الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة زيان عاشور بالجلفة

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

دروس مقدمة لطلبة قسم العلوم المالية والمحاسبة

تخصص: سنة أولى ماستر محاسبة وتدقيق+محاسبة وجباية

نـمـذجـة احـصـائـيـة

إعداد الدكتور:

بن سليمان يحي

السنة الجامعية: 2024/2023

الفصل الأول : الانحدار الخطي البسيط

1-1 تمهيد

يعتبر الانحدار الخطي البسيط أبسط أنواع نماذج الانحدار، بحث يوجد العديد من العلاقات الاقتصادية التي يمكن قياسها باستخدام هذا الأسلوب، مثل علاقة الإنفاق الاستهلاكي والدخل المتاح، وعلاقة الكمية المطلوبة من السلعة وسعرها، وأيضا مستوى البطالة مع معدل التضخم... وسنتطرق في هذا الفصل إلى تحليل الانحدار ذي متغيرين، المتغير التابع Y (dependent variable) دالة متغير مستقل أو تفسيري X (independent variable) وأن هذه الدالة خطية.

2-1 كتابة النموذج الخطي:

يمكن نمذجة العلاقة بين المتغيرين Y_i و X_i على الشكل:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \quad ....(1)$$
$$i = 1.........n$$

حيث : Y_i يسمى بالمتغير المُفَسَّر أو التابع، و X_i بالمتغير المُفَسِّر أو المستقل، β_0 وβ_1 هما معلما النموذج.

أما ε_i فيمثل الخطأ في تفسير Y_i، ومنه يمكن كتابته انطلاقا من العلاقة: $\varepsilon_i = Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i$.

ويرجع وجود حد الخطأ إلى عدة أسباب منها:

- إهمال بعض المتغيرات المستقلة التي يمكن أن تؤثر على المتغير التابع في النموذج.
- الصياغة الرياضية غير السليمة للنموذج.
- حدوث خطأ في كل من تجميع البيانات وقياس المتغيرات.

ويترتب على إسقاط هذا الافتراض حدوث أخطاء تحديد تتمثل فيما يلي:

- تحديد خاطئ للمتغيرات المستقلة: ويتمثل ذلك في إغفال متغيرات مستقلة هامة في نموذج الانحدار المراد تقديره، أو احتواء هدا النموذج على متغيرات مستقلة غير هامة.

▪ تغير معاملات الانحدار: إن معاملات الانحدار قد لا تظل ثابتة أثناء الفترة الزمنية الي تم تجميع البيانات عنها.

▪ العلاقة الحقيقية بين المتغير التابع والمستقل قد تكون غير خطية.

3-1 فرضيات النموذج

- الفرضية الأولى: النموذج خطي في x أي أن العلاقة خطية بين x وy وبالتالي فإن الشكل الوظيفي للعلاقة بين X و Y يكون على الشكل التالي: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \quad i = 1........n$

- الفرضية الثانية: الحد العشوائي ε_i: يأخذ قيما موجبة وأخرى سالبة وأخرى معدومة ويخضع لتوزيع احتمالي هو التوزيع الطبعي أي أن كل قيمة من قيم ε_i و في أي فترة زمنية تعتمد على الصدفة.

- الفرضية الثالثة: الأمل الرياضي للأخطاء معدوم أي أن : $E(\varepsilon_i) = 0, \forall i = 1.....n$

الفرضية الرابعة: ثبات تباين الأخطاء ، حيث تكون تباينات الأخطاء موجبة وثابتة من اجل كل القيم أي: $Var(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2 \quad , \forall i = 1.....n$

الإخلال بهذه الفرضية يؤدي إلى ظهور مشكلة عدم ثبات تباين للأخطاء "**Heteroscedasticity**".

ويمكن تلخيص الفرضية الثانية والثالثة كالآتي: $\varepsilon_i \longrightarrow N\left(0, \delta_\varepsilon^{\ 2}\right)$

الفرضية الخامسة: لا يوجد ارتباط بين الأخطاء أي أن التباين المشترك للأخطاء معدوم وهذا على مختلف مشاهدات مكونات العينة والإخلال بهذه الفرضية يؤدي إلى ظهور مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء .

ويمكن التعبير عن هذه الفرضية كالأتي:

$$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0 \quad , \forall i \neq j \qquad i, j = 1.....n$$

الفرضية السادسة: المتغير المفسر يأخذ قيم ثابتة أي أنه غير عشوائي وبالتالي لا يوجد لارتباط بين المتغيرة المستقلة والحد العشوائي أي أن : $Cov(X_i, \varepsilon_i) = 0, \forall i = 1, ..., n$

4-1 تقدير معالم نموذج الانحدار الخطي البسيط

لحل النموذج الرياضي الذي يترجم النظرية الاقتصادية نتبع عدة طرق قياسية وأهم هذه الطرق وأكثرها استعمالا في ظل الفرضيات السالفة الذكر هي طريقة المربعات الصغرى العادية.

1-4-1 طريقة المربعات الصغرى العادية "OLS" " باستخدام المعطيات الأصلية"

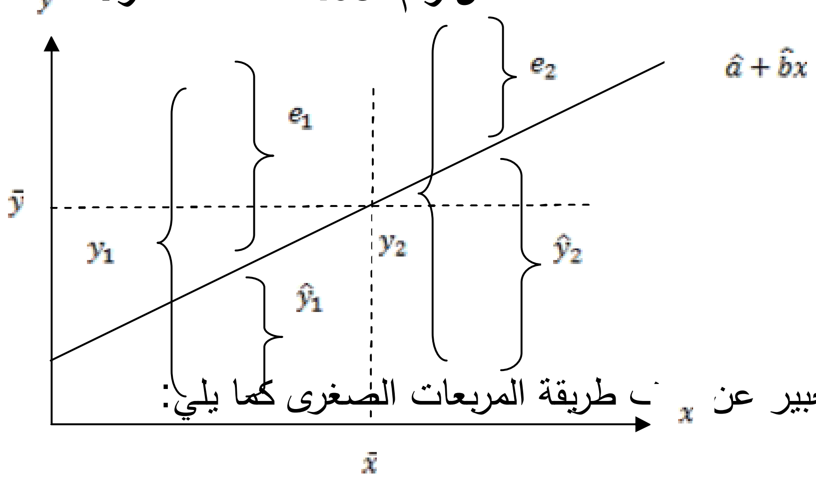
في حالة المتغيرات الاجتماعية عامة والاقتصادية خاصة يصعب علينا إيجاد علاقة تامة بين مثل هذه المتغيرات الأمر الذي يجعل من المستحيل تمثيلها بيانيا من خلال خط مستقيم يمر بجميع الحالات، ففي مثل هذه الحالات نلجأ إلى تمثيلها من خلال خط مستقيم يعرف بإسم " **خط أفضل تمثيل** " وذلك بفكرة تغير Y في المتوسط عند كل قيمة من قيم المتغير المستقل X من شكل الانتشار، وتقوم طريقة المربعات الصغرى على فكرة القيمة الصغرى للمربعات من خلال رسم خط انتشار يكون فيه مجموع مربعات انحرافات القيم التي تمثل سحابة النقاط للمتغير التابع وخط الانحدار المقدر أقل ما يمكن.

إذا أخذنا إحداثيات القيم Y، X إحداثيات النقطة الأولى تنقسم إلى قسمين، **قسم من المحور الأفقي** في النموذج المقدر، هذا عبارة عن $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$، أما **الجزء الثاني** عبارة عن قيمة البواقي.

فالمشاهدة Y هي حصيلة جمع $\hat{Y} + e$ أي أن أي مشاهده مكونه من جانبين، جانب الخط المقدر والبواقي، والبواقي بحكم أنها مقدرة العنصر العشوائي يمكن أن تكون موجبة وممكن أن تكون سالبه وكذلك من الناحية النظرية يمكن أن تساوي الصفر.

ويمكن تمثيل كل ما سبق في ما يلي:

شكل رقم 03: العلاقة المقدرة.



ويمكن التعبير عن ... طريقة المربعات الصغرى كما يلي:

حيث : $Min\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \underset{\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1}{Min}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}\right)^2$

Y_i : المشاهدات الفعلية.

$\hat{Y}$: القيم المقدرة.

$e^2{}_i$: مربع البواقي يعبر عنها بالصيغة التالية: $\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \underset{\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1}{Min}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}\right)^2$

$$Min\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \underset{\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1}{Min}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right)^2$$

الشرط اللازم لتدنئة قيمة $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ هو أن تكون المشتقات الجزئية بالنسبة ل $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0$ معدومة أي:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\hat{\beta}_0}\sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right)^2 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial\hat{\beta}_1}\sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\beta}_0} = \sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right)^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\beta}_1} = \sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right)^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3$$

$$2 \Rightarrow \ -2\sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right) = 0$$

$$\Rightarrow \ \sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right) = 0$$

$$\Rightarrow \ \sum_i Y_i - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum X_i = 0$$

$$\Rightarrow \ \sum_i Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4$$

المعادلة رقم: (4) تعبر عن ما يسمى بالمعادلة الطبيعية الأولى.

$$3 \Rightarrow \ -2\sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right)^2 (X_i) = 0$$

$$\Rightarrow \ \sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right)(X_i) = 0$$

$$\Rightarrow \ \sum_i (Y_i X_i) - \hat{\beta}_0 \sum_i X_i - \hat{\beta}_1 \sum_i X_i^2 = 0$$

$$\Rightarrow \ \sum_i (Y_i X_i) = \hat{\beta}_0 \sum_i X_i + \hat{\beta}_1 \sum_i X_i^2 \ldots\ldots\ldots\ldots 5$$

المعادلة رقم: (5) تعبر عن ما يسمى بالمعادلة الطبيعية الثانية.

بضرب المعادلة رقم (5) في (n) ونضرب المعادلة رقم (4) في $\sum_i X_i$ نتحصل على :

$$\sum_i Y_i \sum_i X_i = n\hat{\beta}_0 \sum_i X_i + \hat{\beta}_1 \left(\sum X_i \right)^2 \quad ....6$$

$$n\sum_i \left(Y_i X_i\right) = n\hat{\beta}_0 \sum_i X_i + n\hat{\beta}_1 \sum_i X_i^2 \quad ....7$$

بحل المعادلتين (6) و (7) آنيا نحصل على:

$$\begin{cases} \hat{\beta}_1 = \dfrac{n\sum_i X_i Y_i - \sum_i X_i \sum_i Y_i}{n\sum_i X_i^2 - \left(\sum_i X_i \right)^2} \quad ....6 \\ \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \quad ....7 \end{cases}$$

ويكون النموذج المقدر (خط الانحدار) بطريقة المربعات الصغرى المقدرة (*OLS*) كما يلي:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$$

2-4-1 طريقة المربعات الصغرى العادية " OLS" " باستخدام المعطيات المركزة"

عن وسطهما الحسابي: y و xمن الممكن الحصول على المقدرات **باستخدام الانحرافات**

ل $y_i = \left(Y_i - \bar{Y}\right)$

$$x_i = \left(X_i - \bar{X}\right)$$

إذن تصبح معادلة الانحدار بالمعطيات المركزة بالشكل الآتي:

$$y_i = \hat{\beta}_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1.........n$$

باستعمال طريقة المربعات الصغيرة يمكننا ببساطة ايجاد $\hat{\beta}$.

لدينا :

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \underset{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1}{Min} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}\right)^2$$

$$Min \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \underset{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1}{Min} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{\beta} x_i\right)^2$$

الشرط اللازم لتدنئة قيمة $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ هو أن تكون المشتقة الجزئية بالنسبة ل $\hat{\beta}_1$ معدومة أي:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\beta}} = \sum_i \left(y_i - \hat{\beta}_1 x_i\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow -2\sum_i \left(y_i - \hat{\beta}_1 x_i\right)\left(x_i\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_i (y_i x_i) - \hat{\beta}_1 \sum_i x_i^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sum_i (y_i x_i) = \hat{\beta}_1 \sum_i x_i^2$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2}$$

5-1 خصائص مقدرات المربعات الصغرى:

الخصائص الإحصائية التي تتميز فيها مقدرات المربعات الصغرى العادية.

تتميز المقدرات $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ بالخواص الأساسية التالية:

1-5-1 الخطية:

يعتبر $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ خطيان وذلك لأنه يمكن كتابة كل منهما كدالة خطية في قيم المتغير التابع Y.

