)^p(\varphi L_x)^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

$$= \sum_{p=0} \frac{(-1)^p\varphi^{2p}L_x^{2p}}{(2p)!} - i\sum_{p=0} \frac{(-1)^p\varphi^{2p+1}L_x^{2p+1}}{(2p+1)!} = 1 + \sum_{p=1} \frac{(-1)^p\varphi^{2p}L_x^{2p}}{(2p)!} - i\sum_{p=0} \frac{(-1)^p\varphi^{2p+1}L_x^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

$$= 1 + L_x^2 \sum_{p=1} \frac{(-1)^p\varphi^{2p}}{(2p)!} - iL_x \sum_{p=0} \frac{(-1)^p\varphi^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

$$e^{-i\varphi L_x} = 1 + (\cos\varphi - 1)L_x^2 - i\sin\varphi\, L_x$$

$$v = -i\sin\varphi$$

$$u = (\cos\varphi - 1)$$

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

ÉPREUVE de Rattrapage

MODULE : MÉCANIQUE QUANTIQUE

DURÉE : 01 Heure 30 Minutes

EXERCICE 02 (03 points):

Nous considérons deux moments cinétiques J_1 et J_2 avec $j_1 = 1/2$ et $j_2 = 1/2$. On définit :
la base “produit tensoriel ” $\boldsymbol{B}_1=\{|j_1m_1j_2m_2\rangle\}$, la base B2 du moment cinétique total $J = J_1 + J_2$ $\boldsymbol{B}_2=\{|JM\rangle\}$.

1. Quelle est la dimension de l’espace de Hilbert pour ce système ?
2. Quelles sont les valeurs du moment cinétique total J, que nous obtenons en faisant l’addition de j_1 et j_2 ?
3. Calculer les coefficients de Clebsch–Gordan

EXERCICE 02 (09 points) :

Soit un système constitué de 2 particules identiques indépendantes. On introduisant l’opérateur d’échange $\hat{P}_{12}$ entre deux particules.

1. Montre que l’opérateur d’échange est unitaire $\hat{P}_{12} = \hat{P}_{12}{}^{+}$

Pour un système à deux particules, les seuls états acceptables physiquement sont soit symétrique, soit antis-ymétrique dans l’échange de deux particules.
Soit $\hat{S} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \hat{P}_{12})$ opérateur de symétrie et $\hat{A} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} - \hat{P}_{12})$ opérateur d’anti-symétrie.

2. Montrer les relations suivantes :
$$\hat{S}^2 = \hat{S}, \quad \hat{A}^2 = \hat{A}, \quad \hat{S} = \hat{S}^+, \quad \hat{A} = \hat{A}^+, \quad \hat{S} + \hat{A} = \mathbb{I}, \quad \hat{S}\hat{A} = \hat{A}\,\hat{S} = 0$$
3. Application : donner les états symétrique et anti-symétrique pour deux particules de spin ½.

EXERCICE 03 (08 points):

Soit une particule de moment cinétique j=1/2.

1. Calculer l’expression de $\exp(-i\varphi\sigma_y)$ sachant que : $(\vec{\sigma}.\vec{u})^{2P} = 1$ et $(\vec{\sigma}.\vec{u})^{2P+1} = \sigma_u$.
2. Sachant que la matrice $2j_y = \sigma_y$, s’écrit $\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ dans la base $\left\{\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle\right\}$, établir la matrice représentant l’opérateur de rotation $\mathcal{R}^{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\gamma)$.
3. Si J=1, résulte du couplage de deux moments cinétique $J_1 = J_2=1/2$. on peut écrire :
$$\mathcal{R}^J_{M'M} = \sum_{\substack{m1m'1 \\ m2m'2}} \langle j_1m_1j_2m_2|JM\rangle\langle j_1m'_1j_2m'_2|JM'\rangle\, \mathcal{R}^{j1}_{m'_1m_1}\, \mathcal{R}^{j2}_{m'_2m_2}$$
   a) Calculer $\mathcal{R}^1_{11}(\alpha,\beta,\gamma)$ et $\mathcal{R}^1_{-11}(\alpha,\beta,\gamma)$.
   b) En déduire $\mathcal{R}^1_{-1-1}(\alpha,\beta,\gamma)$ et $\mathcal{R}^1_{1-1}(\alpha,\beta,\gamma)$ a partir de la relation :
$$\mathcal{R}^J_{M'M}(\alpha,\beta,\gamma) = (-1)^{M'-M}\left(\mathcal{R}^J_{-M'-M}(\alpha,\beta,\gamma)\right)^*$$

RATTRAPAGE 2015/16 $\hbar = 1$

Exercice 01 :

$$j_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad j_2 = \frac{1}{2}$$

on cherche la base $B_1 = \{|j_1 m_1\rangle\}$

$j_1 = \frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2} \leq m_1 \leq +\frac{1}{2} \leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$

$$B_1 = \left\{\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle\right\} \qquad \dim B_1 = 2 = 2j_1 + 1 = 2$$