*** $\hat{\beta}_1$ مقدر خطي في Y**

$$\hat{\beta}_i = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \quad ....01$$

نفرض أن : $W_i = \frac{(X_i - \bar{X})}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$ من خصائصها أن : $\boxed{\sum W_i = 0}$

بالتعويض في العلاقة رقم 01 نجد:

$$\hat{\beta}_1 = \sum W_i (Y_i - \bar{Y})$$

$$\hat{\beta}_1 = \sum (W_i Y_i - W_i \bar{Y})$$

$$\hat{\beta}_1 = \sum W_i Y_i - \sum W_i \bar{Y}$$

$$\hat{\beta}_1 = \sum W_i Y_i - \bar{Y} \sum W_i$$

$$\hat{\beta}_1 = \sum W_i Y_i$$

$$\hat{\beta}_1 = W_1 Y_1 + W_2 Y + ...W_{n2} Y_n$$

ومنه: $\hat{\beta}_1$ **مقدر خطي في** Y

*** $\hat{\beta}_0$ مقدر خطي في Y**

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X} ....02$$

لدينا : $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum Y_i$ **و** $\hat{\beta}_1 = \sum W_i Y_i$ " **البرهان السابق** $\hat{\beta}_1$ **مقدر خطي في** Y" تصبح العلاقة رقم 02 كالتالي**:**

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{n}\sum Y_i - \sum W_i Y_i \overline{X}.$$

$$\hat{\beta}_0 = \sum \left(\frac{1}{n} - W_i \overline{X} \right) Y_i.$$

$$\hat{\beta}_0 = \sum C_i Y_i$$

$$\hat{\beta}_0 = C_1 Y_1 + C_2 Y + ...C_{n\,2} Y_n$$

حيث أن : $C_i = \frac{1}{n}. - W_i \overline{X}$

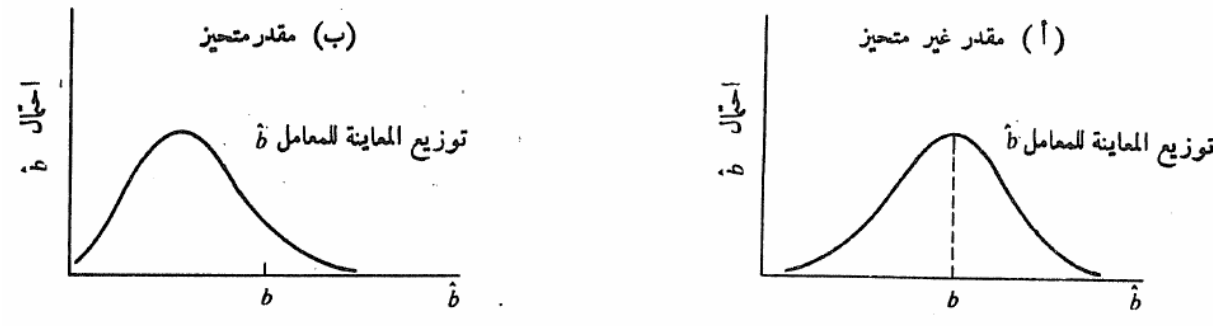
ومنه: $\hat{\beta}_0$ **مقدر خطي في** Y

2-5-1 عدم التحيز:

مقدرات (م ص ع) $\hat{\beta}_0$ مقدرة غير متحيزة للمعلمة β_0.

التحيز هو ذلك الفرق بين مقدرة ما ووسط توزيعها، فإذا كان هذا الفرق يختلف عن الصفر نقول عن ذلك المقدر بأنه متحيز، وإذا عدنا إلى مقدرتي المربعات الصغرى فإننا نجد $E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$، $E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$ ومنه نقول أن $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ هما مقدرتين غير متحيزتين لـ β_0 و β_1 على التوالي.

شكل رقم (04): التحيز وعدم التحيز للمقدرة.



*** البرهان على أن :** $E(\hat{\beta}_1)=\beta_1$

$$\hat{\beta}_i=\frac{\sum(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sum(X_i-\bar{X})^2}$$

$$Y_i=\beta_0+\beta_1X_i+\varepsilon_i,\quad i=1.........n$$

$$\bar{Y}=\beta_0+\beta_1\bar{X}+\bar{\varepsilon}$$

$$Y_i-\bar{Y}=\beta_1(X_i-\bar{X})+(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon})$$

$$\hat{\beta}_i=\frac{\sum[(X_i-\bar{X})(\beta_1(X_i-\bar{X})+(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}))]}{\sum(X_i-\bar{X})^2}$$

$$\hat{\beta}_i=\frac{\beta_1\sum(X_i-\bar{X})^2+\sum(X_i-\bar{X})(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon})}{\sum(X_i-\bar{X})^2}$$

$$\hat{\beta}_i=\frac{\beta_1\sum(X_i-\bar{X})^2}{\sum(X_i-\bar{X})^2}+\frac{\sum(X_i-\bar{X})(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon})}{\sum(X_i-\bar{X})^2}$$

$$\hat{\beta}_i=\beta_1+\frac{\sum(X_i-\bar{X})(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon})}{\sum(X_i-\bar{X})^2}$$

$$E(\hat{\beta}_i)=E(\beta_1)+E\left(\frac{\sum(X_i-\bar{X})(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon})}{\sum(X_i-\bar{X})^2}\right)$$

$$E(\hat{\beta}_i)=E(\beta_1)+\left(\frac{\sum(X_i-\bar{X})E(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon})}{\sum(X_i-\bar{X})^2}\right).....03$$

لدينا : $E(\varepsilon_I-\bar{\varepsilon})=0$ تصبح العلاقة رقم 03 كالأتي : $E(\hat{\beta}_1)=\beta_1$

وبالتالي فإن المقدرة $\hat{\beta}_1$ مقدرة غير متحيزة .

***البرهان على أن : $E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$**

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

$$\bar{Y} = \beta_0 + \beta_1 \bar{X} + \bar{\varepsilon}$$

$$\hat{\beta}_0 = (\beta_0 + \beta_1 \bar{X} + \bar{\varepsilon}) - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

$$\hat{\beta}_0 = \beta_0 - (\hat{\beta}_1 - \beta_1)\bar{X} + \bar{\varepsilon}$$

$$E(\hat{\beta}_0) = E(\beta_0) - E(\hat{\beta}_1 - \beta_1)\bar{X} + E(\varepsilon)$$

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0 - E(\hat{\beta}_1 - \beta_1)\bar{X} + E(\varepsilon)$$

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0 - \bar{X}E(\hat{\beta}_1 - \beta_1) + E(\varepsilon) \ldots\ldots 04$$

لدينا : $E(\hat{\beta}_1 - \beta_1) = 0$ و $E(\varepsilon) = 0$ وبالتالي فإن العلاقة رقم 04 تصبح على الشكل التالي :

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$$

وبالتالي فإن المقدرة $\hat{\beta}_0$ مقدرة غير متحيزة .

3-5-1 أفضل مقدر خطي غير متحيز Blue:

تنطلق هذه الفكرة من نظرية غوس Gausse-Markov و التي تنص على أنه من بين المقدرات الخطية و غير المتحيزة تكون مقدرتي المربعات الصغرى العادية $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ أفضل مقدرتين خطيتين و غير متحيزتين، حيث أن لها تباين ممكن مقارنة مع بقية المقدرات الخطية و غير المتحيزة الأخرى".

إيجاد تباين $\hat{\beta}_1$

$$\hat{\beta}_1 = \sum W_i Y_i$$

$$W_i = \frac{\left(X_i - \overline{X}\right)}{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

$$Var\left(\hat{\beta}_1\right) = Var\left(\sum\left(W_i Y_i\right)\right)$$

$$Var\left(\hat{\beta}_1\right) = \left(\sum Var\left(W_i Y_i\right)\right)$$

$$Var\left(\hat{\beta}_1\right) = \left(\sum W_i^2 Var\left(Y_i\right)\right)$$

$$Var\left(Y_1\right) = E\left(Y_i - E\left(YI\right)\right)^2$$

$$Var\left(Y_1\right) = E\left(\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon - \beta_0 - \beta_1 X_i\right)^2$$

$$Var\left(Y_1\right) = E\left(\varepsilon_i\right)^2 = E\left(\varepsilon_i - E\left(\varepsilon_i\right)\right)^2 = Var\left(\varepsilon_I\right) = \sigma^2{}_\varepsilon$$

$$Var\left(\hat{\beta}_1\right) = \left(\sum W_i^{\,2} \sigma_\varepsilon^{\,2}\right)$$

$$Var\left(\hat{\beta}_1\right) = \left(\sigma_\varepsilon^{\,2} \sum W_i^{\,2}\right)$$

$$W_i = \frac{\left(X_i - \overline{X}\right)}{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

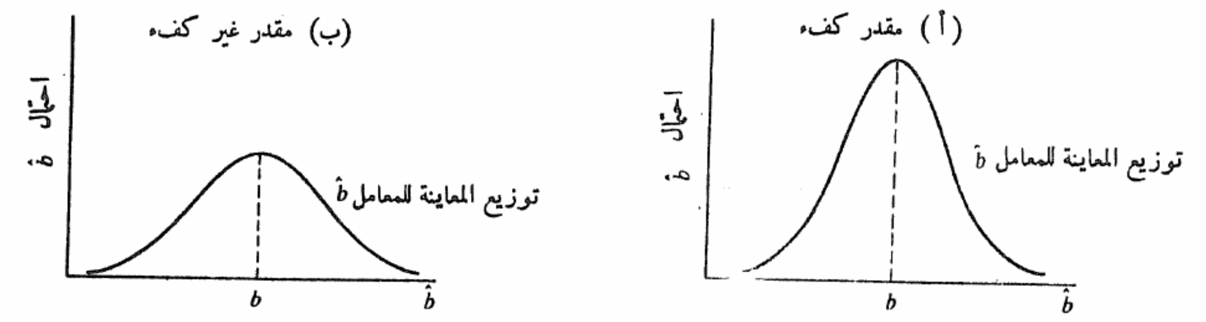
$$W_i^{\,2} = \frac{\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{\left(\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2\right)^2}$$

$$\sum W_i^{\,2} = \sum\left(\frac{\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{\left(\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2\right)^2}\right)$$

$$\sum W_i^{\,2} = \frac{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{\left(\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2\right)^2} = \frac{1}{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

$$\boxed{Var\left(\hat{\beta}_1\right) = \sigma_\varepsilon^{\,2} \frac{1}{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2}}$$

شكل رقم (05): مقدر كفؤ وغير كفؤ.



<u>إيجاد تباين $\hat{\beta}_0$</u>

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

لدينا : $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum Y_i$ **و** $\hat{\beta}_1 = \sum W_i Y_i$ **" البرهان السابق** $\hat{\beta}_1$ **مقدر خطي في** Y" تصبح العلاقة رقم 02 كالتالي:

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{n}\sum Y_i - \sum W_i Y_i \bar{X}.$$

$$\hat{\beta}_0 = \sum \left(\frac{1}{n} - W_i \bar{X} \right) Y_i$$

$$Var\left(\hat{\beta}_0\right) = Var\left[\sum \left(\frac{1}{n} - W_i \bar{X} \right) Y_i \right]$$

$$Var\left(\hat{\beta}_0\right) = \sum \ Var\left(\frac{1}{n} - W_i \bar{X} \right) Y_i$$

$$Var\left(\hat{\beta}_0\right) = \sum \ \left(\frac{1}{n} - W_i \bar{X} \right)^2 Var\left(Y_i\right)$$

$$Var\left(Y_1\right) = \sigma^2{}_{\varepsilon}$$

$$Var\left(\hat{\beta}_0\right) = \sigma_{\varepsilon}{}^2 \sum \ \left(\frac{1}{n} - W_i \bar{X} \right)^2$$

$$\sum\left(\frac{1}{n}-W_i\bar{X}\right)^2=\sum\left[\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}W_i\bar{X}+\left(W_i\bar{X}\right)^2\right]$$

$$\sum\left(\frac{1}{n}-W_i\bar{X}\right)^2=\left[\sum\frac{1}{n^2}\right]-2\frac{1}{n}\bar{X}\sum W_i+\bar{X}^2\sum W_i^2$$

$$\sum\left(\frac{1}{n}-W_i\bar{X}\right)^2=\frac{n}{n^2}+\frac{\bar{X}^2}{\sum\left(X_i-\bar{X}\right)^2}$$

$$\sum\left(\frac{1}{n}-W_i\bar{X}\right)^2=\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}^2}{\sum\left(X_i-\bar{X}\right)^2}$$

$$\boxed{Var\left(\hat{\beta}_0\right)=\sigma_\varepsilon^2\left[\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}^2}{\sum\left(X_i-\bar{X}\right)^2}\right]}$$

كما يمكن استخدام العلاقة التالية[1] :

$$Var\left(\hat{\beta}_0\right)=\sigma_\varepsilon^2\left[\frac{n\bar{X}^2+\sum\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{n\sum\left(X_i-\bar{X}\right)^2}\right]$$

$$Var\left(\hat{\beta}_0\right)=\sigma_\varepsilon^2\left[\frac{n\bar{X}^2+\sum X^2{}_i-n\bar{X}^2}{n\sum\left(X_i-\bar{X}\right)^2}\right]$$

$$Var\left(\hat{\beta}_0\right)=\sigma_\varepsilon^2\left[\frac{\sum X^2{}_i}{n\sum\left(X_i-\bar{X}\right)^2}\right]$$

$$\boxed{Var\left(\hat{\beta}_0\right)=Var\left(\hat{\beta}_1\right)\left[\frac{\sum X^2{}_i}{n}\right]}$$

[1] R.CARTER HILL /WILLIAME GRIFITHS/GUAY C.LIM, **Principles Of Econometrics**, Fourth Edition, 2011, P58.

1-5-4 خاصية الاتساق:

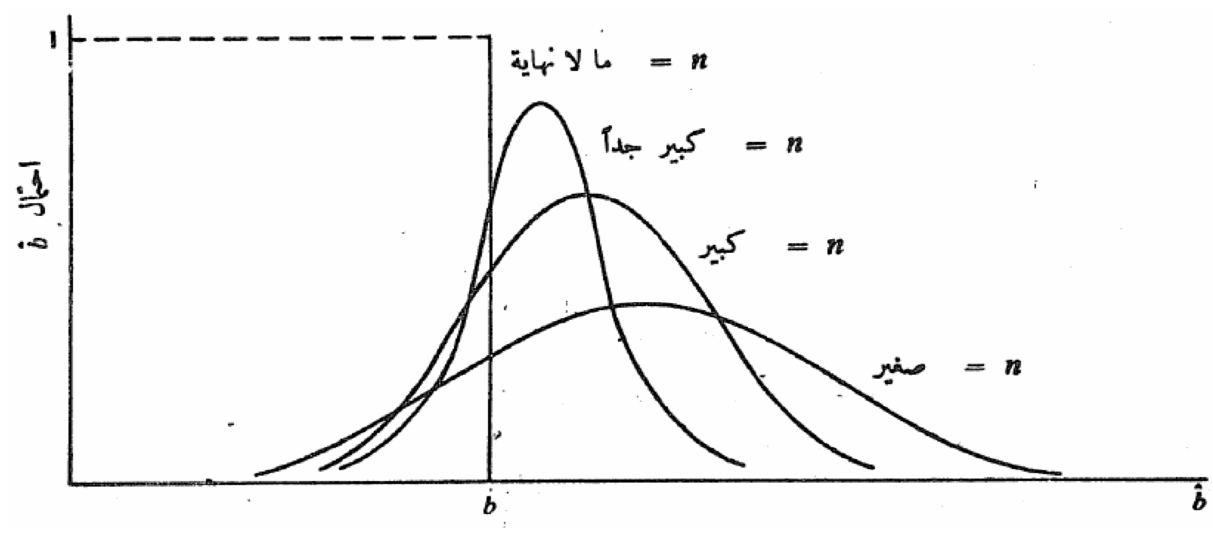
إذا واجهنا مشكلة تحيز مقدرة ما، فإننا ننظر إلى الخاصية التقاربية لذلك المقدر، ويحدث ذلك لما يكون المتغير المستقل X_i عبارة عن متغير تابع ومبطئ بفترة زمنية ما، ونقول عن $\hat{\beta}_1$ بأنه مقدر متسق (Consistent Estimator)، إذا كان: كلما $n \to \infty$ فإن توزيع المعاينة لـ $\hat{\beta}_1$ يقترب من القيمة الحقيقية β_1، ونقول أن النهاية الاحتمالية للمقدر $\hat{\beta}_1$هي β_1 ونكتب :

$$p\lim_{n\to\infty}(\hat{\beta}_1) = \beta_1$$

لكن هذا الشرط غير كاف للحصول على مقدر متسق، بل يجب أن تكون قيمتا التحيز والتباين تقتربان أو تساويان الصفر كلما اقترب n من ما لا نهاية أي:

$$1.\lim_{n\to\infty} E(\hat{\beta}_1) = p\lim_{n\to\infty}(\hat{\beta}_1) = \beta_1$$
$$2.\lim_{n\to\infty} \text{var}(\hat{\beta}_1) = p\lim_{n\to\infty} \text{var}(\hat{\beta}_1) = 0$$

شكل رقم (06): خاصية التقارب.



1-6 اختبار جودة التوفيق والارتباط

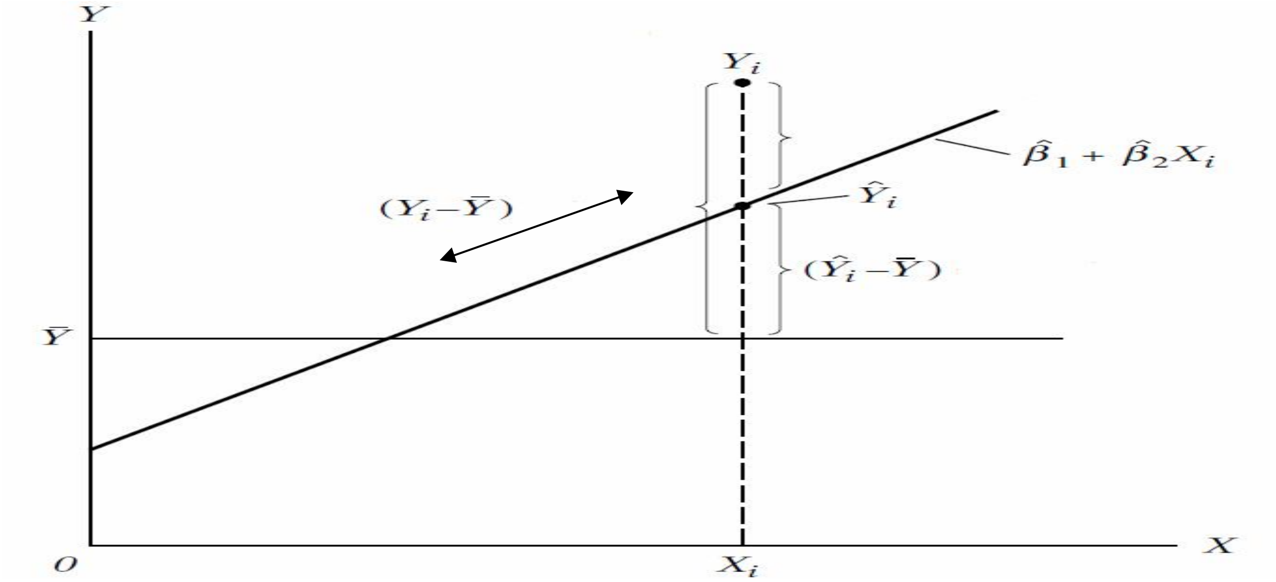
1-6-1 اختبار جودة الارتباط بواسطة R^2 :

معامل التحديد R^2 : يعتبر معامل التحديد المعامل المفسر للاختلافات الحاصلة في المتغير التابع بسبب التغيرات الحاصلة في المتغير المستقل وهو نسبة مئوية تتراوح نسبته ما بين 0% و100% ، فإذا قلنا أن قيمة معامل التحديد نحو 80% يعني ذلك أن نحو 80% من التغيرات الحاصلة في المتغير التابع سببها المتغير المستقل والباقي 20% تعود إلى عوامل أو متغيرات لم تدخل النموذج.أخرى

- كما يشير إلى التغير المفسر بواسطة خط الانحدار إلى التغير الإجمالي للمتغير التابع Y أو هو عبارة عن نسبة الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار إلى الانحرافات الكلية للمتغير التابع Y
- كلما كانت المشاهدات أقرب إلى خط الانحدار أي كلما صغرت البواقي كلما زاد في Y الذي تفسره معادلة الانحدار المقدرة.
- التغير الإجمالي في Y يساوي التغير المفسر زائد التغير في البواقي.

تساعد البواقي e_i على قياس مدى تمثيل المعادلة المفروضة في النموذج لمشاهدات العينة، حيث أن القيمة الكبيرة للبواقي تعني بأن التمثيل يكون غير جيد والقيمة الصغيرة لها تعني تمثيلا جيدا للنموذج، إن المشكلة في استعمال البواقي كمقياس لجودة التوفيق هو أن قيمة البواقي تعتمد على المتغير التابع Y_i، الذي نعرفه حول وسطه انطلاقا من الشكل رقم (7) كما يلي :

شكل رقم (07): التغير الإجمالي للمتغير التابع.



$$Y_i = \hat{Y}_i + \hat{\varepsilon}_i$$
$$Y_i - \bar{Y} = \hat{Y}_i - \bar{Y} + \hat{\varepsilon}_i$$

وبتربيع طرفي المعادلة أعلاه وجمعها بالنسبة لكل *i* نجد :

$$\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 = \left(\hat{Y}_i - \bar{Y} + \hat{\varepsilon}_i\right)^2$$

$$\sum\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 = \sum\left(\hat{Y}_i - \bar{Y} + \hat{\varepsilon}_i\right)^2$$

$$\sum\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 = \sum\left[\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2 + 2\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)e_i + e^2{}_I\right]$$

$$\sum\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 = \sum\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2 + 2\sum\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)e_i + e^2{}_i$$

ومن الفرضيات الكلاسيكية لطريقة المربعات الصغرى لا يوجد ارتباط بين الحد العشوائي والمتغيرة المستقلة وبالتالي فالمقدار :

$$2\sum\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)e_i = 0$$

معنى ذلك أن مجموع المربعات الكلية يمكن كتابتها على الشكل:

$$\boxed{\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_i \hat{\varepsilon}_i^2}$$

وتعد هذه المعادلة مفيدة جدا لخدمة أغراضنا فيما يتعلق بقياس القدرة التفسيرية، ولذا من المهم أن نفحص بعناية معنى كل حد من حدودها الحدود:

SCT Total Sum of Squares	مجموع المربعات الإجمالي للتغيرات التي تحدث في المتغير التابعY. $\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2$
SCE Regression Sum of Squares	يسمى بمجموع مربعات الانحدار يعني جزء من تباين Y الذي تم تفسيره بواسطة الانحدار. أي الجزء من المتغيرات التي تحدث في المتغير التابع والذي تم تفسيرها بواسطة النموذج المقدر. $\sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$
SCR Error	مجموع مربعات البواقي، وهذا مؤشر للجزء الذي لم يفسر بواسطة نموذج الانحدار، أي الجزء الذي فشل النموذج في تفسيره . $\sum_i \hat{\varepsilon}_i^2$

نعيد صياغة المعادلة السابقة على الشكل : $SCT = SCE + SCR$

ويمثل نسبة مجموع مربعات الانحدار إلي مجموع المربعات الإجمالي ما يسمى بـ **معامل التحديد** R^2

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{SCT - SCR}{SCT} = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{\sum \hat{\varepsilon}_i^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}$$

وبتقسيم كل الأطراف على الانحرافات الكلية SCT نجد :

$$1 = \frac{SCE}{SCT} + \frac{SCR}{SCT}$$

وعليه نعرف معامل التحديد $R^2 = r^2$ كما يلي:

$$R^2 = r^2 = \frac{SCE}{SCT} = 1 - \frac{SCR}{SCT}$$

لدينا : $$SCE = \sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$$

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$$

$$\bar{\hat{Y}} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

$$\hat{Y} - \bar{\hat{Y}} = \hat{\beta}_1 X_i - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

$$\hat{Y} - \bar{\hat{Y}} = \hat{\beta}_1 \left(X_i - \bar{X}\right)$$

$$\left(\hat{Y} - \bar{\hat{Y}}\right)^2 = \hat{\beta}^2{}_1 \left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

$$\sum_I \left(\hat{Y} - \bar{\hat{Y}}\right)^2 = \hat{\beta}^2{}_1 \sum_I \left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

وبالتالي :

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{SCT - SCR}{SCT} = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{\hat{\beta}^2 \sum_I \left(X_i - \bar{X}\right)^2}{\sum_I \left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}$$

- R^2دائما موجب وتتراوح قيمته بين الصفر والواحد $1 \prec R^2 \prec 0$.
- تكون جودة التوفيق قد بلغت الحد الأعلى عندما تكون : $R^2 = 1$.
- تكون جودة التوفيق معدومة عندما تكون : $R^2 = 0$.