$B_2 = \{|j_2 m_2\rangle\}$

$j_2 = \frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2} \leq m_2 \leq +\frac{1}{2} \leftrightarrow m_2 = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$

$B_2 = \left\{\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle\right\} \qquad \dim B_2 = 2 = 2j_2 + 1 = 2$

La Base Couplée B:

$$|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2 \rightarrow 0 \leq J \leq 1 \leftrightarrow J = 0,1$$

pour $J = 0 \rightarrow M = 0$

$|JM\rangle = \{|00\rangle\}$ ..l'état singulière

pour $J = 1 \rightarrow M = -1,0,1$

$|JM\rangle = \{|1-1\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ ..l'état tripler

$$B = \{|00\rangle, |1-1\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$$

La Base Découplée B_{12}:

$B_{12} = B_1 \otimes B_2 = \left\{\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle\right\} \otimes \left\{\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle\right\}$

B_1: $\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle \quad \left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle$

B_2: $\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle \quad \left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle$

$$B_{12} = \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle$$

$B \to B_{12}$ on cherche les coefficients de C.G.

$$|JM\rangle = \sum_{m_1 m_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle\langle j_1 m_1 j_2 m_2|JM\rangle$$

$$|11\rangle = \sum_{m_1 m_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle\langle j_1 m_1 j_2 m_2|11\rangle$$

$$= \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle\left\langle\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\middle|11\right\rangle + \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle\left\langle\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\middle|11\right\rangle + \left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle\left\langle\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\middle|11\right\rangle + \left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle\left\langle\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\middle|11\right\rangle$$

$$|11\rangle = \alpha\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$$

$|10\rangle$? ? on appliquée l'opérateur J_-

$$J_-|11\rangle = J_-\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = (j_{-1} + j_{-2})\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = j_{-1}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle + j_{-2}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle \dots (*)$$

$$J_-|JM\rangle = \hbar\sqrt{J(J+1) - M(M-1)}|JM-1\rangle$$

$$J_-|11\rangle = \sqrt{1(1+1) - 1(1-1)}|10\rangle = \sqrt{2}|10\rangle$$

$$j_{-1}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1-1)}|j_1 m_1 - 1 j_2 m_2\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$j_{-1}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$j_{-2}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle$$

$$(*) \to \sqrt{2}|10\rangle = \left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle + \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle$$

$$|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle$$

$|1-1\rangle$: par symétrie

$$|1-1\rangle = \left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle$$

$|00\rangle$? ?

$$|00\rangle = \alpha\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle + \beta\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$$

Rotation Orthogonalité : $\langle jm|j'm'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'}$

Rotation Normalisation : $\langle jm|jm\rangle = 1$

Orthogonalité:

$$\langle 10|00\rangle = \delta_{10}\delta_{00} = 0$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\langle\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\left|\right]\left[\alpha\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle + \beta\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle\right] = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\beta}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\alpha + \beta = 0 \;\; \ldots (1)$$

La normalisation $\langle 00|00\rangle = 1 \qquad \alpha^2 + \beta^2 = 1 \ldots (2)$

alors:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\; ; \;\; \beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$$

Exercice 02 :

$\hat{P}_{12} = \hat{P}^{+}$

$$\langle\psi|A|\varphi\rangle = \langle\varphi|A^{+}|\psi\rangle^{*} = \langle 1{:}k', 2{:}n'|\hat{P}_{21}|1{:}k, 2{:}n\rangle = \langle 1{:}k', 2{:}n'|1{:}n, 2{:}k\rangle = \delta_{kk'}\delta_{nn'}$$

$$\langle\varphi|A^{+}|\psi\rangle^{*} = \left\langle 1{:}k, 2{:}n\left|\hat{P}_{21}{}^{+}\right|1{:}k', 2{:}n'\right\rangle^{*} = \delta_{kk'}{}^{*}\delta_{nn'}{}^{*} = \delta_{kk'}\delta_{nn'}$$

$\hat{s} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \hat{P}_{21}) \qquad ; \qquad \hat{A} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} - \hat{P}_{21})$

$$\hat{s}^2 = \hat{s} \rightarrow \frac{1}{4}(\mathbb{I} + \hat{P}_{21})^2 = \frac{1}{4}(1 + 1 + 2\hat{P}_{21}) = \frac{1}{2}(1 + \hat{P}_{21}) = s$$

Même idée pour :

$\hat{A}^2 = \hat{A} \;\; ; \;\; \hat{s} = \hat{s}^{+} \;\; ; \;\; \hat{A}^{+} = \hat{A} \;\; ; \;\; \hat{s} + \hat{A} = \mathbb{I} \;\; ; \;\; \hat{A}\hat{s} = \hat{s}\hat{A} = 0$