2-6-1 الارتباط الخطى البسيط (Simple Correlation)

إذا كان الغرض من التحليل هو تحديد نوع وقوة العلاقة بين متغيرين يستخدم تحليل الارتباط، وأما إذا كان الغرض هو دراسة وتحليل أثر أحد المتغيرين على الآخر فيستخدم تحليل الانحدار، وفي هذه النقطة يتم عرض أسلوب تحليل الارتباط الخطي البسيط، أي في حالة افتراض أن العلاقة بين المتغيرين تأخذ الشكل الخطي، وسوف يجرى حسابه في حالة البيانات الكمية.

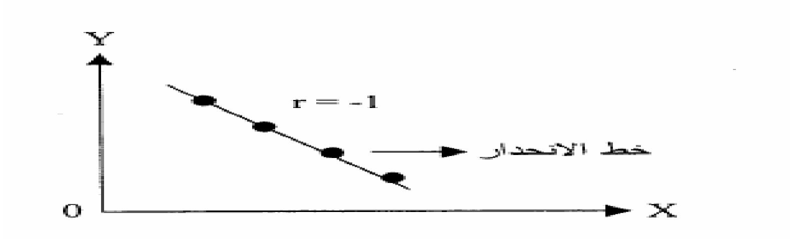
1-2-6-1 الغرض من تحليل الارتباط الخطى البسيط:

الغرض من تحليل الارتباط الخطي البسيط هو تحديد نوع وقوة العلاقة بين متغيرين، ويرمز له في حالة المجتمع بالرمز ρ (رو)، وفي حالة العينة بالرمز r، وحيث أننا في كثير من النواحي التطبيقية نتعامل مع بيانات عينة مسحوبة من المجتمع، سوف نهتم بحساب معامل الارتباط في العينة r كتقدير لمعامل الارتباط في المجتمع، ومن التحديد السابق للغرض من معامل الارتباط، نجد أنه يركز على نقطتين هما:

- نوع العلاقة:. وتأخذ ثلاث أنواع حسب إشارة معامل الارتباط كما يلي:

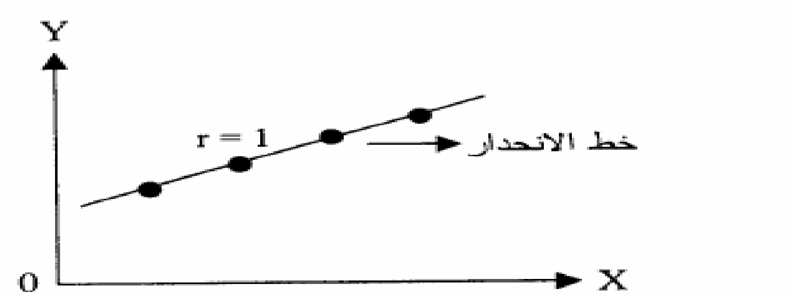
*إذا كانت إشارة معامل الارتباط سالبة $(r \prec 0)$توجد علاقة عكسية بين المتغيرين، بمعنى أن زيادة أحد المتغيرين يصاحبه انخفاض في المتغير الثاني، والعكس.

شكل رقم (08): الارتباط الخطي الموجب.



*إذا كانت إشارة معامل الارتباط موجبة $(r \succ 0)$ توجد علاقة طردية بين المتغيرين، بمعنى أن زيادة أحد المتغيرين يصاحبه زيادة في المتغير الثاني، والعكس . ثقل

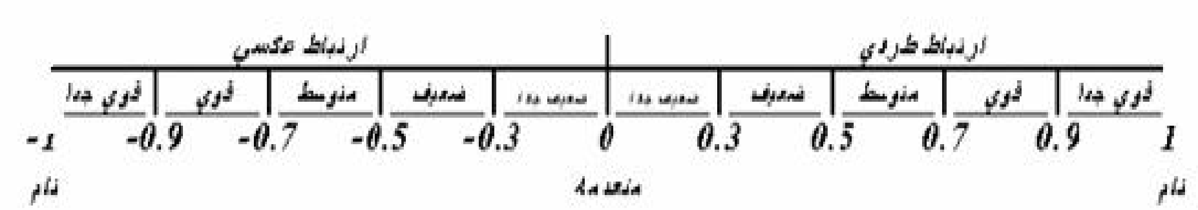
شكل رقم (09): الارتباط الخطي السالب.



*إذا كان معامل الارتباط قيمته صفرا $(r = 0)$ دل ذلك على انعدام العلاقة بين المتغيرين.

- **قوة العلاقة:** ويمكن الحكم على قوة العلاقة من حيث درجة قربها أو بعدها عن (± 1)، حيث أن قيمة معامل الارتباط تقع في المدى $(-1 \prec r \prec +1)$، وقد صنف بعض الإحصائيين درجات لقوة العلاقة يمكن تمثيلها على الشكل التالي:

الشكل رقم (10) : درجات قوة معامل الارتباط .



2-2-6-1 معامل الارتباط الخطى البسيط " لبيرسون" Pearson

يقيس هذا المعامل قوة العلاقة مابين المتغير المستقل X والمتغير التابع Y وهو أيضا نسبة مئوية كما هو الحال في معامل التحديد، وقوة العلاقة تعتمد على مدى قرب أو بعد النقاط المشتركة ما بين المتغيرين المستقل والتابع من خط الانحدار، فإذا بلغت قوة العلاقة بنسبة عالية كانت جميع النقاط المشتركة قريبة من خط الانحدار والعكس صحيح، وهذا المعامل إحصائي صرف لا يبرر نوع العلاقة وفقا لتوجهات النظرية الاقتصادية أو أي اتجاه آخر بل في إيجاد أرقام تبين قوة العلاقة ما بينهما فحسب.

ولحساب معامل الارتباط في العينة ، تستخدم صيغة " بيرسون" التالية :

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{y}) / (n-1)}{\sqrt{\frac{\sum \left(X_i - \bar{X}\right)^2}{(n-1)}} \sqrt{\frac{\sum \left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}{(n-1)}}} \text{...........01}$$

حيث أن :

σ_{xy} : هو التغاير بين (X,Y)

σ_x: هو الانحراف المعياري لقيم (X).

σ_y: هو الانحراف المعياري لقيم (Y).

ويمكن اختصار الصيغة السابقة على النحو التالي:

$$\boxed{r = \frac{\sum \left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{\sqrt{\sum \left(X_i - \bar{X}\right)^2} \sqrt{\sum \left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}} \text{...........02}}$$

بتربيع العلاقة رقم 02 نجد :

$$r^2 = \frac{\sum \left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right) \sum \left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{\sqrt{\sum \left(X_i - \bar{X}\right)^2} \sqrt{\sum \left(Y_i - \bar{Y}\right)^2} \sqrt{\sum \left(X_i - \bar{X}\right)} \sqrt{\sum \left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}} \text{...........02}$$

$$r^2 = \frac{\sum \left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right) \sum \left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{\sum \left(X_i - \bar{X}\right)^2 \sum \left(Y_i - \bar{Y}\right)^2} \text{...........03}$$

$$r^2 = \frac{\hat{\beta}_1^{\,2} \sum \left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{\sum \left(Y_i - \bar{Y}\right)^2} \text{...........04}$$

لدينا : 05.............. $\hat{\beta}_2 = \dfrac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}$ مقدرة انحدار X على Y.

تصبح العلاقة رقم 04 كما يلي:

$$r^2 = \hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2$$

$$\boxed{r = \pm \sqrt{\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2} \quad ....\ ..06}$$

نضرب ونقسم العلاقة رقم:04 في $\sum (X_i - \bar{X})^2$ نتحصل على:

$$r^2 = \frac{\hat{\beta}_1^{\,2} \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \sum (X_i - X)^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2 \sum (X_i - \bar{X})^2} \quad ....07$$

$$r^2 = \frac{\hat{\beta}_1^{\,2} \sum (X_i - \bar{X})^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} \quad ....08$$

$$r^2 = \frac{SCE}{SCT} \quad ....$$

$$\boxed{r = \pm \sqrt{R^2} \quad ....09}$$

7-1 اختبار الفرضيات :

بمعرفة توزيع $\hat{\beta}_0$و $\hat{\beta}_1$ يمكن إجراء اختبار الفرضيات الموضوعة حول معالم لنموذج β_0و β_1 على التوالي، و الاختبار الشائع جدا هو فرضية العدم H_0 ، وتقترح على العموم بأنه لا يوجد أثر على النموذج من قبل متغير مستقل ما، ونظرا إلى أن الباحثين يتمنون قبول النموذج، فإن فرضية العدم توضع عادة لإثبات رفضها إذا أمكن ذلك، ونأمل رفض H_0 بإيجاد القيمة التقديرية والتي تكون تختلف عن الصفر حتة نقبل النموذج.

ولاختبار معنوية معاملات الانحدار المقدرة$\hat{\beta}_0$و $\hat{\beta}_1$يتم استخدام اختبار ستودينت.

1-7-1 اختبار t – Student :

يستخدم هذا الاختبار لاختبار معنوية كل معلمة على حدى.

***فرضيات هذا الاختبار :** ما دامت العلاقة بين Y و X قائمة على أساس النموذج الخطي، فإن انعدام هذه العلاقة يعني بأن خط انحدار المجتمع هو عبارة عن خط أفقي، أي $(H_0 : \beta_1 = 0)$ وبما أن الفرضية *H0* خاضعة للاختبار، فإنه لا يكون بالضرورة صحيحا، الأمر الذي يتطلب منا وضع فرضية بديلة $H_1 : \beta_1 \neq 0$. وفي حالة معرفة إشارة β_1مسبقا من النظرية الاقتصادية فإن الافتراض البديل يكون $H_1 : \beta_1 > 0$ (أو $H_1 : \beta_1 < 0$)، وفرضيات هذا الاختبار هي:

المعلمة ليس لها دلالة معنوية $H_0 : \beta_1 = 0$ (فرضية العدم)

المعلمة لها دلالة معنوية $H_1 : \beta_1 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

يتم هذا لاختبار بإيجاد القيمة المحسوبة t_{cal} وتساوي :

حيث أن: $$t_{cal} = \frac{\left|\hat{\beta}_1 - \beta_1\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$$

$\sigma_{\hat{\beta}1}$ الانحراف المعياري المقدر ل $\hat{\beta}_1$: ويحسب بالطريقة التالية: $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{\mathrm{var}\left(\hat{\beta}_1\right)} = \frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2}}$

أما إذا كنا بصدد اختبار معنوية الحد الثابت ففرضيات هذا الاختبار هي:

المعلمة ليس لها دلالة معنوية $H_0 : \beta_0 = 0$ (فرضية العدم)

المعلمة لها دلالة معنوية $H_1 : \beta_0 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

يتم هذا لاختبار بإيجاد القيمة المحسوبة t_c وتساوي : $t_{cal} = \frac{\left|\hat{\beta}_0 - \beta_0\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}$ حيث أن:

$\sigma_{\hat{\beta}0}$ الانحراف المعياري المقدر ل $\hat{\beta}_0$: ويحسب بالطريقة التالية:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} = \sqrt{\mathrm{var}\left(\hat{\beta}_0\right)} = \sigma_\varepsilon \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{n \sum (X_i - \bar{X})^2}}$$

حيث أن $\sigma^2{}_\varepsilon$ مجهولة والتي نحتاجها لنتمكن من حساب تباين $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ لذلك لابد من تقديرها باستخدام العينة $\sigma^2{}_e$= مجموع مربعات البواقي/درجة الحرية ويكتب رياضيا كما يلي:

$$\sigma_e{}^2 = \frac{\sum e_i{}^2}{n - K}$$

حيث أن :

k: عدد المعالم : في الانحدار الخطي البسيط يساوي 2.