Particule de Spin $\frac{1}{2}$

$$s = \frac{1}{2} \rightarrow S = 0{,}1 \;\rightarrow M = -1{,}0{,}1$$

$$\hat{P}_{21}|11\rangle = \hat{P}_{21}|+\;+\rangle = |+\;+\rangle$$

$$\hat{P}_{21}|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{P}_{21}|+\ -\rangle + \hat{P}_{21}|-\ +\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-\ +\rangle + |+\ -\rangle) = |10\rangle$$

$$\hat{P}_{21}|1-1\rangle = \hat{P}_{21}|-\ -\rangle = |-\ -\rangle$$

les trois états $|11\rangle, |10\rangle, |1-1\rangle$ sont des états symétrique

$$\hat{P}_{21}|00\rangle = \hat{P}_{21}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\{|+\ -\rangle - |-\ +\rangle\}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{P}_{21}|+\ -\rangle - \hat{P}_{21}|-\ +\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-\ +\rangle - |+\ -\rangle) = -|00\rangle$$

$\hat{P}_{21}|00\rangle = -|00\rangle$: état antisymétrique dans l'espace de deux particules.

Exercice 03 :

1-

$$\exp -i\varphi\sigma_y = \sum_{p=0}\frac{\left(-i\varphi\sigma_y\right)^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}\frac{\left(-i\varphi\sigma_y\right)^{2p+1}}{(2p+1)!} = \sum_{p=0}\frac{(-1)^p\left(\varphi\sigma_y\right)^{2p}}{(2p)!} - i\sum_{p=0}\frac{(-1)^p\left(\varphi\sigma_y\right)^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

$$= \sum_{p=0}\frac{(-1)^p\varphi^{2p}\sigma_y^{2p}}{(2p)!} - i\sum_{p=0}\frac{(-1)^p\varphi^{2p+1}\sigma_y^{2p+1}}{(2p+1)!} = 1 + \sum_{p=1}\frac{(-1)^p\varphi^{2p}\sigma_y^{2p}}{(2p)!} - i\sum_{p=0}\frac{(-1)^p\varphi^{2p+1}\sigma_y^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

$$= 1 + \sigma_y^2\sum_{p=1}\frac{(-1)^p\varphi^{2p}}{(2p)!} - i\sigma_y\sum_{p=0}\frac{(-1)^p\varphi^{2p+1}}{(2p+1)!} = 1 + (\cos\varphi - 1) - i\sin\varphi\,\sigma_y$$

$$= \cos\varphi - i\sin\varphi\,\sigma_y$$

2-

$$\langle JM|R(\alpha,\beta,\gamma)|JM\rangle = \left\langle JM\middle|e^{-i\alpha J_z}e^{-i\beta J_y}e^{-i\gamma J_z}\middle|JM\right\rangle = e^{-i\alpha M}e^{-i\gamma M}\left\langle SM\middle|e^{-i\beta\sigma_y/2}\middle|SM\right\rangle$$

$$= e^{-i(\alpha+\gamma)M}\left\langle JM\middle|\cos\frac{\beta}{2} - i\sin\frac{\beta}{2}\sigma_y\middle|JM\right\rangle$$

$$= e^{-i(\alpha+\gamma)M}\left[\cos\frac{\beta}{2} - i\sin\frac{\beta}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix}e^{-\frac{i(\alpha+\gamma)}{2}} & 0\\ 0 & e^{\frac{i(\alpha+\gamma)}{2}}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2}\\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2}\end{bmatrix}$$

$$R^{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix}e^{-\frac{i(\alpha+\gamma)}{2}}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{-\frac{i(\alpha+\gamma)}{2}}\sin\frac{\beta}{2}\\ e^{\frac{i(\alpha+\gamma)}{2}}\sin\frac{\beta}{2} & e^{\frac{i(\alpha+\gamma)}{2}}\cos\frac{\beta}{2}\end{pmatrix}$$

3-a-b)

$$\mathcal{R}^{1}_{11}(\alpha,\beta,\gamma) = \left|e^{-\frac{i(\alpha+\gamma)}{2}}\cos\frac{\beta}{2}\right|^2$$

$$\mathcal{R}^{1}_{-11}(\alpha,\beta,\gamma) = \left|e^{-\frac{i(\alpha+\gamma)}{2}}\sin\frac{\beta}{2}\right|^2$$

$$\mathcal{R}^{1}_{1-1}(\alpha,\beta,\gamma) = \left|e^{\frac{i(\alpha+\gamma)}{2}}\sin\frac{\beta}{2}\right|^2$$

$$\mathcal{R}^{1}_{-1-1}(\alpha,\beta,\gamma) = \left|e^{\frac{i(\alpha+\gamma)}{2}}\cos\frac{\beta}{2}\right|^2$$