و $\sum e^2{}_i$: مجموع مربعات البواقي.

وما دمنا نختبر فرضية العدم وتنص على انعدام β فإن قيمة t_{cal} تصبح على الشكل التالي: $t_{cal}=\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$ ،

حيث يتم قبول أو رفض الفرضية H_0 بمستوى معنوية $(\alpha\%)$ على أساس مقارنة t_{cal} مع القيمة المجدولة t_t حيث أن : t_{tab} يتم قراءتها من جدول ستودينت كالتالي: $t_{tab}=t_{n-k,\frac{\alpha}{2}}$ حيث أن:

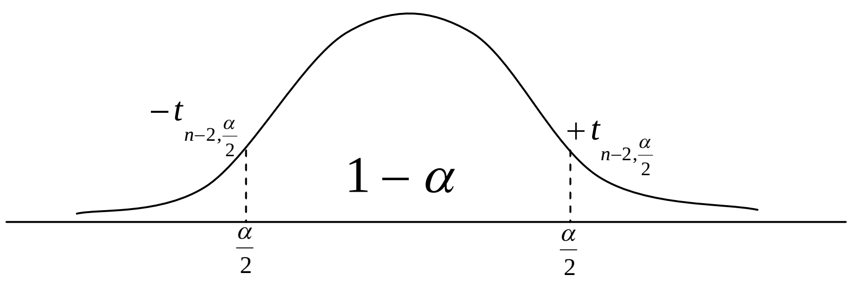
$\frac{\alpha}{2}$: مستوى المعنوية و k: عدد المعالم في الانحدار الخطي البسيط يساوي 2.

$$\begin{cases} \text{إذا كانت } \left|\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}\right| \le t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \text{ ففي هذه الحالة المعلمة ليس لها معنوية إحصائية أي يساوي معنويا الصفر .} \\ \text{إذا كانت } \left|\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}\right| > t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \text{ أي المعلمة لها معنوية إحصائية فهو يختلف معنويا عن الصفر.} \end{cases}$$

نقوم بنفس الاختبار مع الثابتة β_0 .

ويمكن توضيح كل ما سبق في مايلي:

الشكل رقم (11) : توزيع المعاينة لـ $\hat{\beta}_1$ ثنائي الطرف.



ملاحظة: عندما يكون حجم العينة كبيرا $(n>30)$ فينبغي استعمال التوزيع الطبيعي و يمكن أخذ القيمة الحرجة $z_{\alpha/2}$ و ذلك بحساب المساحة المظلة للتوزيع الطبيعي.

1-7-2 حدود الثقة لمعلمات الانحدار:

نعني بحدود أو فترات الثقة لمعاملات الانحدار، تقدير مدى الثقة التي تقع ضمنها القيمة الحقيقية للمعلمة أي المعلمة المجتمع، ويراد بحدي الثقة الحد الأدنى الذي يرمز له بالرمز L و الحد الأعلى الذي يرمز له بالرمز U، ويعني ذلك تحديد مدى تتراوح فيه قيم المعلمتين: β_0 و β_1 بين هذه الحدين.

عند مستوى معنوية $(\alpha\%)$ يكون مجال الثقة لكلا المعلمين :

$$\Pr\left[-t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\hat{\beta}_0-\beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} \le +t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\right]=1-\alpha$$

$$\Pr\left[-t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\hat{\beta}_1-\beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \le +t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\right]=1-\alpha$$

و الصيغة الرياضية لتقدير حدود الثقة هي:

أي معلمة المجتمع= المعلمة المقدرة $\pm$ $t_{\left(\frac{\alpha}{2},\text{n-k}\right)}$*الانحراف المعياري للمعلمة المقدرة.

$$\beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} \quad , \quad \hat{\beta}_0 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}\right]$$

$$\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} \quad , \quad \hat{\beta}_1 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\right]$$

$t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$: القيمة الحرجة لتوزيع *Student* بدرجة حرية $n-2$ و نسبة معنوية $(\alpha\%)$ ونجدها من جدول توزيع القيمة المحسوبة.

تتراوح قيمة معامل الثقة بين 90%، 95%، 100% ، كما أن مستوى المعنوية هو احتمال تكميلي لمعامل الثقة، هذا يعنى حاصل جمع معامل الثقة ومستوى المعنوية يساوي الواحد، فإذا كان معامل الثقة 95%، فإن مستوى المعنوية يكون 5% وهكذا، وبناءاً عليه يمكن تعريف فترة الثقة بأنها " الفترة التي توجد فيها القيمة الفعلية لـ B بين حد أدنى و أعلى وباحتمال معين".

ملاحظة: عندما يكون حجم العينة كبيرا $(n>30)$ فينبغي استعمال التوزيع الطبيعي و يمكن أخذ القيمة الحرجة $z_{\alpha/2}$ و ذلك بحساب المساحة المظلة للتوزيع الطبيعي.

وتصبح العلاقة السابقة كالأتي:

$$\beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 - Z_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} \quad , \quad \hat{\beta}_0 + Z_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}\right]$$

$$\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 - Z_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} \quad , \quad \hat{\beta}_1 + Z_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\right]$$

$z_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$: القيمة الحرجة للتوزيع *الطبيعي* بدرجة حرية $n-2$ و نسبة معنوية $(\alpha\%)$ ونجد من جدول التوزيع الطبيعي القيمة المجدولة.

ملاحظة: كلما كان مجال الثقة ضيقا كلما كان المقدر أحسن، لأن الأخطاء المعيارية تكون أصغر.

1-7-3 اختبارات المعنوية الكلية لمعالم النموذج:

اختبار فيشر (Ficher) F:

هو اختبار إحصائي يختبر جوهرية معامل التحديد R^2 وأيضا يختبر معوية النموذج ككل مما يظهر كفاءة النموذج في تمثيل العلاقة الاقتصادية أو الظاهرة المدروسة تبين على إثرها جودة وتوفيق الباحث في اختيار متغيراته لتمثيل هذه الظاهرة، وهو أيضا له قيمتين إحداهما تحتسب من نتائج تقدير النموذج والثانية مأخوذة من الجدول تعتمد على عدد المتغيرات ودرجة الحرية.

وتختبر الفرضية التي تنص على أن معاملات المتغيرات المفسرة تساوي الصفر، أي أن فرضية العدم تقول انه لا يوجد علاقة بين المتغيرات المفسرة والمتغير التابع.

وتكون الصيغة الرياضية للفرضية المراد اختبارها كالاتي:

(فرضية العدم) $H_0 : \beta_1 = 0$ الانحدار ككل ليس له دلالة معنوية

الانحدار ككل له دلالة معنوية $H_1 : \beta_1 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

يتم أولا تحديد قيمة F المحسوبة كالتالي [2]:

$$F = \frac{SCE/k-1}{SCR/(n-k)} \sim F_{k-1,n-k}$$

بتقسيم البسط والمقام على SCT نجد :

$$F = \frac{\frac{SCE/k-1}{SCT}}{\frac{SCR/(n-k)}{SCT}} \sim F_{k-1,n-k}$$

تصبح العلاقة على الشكل التالي:

$$F = \frac{R^2/k-1}{(1-R^2)/(n-k)} =\sim F_{k-1,n-k}$$

حالة خاصة في الانحدار الخطي البسيط[3]:

لدينا:

[2] REGIS BOURBONNAIS, OP.CIT, P34.
[3] SAMIR GHAZOUANI/ MOHAMED GOAIED, OP.CIT, P25.

$$F = \frac{SCE/k-1}{SCR/(n-k)} \sim F_{k-1,n-k}$$

$$F = \frac{\hat{\beta}_1^2 \sum \left(X - \bar{X}\right)^2}{\sum e_i^2/(n-k)} = \frac{\hat{\beta}_1^2 \sum \left(X_i - \bar{X}\right)^2}{\sigma^2{}_e} \sim F_{k-1,n-K}$$

$$F = \frac{\hat{\beta}_1^2}{\dfrac{\sigma^2{}_e}{\sum \left(X - \bar{X}\right)^2_i}} \sim F_{k-1,n-k}$$

$$F = \frac{\hat{\beta}_1^2}{Var\left(\hat{\beta}\right)} = \left[\frac{\hat{\beta}_1}{\sigma_{\hat{\beta}}}\right]^2 = \left[t_{c\hat{\beta}}\right]^2$$

في توزيع F القيمة المجدولة لإحصائية Fisher في هذه الحالة تعتمد على درجتي حرية 1 (في البسط) و $n-2$ (في المقام).

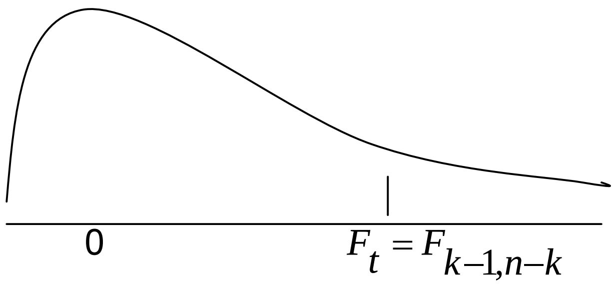
$$F_t = F_{k-1,n-k}$$

$"k-1=1"$ $"n-k=n-2"$ في الانحدار الخطي البسيط $F_t = F_{1,n-2}$

إذا كان $F_C \le F_t$ ففي هذه الحالة الانحدار ككل ليس له دلالة معنوية إحصائية .

إذا كان $F_C \ge F_t$ ففي هذه الحالة الانحدار ككل له دلالة معنوية إحصائية .

الشكل رقم (12) : توزيع F



1-8 التنبؤ:

1-8-1 التنبؤ باستخدام معادلة الانحدار:

إن أحد الأهداف الرئيسية لتطبيق بحث الاقتصاد القياسي هو استخدام النموذج المقدر للتنبؤ بقيمة المتغيرات التابعة استناداً إلى قيم المتغيرات المستقلة من أجل التعرف على مسار الظاهرة موضوع البحث في المستقبل، حيث يعرف التنبؤ بأنه تحليل بيانات الماضي وتطبيق نتائجها على المستقبل من خلال استخدام نموذج رياضي مناسب، أي أن $\hat{Y}$ تستخدم في التنبؤ بقيمة Y_i الجديدة ولتكن Y_f في حالة الاعتماد على قيمة X_i الجديدة ولتكن X_f .

للتنبؤ أخطاء وقد ينشأ بسبب خطأ التقدير: $(y_0)-E(y_0)$ وخطأ المعاينة: $E(y_0)-(\hat{y}_0)$ وعليه فإن الخطأ الحاصل في التنبؤ عن قيمة المفردة الواحدة هو مجموع نوعين من الانحراف أي:

$$\hat{Y}_f - Y_f = (Y_f - E(Y_f)) + \left(E(Y_f) - (\hat{Y}_0)\right)$$

معادلة الانحدار المقدرة $\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X$ تستخدم في عملية التنبؤ لقيم Y وذلك لقيم محدده من X .

إذا كانت X_f تمثل القيمة المحددة لX والتي تستخدم في التنبؤ بقيمة Y_f من قيم Y.

$$\hat{Y}_f = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_f$$

حيث يمثل خطأ التنبؤ: $\hat{Y}_f - Y_f = (\hat{\beta}_0 - \beta_0) + (\hat{\beta}_1 - \beta_1)X_f + \varepsilon_f$

حيث أن : $E(\hat{\beta} - \beta_0) = 0, E(\hat{\beta}_1 - \beta_1) = 0, E(\varepsilon_f) = 0$

إذا تكون $E(\hat{Y}_f - Y_f) = 0$

هذه تعني أن قيمة Y هي قيمه غير متحيزة ويكون التباين يساوي:

$$V(\hat{Y}_f - Y_f) = V(\hat{\beta}_0 - \beta_0) + X_f^2 V(\hat{\beta}_1 - \beta_1) + 2X_f COV(\hat{\beta}_0 - \beta_0, \hat{\beta}_1 - \beta_1) + V(\varepsilon)$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)^2}\right] + \sigma_\varepsilon^2 \frac{X_f^2}{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)^2} - 2X_f \sigma_\varepsilon^2 \frac{\bar{X}}{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)^2} + \sigma^2$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_f - \bar{X})^2}{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)^2}\right]$$

أي أن التباين يرتفع بارتفاع تباين X أي باختلاف قيم X عن قيم متوسطها.

عند مستوى معنوية $(\alpha\%)$ يكون مجال الثقة للتنبؤ :

$$\Pr\left[-t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\hat{Y}_f - Y_f}{\hat{\sigma}_{\left(\hat{Y}_f - Y_f\right)}} \le +t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha$$

$$\Pr\left[-t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \le \frac{Y_f - Y_f}{\hat{\sigma}_{\left(\hat{Y}_f - Y_f\right)}} \le +t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha$$

و الصيغة الرياضية لتقدير حدود الثقة هي:

$$Y_f \in \left[\hat{Y}_f - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{Y}_f} , \hat{\beta}_0 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{Y}_f} \right]$$

$t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$: القيمة الحرجة لتوزيع ***Student*** بدرجة حرية $n-2$ و نسبة معنوية $(\alpha\%)$ ونجد من جدول التوزيع القيمة المجدولة.

2-8-1 التنبؤ باستخدام القيمة المتوقعة:

أحيانا يرغب الباحث في التنبؤ بالقيمة المتوقعة لـY بدلا من Y_0 آي قيمة$E(Y_f)$أي القيمة المتوسطة لـ Y_f وليس$E(Y_f)$.

عند التنبؤ بالقيمة المتوقعة فان $E(Y_f)=Y_f$ حيث أن $E(Y_f)=\beta_0+\beta_1 X_f+\varepsilon_f$ لذلك فإن القيمة المتنبأ بها تساوي $\hat{E}(Y_f)=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 X_f+e_f$ آي يساوي Y_f ولكن الخطأ المعياري والتباين سيكون مختلفا.

ولدينا التباين يساوي: $\hat{E}(Y_f)-E(Y_f)=(\hat{\beta}_0-\beta_0)+(\hat{\beta}_1-\beta_1)X_f$

$$Var[E(Y_f)-E(Y_f)]=\sigma_\varepsilon^2\left[\frac{1}{n}+\frac{(X_f-\overline{X})^2}{\sum\left(X_i-\overline{X}\right)^2}\right]$$

والخطأ المعياري يساوي الجذر التربيعي للتباين وفترة الثقة تساوي :

$$E\left(Y_f\right)\in\left[\hat{E}\left(Y_f\right)-t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{E\left(\hat{Y}_f\right)},\hat{E}\left(Y_f\right)+t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{E\left(\hat{Y}_f\right)}\right]$$

9-1 تمرين تطبيقي 01:

تمثل البيانات التالية العلاقة بين الإنفاق الشهري للأسرة ودخلها الشهري فكانت موزعة كما يلي:

الدخل الشهري X_i	الإنفاق الشهري Y_i	X_iY_i	X_i^2
100	75	750	10000
125	70	8750	15625
140	93	13020	19600
150	112	16800	22500
160	110	17600	25600
175	130	22750	30625
200	150	30000	40000
220	170	37400	48400
250	195	48750	62500
300	230	69000	90000
300	210	63000	90000
$\sum X_i = 2120$ $\overline{X} = 192.73$	$\sum Y_i = 1545$ $\overline{Y} = 140.45$	$\sum X_iY_i = 334570$	$\sum X_i^2 = 454850$

<u>المطلوب :</u>

1 أوجد المعادلة المقدرة باستخدام المعطيات العادية والمركزة " الانحرافات "؟ اشرح المعنى الاقتصادي لمعالم الانحدار المقدرة ؟

2. أحسب الانحراف المعياري المقدر لكل من $\hat{\beta}_1$ **et** $\hat{\beta}_0$ ؟

3. أوجد معامل التحديد ؟ ماذا تستنتج ؟ فسر معامل الارتباط ؟

4. قدر معالم النموذج عند مستوى ثقة **95%** ؟

5. اختبر معنوية المعلمات باستخدام اختبار t **et** F عند مستوى معنوية **α = 5%** ؟

6. أوجد الإنفاق الشهري عند القيمة 320 وحدة نقدية ثم حدد مجال الثقة للأجر السنوي عند هذه القيمة عند مستوى ثقة **95%**؟ حدد مجال الثقة لمتوسط الإنفاق الشهري عند هذه القيمة عند مستوى ثقة **95%**؟

الحل :

<u>1* إيجاد المعادلة المقدرة .</u>

$$\begin{cases} \hat{\beta}_1 = \dfrac{n\sum_i X_i Y_i - \sum_i X_i \sum_i Y_i}{n\sum_i X_i^2 - \left(\sum_i X_i\right)^2} = \dfrac{334570 - 11\times 192.73\times 140.45}{11\times 454850 - (192.73)^2} = 0.7958 \\ \hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X} = 140.45 - 0.7958\times 193.73 = -12.9277 \end{cases}$$

معادلة خط الانحدار المقدر على الشكل التالي:

$$\hat{Y}_i = -12.9277 + 0.7958 X_i$$

- **شرح المعنى الاقتصادي لمعالم الانحدار المقدرة .**

- $\left(\hat{\beta}_0 = -12.9277\right)$: إذا كان الدخل الشهري معدوم (أي: $X_i = 0$) ، فإن النفاق الشهري) Y_i (هو 12.9277 دينار .

$\left(\hat{\beta}_1 = 0.7958\right)$: إذا تغير الدخل الشهري بوحدة واحدة يرتفع الإنفاق الشهري بـ 0.7958 وحدة نقدية.

- **تقدير المعلمات باستخدام الانحرافات :**

الدخل الشهري X_i	الإنفاق الشهري Y_i	$x_i = (X_t - \overline{X})$	$y_i = (Y_t - \overline{Y})$	$x_i y_i$	x_i^2
100	75	-92.73	-65.45	6069.18	8598.85
125	70	-67.73	-70.45	4771.58	4587.35
140	93	-52.73	-47.45	2502.04	2780.45
150	112	-42.73	-28.45	1215.67	1825.85
160	110	-32.73	-30.45	996.63	1071.25
175	130	-17.73	-10.45	185.28	314.35
200	150	7.27	9.55	69.43	52.85
220	170	27.27	29.55	805.83	743.65
250	195	57.27	54.55	3124.08	3279.85
300	230	107.27	89.55	9606.03	11506.85
300	210	107.27	69.55	7460.63	11506.85
$\sum X_i = 2120$ $\overline{X} = 192.73$	$\sum Y_i = 1545$ $\overline{Y} = 140.45$	$\sum\left(X_i - \overline{X}\right) = 0$ $\sum(x_i) = 0$	$\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right) = 0$ $\sum(y_i) = 0$	$(x_i y_i) = 36806.36$	$x_i^2 = 46256.61$

لدينا بالانحرافات تصبح المتغيرات على شكل انحرافات بالنسبة للمتوسط الحسابي.

$$y_i = \left(Y_i - \overline{Y}\right)$$

$$x_i = \left(X_i - \overline{X}\right)$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^{\,2}}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^{\,2}}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{36806.36}{4626818} = 0.7958$$

2*حساب الانحراف المعياري المقدر لكل من $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_0$.

- **حساب الانحراف المعياري المقدر ل $\hat{\beta}_1$**

لدينا:

$$Var\left(\hat{\beta}_1\right) = \sigma_\varepsilon^{\,2} \frac{1}{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2} \qquad \sigma_e^{\,2} = \frac{\sum e^2{}_i}{n-k}$$

إيجاد $\sum e^2{}_i$:

لدينا :

$$\sum_i (Y_i - \overline{Y})^2 = \sum_i (\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 + \sum_i \hat{\varepsilon}_i^2$$

$$SCT = \sum_i (Y_i - \overline{Y})^2 = 30140.72$$

$$SCE = \sum_I \left(\hat{Y} - \overline{\hat{Y}}\right)^2 = \hat{\beta}^2{}_1 \sum_I \left(X_i - \overline{X}\right)^2 = 29281.31$$

$$SCR = \sum e^2{}_i = SCT - SCE = 862.33$$

$$\sigma_e^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k} = \frac{862.33}{11-2} = 95.81$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \sigma_e^2 \frac{1}{\sum (X_i - \overline{X})^2} = 95.81 \times \frac{1}{46256.61} = 0.00207$$

$$\sigma(\hat{\beta}_1) = \sqrt{Var(\hat{\beta}_1)} = \sqrt{0.00207} = 0.04$$

* **حساب الانحراف المعياري المقدر ل $\hat{\beta}_0$:**

$$Var\left(\hat{\beta}_0\right)=\sigma_e^{\ 2}\left[\frac{\sum X^2{}_i}{n\sum\left(X_i-\bar{X}\right)^2}\right]$$

$$Var\left(\hat{\beta}_0\right)=95.81\left[\frac{454850}{11\times 46256.61}\right]=85.65$$

$$\sigma(\hat{\beta}_0)=\sqrt{Var(\hat{\beta}_0)}=\sqrt{85.65}=9.25$$

3* **إيجاد معامل التحديد مع التفسير.**

$$R^2=\frac{SCE}{SCT}=\frac{SCT-SCR}{SCT}=\frac{\sum(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2}{\sum(Y_i-\bar{Y})^2}=\frac{\hat{\beta}^2\sum_I\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{\sum_I\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2}=\frac{29281.31}{30140.72}=0.971$$

أو :

$$R^2=1-\frac{SCR}{SCT}=1-\frac{861.24}{30140.72}=0.971$$

التفسير : الإنفاق الشهري $\left(Y_i\right)$ مفسر ب : 97.1% عن طريق عدد الدخل الشهري $\left(X_i\right)$ وتبقى 2.9% تدخل ضمن هامش الخطأ وهي متغيرات أخرى لم تدرج في النموذج أو أخطاء إرتكبناها أثناء القياس ، على العموم هو هامش قليل جدا دلالة على قوة النموذج التفسيرية.

- **إيجاد معامل الارتباط مع التفسير.**

" لأن ميل الانحدار موجب :

$$r=\pm\sqrt{R^2}=+\sqrt{R^2}$$ "

$$r=+\sqrt{R^2}=\sqrt{0.971}=0.9853$$

التفسير : هناك علاقة طردية وقوية جدا بين الإنفاق الشهري والدخل الشهري.

4* **تقدير معالم النموذج عند مستوى ثقة 95% .**

لدينا :

$$\beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} \quad , \quad \hat{\beta}_0 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}\right]$$

$$\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} \quad , \quad \hat{\beta}_1 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\right]$$

$$\beta_0 \in [-12.9277 - 2.262 \times 9.25 \quad , \quad -12.9277 + 2.262 \times 9.25] = [-33.8512 \quad 7.9958]$$

$$\beta_1 \in [0.7958 - 2.262 \times 0.04 \quad , \quad 0.7958 + 2.262 \times 0.04] = [0.7053 \quad 0.8862]$$

- هذا يعني أن هناك احتمال **95%** أن تقع القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع β_0 بين الحدين الأعلى 7.99 والأدنى 33.85- ، وأن هناك احتمال **5%** أن تقع خارج هذين الحدين.
- نفس الشيء بالنسبة للمعلمة β_1 هناك احتمال **95%** أن تقع القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع β_1 بين الحدين الأعلى 0.8862 والأدنى 0.7053 ، وأن هناك احتمال **5%** أن تقع خارج هذين الحدين.

5*اختبار معنوية المعلمات باستخدام اختبار t عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

- اختبار معنوية الميل عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

فرضيات هذا الاختبار هي:

(فرضية العدم) $H_0 : \beta_1 = 0$ المعلمة ليس لها دلالة معنوية

المعلمة لها دلالة معنوية $H_1 : \beta_1 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

يتم هذا لاختبار بإيجاد القيمة المحسوبة t_C وتساوي :

حيث أن: $t_C = \dfrac{\left|\hat{\beta}_1 - \beta_1\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$

وما دمنا نختبر فرضية العدم وتنص على انعدام β_1 فإن قيمة t_C تصبح على الشكل التالي:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} = \frac{0.7958}{0.04} = 17.5$$

حيث أن : $t_{n-k,\frac{\alpha}{2}}$ تقارن القيمة المحسوبة مع القيمة المجدولة

$1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - \dfrac{0.05}{2} = 0.975$: مستوى المعنوية و $k = 2$: عدد المعالم في الانحدار الخطي البسيط .

إذا كانت $t_t = t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}} = t_{6,0.975} = 2.262$.

إذا كانت $|t_c| \succ t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$ أي المعلمة لها معنوية إحصائية فهو يختلف معنويا عن الصفر أي أن الدخل الشهري يؤثر على الإنفاق الشهري.

- اختبر معنوية الحد الثابت عند مستوى معنوية **α = 5%** .

فرضيات هذا الاختبار هي:

(فرضية العدم) $H_0 : \beta_0 = 0$ المعلمة ليس لها دلالة معنوية

المعلمة لها دلالة معنوية $H_1 : \beta_0 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

يتم هذا لاختبار بإيجاد القيمة المحسوبة t وتساوي :

حيث أن: $t_C = \dfrac{\left|\hat{\beta}_0 - \beta_0\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}$

وما دمنا نختبر فرضية العدم وتنص على انعدام β_0 فإن قيمة t_C تصبح على الشكل التالي:

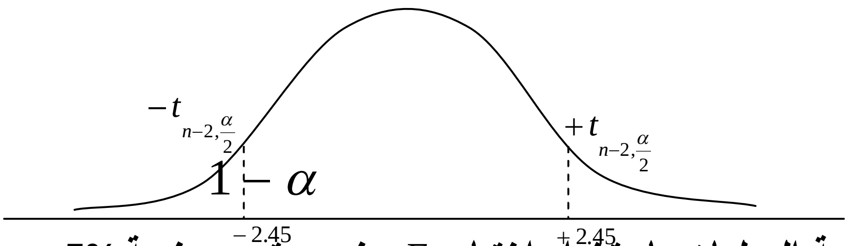
$$t_c = \frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} = \frac{-12.7299}{9.25} = -1.3968$$

مقارنة t_C مع القيمة المجدولة t_t حيث أن : t_t يتم قراءتها من جدول ستودينت كالتالي: $t_{n-k,\frac{\alpha}{2}}$ حيث أن:

$1-\frac{\alpha}{2} = 1-\frac{0.05}{2} = 0.975$: مستوى المعنوية و $k = 2$: عدد المعالم في الانحدار الخطي البسيط .

إذا كانت $t_t = t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} = t_{6,0.025} = 2.262$.

إذا كانت $|t_c| \succ t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$ أي المعلمة ليس لها معنوية إحصائية فهو لا يختلف معنويا عن الصفر .



6* اختبار معنوية المعلمات باستخدام اختبار F عند مستوى معنوية α = 5% .

الصيغة الرياضية للفرضية المراد اختبارها كالأتي:

(فرضية العدم) $H_0 : \beta_1 = 0$ الانحدار ككل ليس له دلالة معنوية

الانحدار ككل له دلالة معنوية $H_1 : \beta_1 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

يتم أولا تحديد قيمة F المحسوبة كالتالي :

$$F = \frac{SCE/k-1}{SCR/(n-k)} \sim F_{k-1,n-k}$$

$$F = \frac{292.31/2-1}{95.81/(11-2)} = 305.97 \sim F_{(1,9)}$$

أو :

$$F = \frac{R^2/k-1}{(1-R^2)/(n-k)} = \frac{0.971/1}{(1-0.971)/9} = 301.345 \sim F_{(1,\ 9)}$$

في توزيع F القيمة المجدولة لإحصائية Fisher في هده الحالة تعتمد على درجتي حرية 1 (في البسط) و $n-2$ (في المقام).

$$F_t = F_{k-1,n-k} = F_{(1,9)} = 5.117$$

إذا كان $F_C \geq F_t$ نقبل H_1 ونرفض H_0 الانحدار ككل له دلالة معنوية إحصائية أي أن: الأجر الشهري (X_i) يؤثر فعلا في الإنفاق الشهري (Y_i) .

7*<u>إيجاد الإنفاق الشهري عند القيمة 320 وحدة نقدي .</u> $\hat{Y}_f = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_f$

$\hat{Y}_f = -12.9277 + 0.7958 \times 320$ أي : الإنفاق الشهري عند قيمة 320 وحدة نقدية هو 241.73 وحدة نقدية.

- **<u>تحديد مجال الثقة للإنفاق الشهري عند هذه القيمة عند مستوى ثقة 95%.</u>**

لدينا :

$$Y_f \in \left[\hat{Y}_f - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{Y}_f}, \hat{Y}_f + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{Y}_f}\right]$$

$$\sigma^2_{Yf} = \sigma_e^2\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_f - \overline{X})^2}{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2}\right]$$

$$\sigma^2_{Y_f} = 95.81\left[1 + \frac{1}{11} + \frac{(241.73 - 192.73)^2}{46256.61}\right] = 109.22$$

$$Y_f \in \left[241.73 - 2.262\sqrt{109.22}, 241.73 + 2.262\sqrt{109.22}\right]$$

$$Y_f \in [218.13, 265.36]$$

- **تحديد مجال الثقة لمتوسط الأجر السنوي عند هذه القيمة عند مستوى ثقة 95%.**

$$E\left(Y_f\right) \in \left[\hat{E}\left(Y_f\right) - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{E\left(\hat{Y}_f\right)}, \hat{E}\left(Y_f\right) + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{E\left(\hat{Y}_f\right)}\right]$$

$$E\left(\hat{Y}_f\right) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_f$$

أي $\hat{Y}_f = -12.9277 + 0.7958 \times 320$: معدل الإنفاق الشهري للأسرة عند 320 سنة هو 240.73 وحدة نقدية.

$$E\left(Y_f\right) \in \left[\hat{E}\left(Y_f\right) - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{E\left(\hat{Y}_f\right)}, \hat{E}\left(Y_f\right) + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{E\left(\hat{Y}_f\right)}\right]$$

$$\sigma^2_{Yf} = \sigma_e^2\left[\frac{1}{n} + \frac{(X_f - \overline{X})^2}{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2}\right]$$

$$\sigma^2_{Y_f} = 95.81 \times \left[\frac{1}{11} + \frac{(241.73 - 192.73)^2}{46256.61}\right]$$

$$E\left(Y_f\right) \in \left[241.73 - 2.262\sqrt{13.41}, 241.73 + 2.262\sqrt{13.41}\right]$$

$$E\left(Y_f\right) \in \left[233.45, 250.01\right]$$

10-1 سلسلة التمارين :

التمرين رقم 01 : الأسئـلة النظرية :

- تتميز المقدرات المتحصل عليها بواسطة طريقة المربعات الصغرى بأنها أفضل المقدرات الخطية وغير متحيزة.. اشرح ذلك موضحا المقصود بعدم تحيز المقدر.

- ماهي فروض طريقة المربعات الصغرى؟

- إن تقليل مجموع مربعات الخطأ في تحليل الانحدار إنما يعني في نفس الوقت تعظيم القوة التفسيرية للنموذج.

اشرح هذه العبارة مع تحديد المقصود بالتغير الكلي والتغير المفسر والتغير غير المفسر.

- متى يستعمل اختبار $t-STUDENT$ ؟ وما هي خطوات تطبيقه ؟

- متى يكون معامل التحديد ضعيف ؟

تمرين 02 :

قام باحث بتقدير دالة الاستهلاك وتحصل على النتائج التالية:

$$\widehat{C}_i = 15 + 0.8Y_i + e_i$$
$$(3.1) \quad (18.7) \quad n = 19$$

حيث تشير الأرقام التي بين القوسين إلى قيمة إحصائية t المحسوبة.

1- أحسب الانحراف المعياري للمعلمات المقدرة.

2- أوجد مجال الثقة عند مستوى المعنوية 95% لمعامل المتغير المستقل (Y_i) .

(تعطى $t_{n-2}^{\alpha/2} = 2.11$).

تمرين 03:

تحصل باحث من خلال تقدير دالة الدخل على النموذج التالي:

$$\widehat{Y}_i = 21.5 + 0.84C_i + e_i$$
$$(9.4) \quad (0.024) \quad n = 12 \quad R^2 = 0.992$$

حيث تشير الأرقام التي بين القوسين إلى قيمة إحصائية t المحسوبة.

1- فسر النموذج المقدر.

2- اختبر مدى معنوية المعلمات المقدرة (تعطى $t_{n-2}^{\alpha/2} = 2.23$).

3- اختبر مدى معنوية العلاقة الخطية بين Y_i و X_i (تعطى $F_{tab} = 4.10$)

تمرين 04:

لتكن لدينا دالة الاستيراد حث يمثل Y الاستيراد و X الدخل الوطني، والنموذج هو كالتالي:

$$\hat{Y}_i = 200 + 0.5X_i + e_i$$
$$(20) \quad (0.04) \quad n = 20$$

حيث تشير الأرقام التي بين القوسين إلى الانحرافات المعيارية.

1- اختبر معنوية معلمة المتغير المستقل (X) فيما إذا كانت تختلف عن الصفر تحت مستوى المعنوية (0.05) موضحا الفرضية الإحصائية المراد اختبارها.

2- أوجد مجال الثقة عند مستوى المعنوية 95% معلمة المتغير المستقل (X) مع التعليق.

تمرين 05:

لتكن لديك المعطيات المتعلقة بالكمية المطلوبة من سلعة ما (Y) والسعر (X):

$n = 10$ ، $\sum Y_i = 100$ $\sum X_i = 40$ ، $\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = -360$ ، $\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = 520$ ،

$\sum (X_i - \bar{X})^2 = 280$

- أكتب المعادلة الاقتصادية التي تربط العلاقة بين كمية السلعة وسعرها؟ ما الذي ينقص هذه المعادلة ؟

- أوجد المعادلة المقدرة ؟ اشرح المعنى الاقتصادي لمعالم الانحدار المقدرة ؟

- أوجد الانحراف المعياري لكل من تقديرات المعلمات $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0)$؟

- فسر معامل الارتباط $r(X,Y)$؟ أوجد معامل التحديد R^2؟ ماذا تستنتج ؟

- أرسم خط الانحدار المقدر الموافق؟ اختبر معنوية المعالم عند مستوى معنوية **α = 5%** ؟

- ما هو تأثير زيادة السعر بنسبة 10 ٪ على كمية السلعة ؟

تمرين 06:

الجدول التالي يعطى البيانات الخاصة بالكمية المطلوبة من سلعة ما (Y) والسعر (X):

السعر	6	5	4	5	3	7	5
كمية السلعة المطلوبة	8	7	9	10	6	5	11

المطلوب:

- تقدير دالة الطلب على السلعة.
- اختبار معنوية معلمات مقدرات دالة الطلب عند المستوى 0.05.
- حساب معامل التحديد مع التفسير.
- تكوين جدول تحليل التباين واختبار معنوية العلاقة الخطية للانحدار عند المستوى 0.05.
- حساب معامل الارتباط واختبار معنويته عند المستوى 0.05.

التمرين رقم 07 :

نقترح عليك دراسة مقارنة بين سلوك استهلاك عائلات المستخدمين وعائلات العمال فيما يخص نفقات الكسوة ونفقات العطل بعد إجراء سبر الآراء حول مداخيل 36 عائلة تحصلنا على النتائج التالية :

نـــوع العائـــلة	الكســـــوة	العطـــل
العمـــــال	$\hat{\beta}_1 = 1.38$ $\sigma_{\hat{\beta}_1} = 0.2$	$\hat{\beta}_1 = 1.49$ $\sigma_{\hat{\beta}_1} = 0.2$
المستخـــــدمين	$\hat{\beta}_1' = 1.15$ $\sigma_{\hat{\beta}_1} = 0.09$	$\hat{\beta}_1' = 2.17$ $\sigma_{\hat{\beta}_1} = 0.15$

المطـلوب :

* قارن بين نفقات الكسوة بالنسبة للعائلتين ؟

* قارن بين نفقات العطل بالنسبة للعائلتين ؟

الفصل الثاني : تحليل الانحدار الخطي العام

1-2 تمهيـد:

في الواقع الاقتصادي لا يمكن الاستعانة بالنموذج ذي متغيرين لتحليل الظاهرة الاقتصادية، حيث هذه الأخيرة لا تفسر فقط بمحدد واحد وإنما ينبغي إدماج جميع المحددات أو العوامل المؤثرة في الظاهرة لكي تكون الدراسة أكثر شمولية.

في هذه الحالات فإن الانحدار الخطي المتعدد للمتغير التابع (Y)على أكثر من واحد من المتغيرات التفسيرية$X_1, X_2,...,...,X_k$ قد ينجح في تقديم تفسير لنسبة كبيرة من تغير المتغير التابع، لذا فهو يستخدم في التنبؤ بتغيرات المتغير التابع الذي يؤثر فيه عدة متغيرات مستقلة أي تعتمد فكرته على العلاقات الدلالية التي تستخدم ما يعرف بشكل التشتت أو الانتشار.

ويعتمد الانحدار الخطي المتعدد على المصفوفات للتعامل مع العمليات الحسابية المعقدة المترتبة على ذلك، كما يستند النموذج الخطي المتعدد على افتراض وجود علاقة خطية بين متغير تابع Y_i وعدد من المتغيرات المستقلة $X_1, X_2,...,...,X_k$ وحد عشوائي ε_i، ويعبر عن هذه العلاقة بالنسبة لـ n من المشاهدات وk من المتغيرات المستقلة بالشكل الأتي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + ... + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i, \quad i = 1,......, n.................(1)$$

المتغيرات $X_1, X_2,...,...,X_k$ تسمى المتغيرات المفسرة أو المستقلة للمتغير التابع Y_i وما يجب ملاحظته أن المتغير التابع مشروح من طرف k متغير مفسر ولا يمكن لهذه الأخيرة أن تفسر Y بشكل تام، لأنه لا يمكننا في غالب الأحيان حصر جميع الظواهر المؤثر على Y (بعض الظواهر غير قابلة للتكميم)، لذا يدرج حد الخطأ ε_iالذي يتضمن كل المعلومات التي لا تقدمها المتغيرات المفسرة ونفترض عادة بأن المتغيرات المستقلة كلما أخذت بعين الاعتبار كلما كانت المعلومات التي يقدمها الخطأ العشوائي مهملة.

لكن في الواقع، إن هذه المعادلة هي واحدة من جملة معادلات يبلغ عددها (n) تكون نظام المعادلات الأتي :

$$i=1: Y_1=\beta_0+\beta_1 X_{11}+\beta_2 X_{12}+.....+\beta_k X_{1k}+\varepsilon_1$$
$$i=2: Y_2=\beta_0+\beta_1 X_{21}+\beta_2 X_{22}+.....+\beta_k X_{2k}+\varepsilon_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$i=n: Y_n=\beta_0+\beta_1 X_{n1}+\beta_2 X_{n2}+.....+\beta_k X_{nk}+\varepsilon_n$$

هذه المعادلة تتضمن $(k+1)$ من المعلومات المطلوب تقديرها علما بان الحد الأول منها β_0 يمثل الحد الثابت الآمر الذي يتطلب اللجوء إلى المصفوفات والمتجهات لتقدير تلك المعلمات، عليه يمكن صياغة هذه المعادلات في صورة مصفوفات كآلاتي :

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1K} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2K} \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ . \\ B_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad .... \quad (2)$$

وباختصار يمكن كتابة العلاقة السابقة كالآتي:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

Y: متجه عمودي أبعاده $(n\times 1)$ يحتوي مشاهدات المتغير التابع .

X : مصفوفة أبعادها $(n\times k+1)$ تحتوي مشاهدات المتغيرات المستقلة يحتوي عمودها الأول على قيم الواحد الصحيح ليمثل الحد الثابت .

β : متجه عمودي أبعاده $(k+1\times 1)$ يحتوي على المعالم المطلوب تقديرها .

ε: متجه عمودي أبعاده $(n\times 1)$ يحتوي على الأخطاء العشوائية .

وبما أن المعادلة (1) هي العلاقة الحقيقية المجهولة والمراد تقديرها باستخدام الإحصاءات المتوفرة عن المتغير التابع Y والمتغيرات المستقلة $X_1, X_2 ..., ..., X_k$ ، فإنه يستوجب تحقق الفروض الأساسية الخاصة ب ε_i التالية :

2-2 الفرضيات التي يقوم عليها نموذج الانحدار الخطي المتعدد:

- الفرضية الأولى$(H.1)$: تأخذ علاقة النموذج الخطي المتعدد الصيغة التالية:

$$Y_i=\beta_0+\beta_1 X_{i1}+\beta_2 X_{i2}+...+\beta_k X_{ik}+\varepsilon_i, \quad i=1,......., n$$

- الفرضية الثانية $(H.2)$: ε_i يتوزع توزيعا طبيعيا متعدد المتغيرات.

- الفرضية الثالثة $(H.3)$: القيمة المتوقعة لمتجه حد الخطأ تساوي صفرا أي أن: $E(\varepsilon_i)=0$

$$E(\varepsilon_i) = E\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ .\\ \varepsilon_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E(\varepsilon_1)\\ E(\varepsilon_2)\\ .\\ E(\varepsilon_n)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ .\\ 0\end{bmatrix}$$

- الفرضية الرابعة $(H.4)$: تباين العناصر العشوائية ثابت، والتباين المشترك بينها يساوي صفرا أي أن:

$$\begin{cases}\operatorname{var}(\varepsilon_i) = \sigma^2, & \forall i = 1........n\\ \operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, & \forall i \neq j\end{cases}$$

$$E(\varepsilon\varepsilon') = E\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ .\\ \varepsilon_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon 2 & ... & \varepsilon_n\end{bmatrix}$$

$$= E\begin{bmatrix}\varepsilon_1^2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & ... & \varepsilon_1\varepsilon_n\\ \varepsilon_2\varepsilon_1 & \varepsilon_2^2 & ... & \varepsilon_2\varepsilon_n\\ . & . & . & .\\ \varepsilon_n\varepsilon_1 & \varepsilon_n\varepsilon_2 & ... & \varepsilon_n^2\end{bmatrix}$$

$$E(\varepsilon'\varepsilon) = \begin{bmatrix}E(\varepsilon_1^2) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & .... & E(\varepsilon_1\varepsilon_n)\\ E(\varepsilon_2\varepsilon_1) & E(\varepsilon_2^2) & .... & E(\varepsilon_2\varepsilon_n)\\ . & . & ..... & .\\ E(\varepsilon_n\varepsilon_1) & E(\varepsilon_n\varepsilon_2) & .... & E(\varepsilon_n^2)\end{bmatrix}$$

$$E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{bmatrix}\operatorname{var}(\varepsilon_1) & Cov(\varepsilon_1\varepsilon_2) & .... & Cov(\varepsilon_1\varepsilon_n)\\ Cov(\varepsilon_2\varepsilon_1) & Var(\varepsilon_2) & .... & Cov(\varepsilon_2\varepsilon_n)\\ . & . & .... & .\\ Cov(\varepsilon_n\varepsilon_1) & Cov(\varepsilon_n\varepsilon_2) & .... & Var(\varepsilon_n)\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\operatorname{var}(\varepsilon_i) = E(\varepsilon^2{}_i) = \sigma^2\\ \operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, & \forall i \neq j\end{cases}$$

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{pmatrix}\sigma_\varepsilon^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_\varepsilon^2\end{pmatrix}$$

حيث أن: $\sigma_1{}^2 = \sigma^2{}_2 = \sigma^2 = ...\sigma^2{}_n$

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \sigma_\varepsilon^2 I_n$$

وتسمى المصفوفة العددية أعلاه بمصفوفة التباين والتباين المشترك " Variance –Covariance Matrix" لحد الخطأ ε_i، حيث تشكل العناصر القطرية في المصفوفة تباين قيم ε_i، بينما تبقى العناصر غير القطرية (أعلى وأسفل القطر) مساوية للصفر لانعدام التباين المشترك والترابط بين قيم ε_i .

ويمكن تلخيص الفرضيات السابقة رياضيا كما يلي: $\varepsilon_i \sim N\left(0, \sigma^2 I_n\right)$

- الفرضية الخامسة $(H.5)$: ليس هناك علاقة خطية تامة بين المتغيرات المستقلة كما أن عدد المشاهدات يجب أن يزيد على عدد المعلمات المطلوب تقديرها أي أن : $\rho(X) = K+1 \prec n$

حيث أن ρ رتبة مصفوفة البيانات و X عدد المتغيرات المستقلة $K+1$، وهي أصغر من عدد المشاهدات (n)، وهذه الفرضية ضرورية جدا لضمان أيجاد معكوس المصفوفة $(X'X)$ إذ أن عدم توفر هذا الفرض يجعل رتبة المصفوفة (X) اقل من $K+1$ وبالتالي فان رتبة $(X'X)$ التي تستخدم في الحصول على مقدرات OLS بدورها اقل من $K+1$ ولا يمكن إيجاد معكوسا لها بسبب ما يسمى بمشكل الارتباط الخطي المتعدد، وبالتالي لا يمكن الحصول على مقدرات المربعات الصغرى العادية (OLS).

- الفرضية السادسة $(H.6)$: (X) مصفوفة غير عشوائية وثابتة، وتعني بأن قيم المتغيرات المستقلة يمكن مراقبتها، وبالإضافة إلى ذلك نفترض أن المصفوفة (X) ثابتة لضمان بأن قيم المتغيرات المستقلة لا تتغير، المصدر الوحيد للتغير هنا هو شعاع الخطأ العشوائي (ε)وهذا ما يؤثر على الشعاع (Y) أي ; $\text{cov}(X, \varepsilon) = E(X'\varepsilon) = 0$

2-3 تقدير شعاع المعالم $\hat{\beta}$:

في ضوء الفرضيات المذكورة أعلاه يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى(OLS) وذلك بإتباع نفس خطوات التقدير التي رأيناها في النموذج الخطي البسيط نستطيع تقدير النموذج الخطي المتعدد باستعمال طريقتي المعادلات الطبيعية وجبر المصفوفات كالآتي:

2-3-1 طريقة المعادلات الطبيعية:

في مثل هذه تكون طريقة المعادلات الطبيعية غير عملية، فهي تتطلب وقتا طويلا لإيجاد صيغة مقدرات النموذج، زيادة على ذلك فإن هذه الصيغ تحتاج إلى عمليات حسابية معقدة.

في حالة وجود متغيرين مستقلين فقط وهي أبسط حالة لنموذج الانحدار المتعدد تكون صيغة النموذج كما يلي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \varepsilon_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

النموذج المقدر هو:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + e_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

حيث أن: $\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0$ هي مقدرات $\beta_2, \beta_1, \beta_0$ على الترتيب و e_i مقدر ε_i .

الهدف من هذه الطريقة هو إيجاد تقدير للشعاع β الذي يُصَغِّر مجموع مربعات الانحراف $\hat{\varepsilon}_i$ بين القيمة المقدرة $\hat{Y}$ والقيمة الحقيقية Y أي:

$$Min \sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2 = Min \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2$$

$$\hat{\varepsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i \qquad i = 1 \ldots\ldots n$$

ومن خلال التعويض عن $\hat{Y}_i$ بما يساويها وأخذ المشتقات الجزئية بالنسبة إلى $\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0$ ومساواتها بالصفر نحصل على :

الشرط اللازم لتدنئة قيمة $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ هو أن تكون المشتقات الجزئية بالنسبة لـ $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0$ معدومة أي:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \hat{\beta}_0} \sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_{2i}\right)^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 3 \\ \dfrac{\partial}{\partial \hat{\beta}_1} \sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_{2i}\right)^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 4 \\ \dfrac{\partial}{\partial \hat{\beta}_2} \sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i}\right)^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 5 \end{cases}$$

$$3 \Rightarrow \ -2\sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \ \sum_i Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_{1i} + \hat{\beta}_2 . \sum X_{2i} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6$$

المعادلة رقم: (6) تعبر عن ما يسمى بالمعادلة الطبيعية الأولى.

$$4 \Rightarrow \ -2\sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i}\right)^2 (X_{1i}) = 0$$

$$\sum_i (Y_i X_{1i}) = \hat{\beta}_0 \sum_i X_{1i} + \hat{\beta}_1 \sum_i X_{1i}^{\ 2} + \hat{\beta}_2 \sum X_{1i} X_{2i} \ldots\ldots\ldots 7$$

المعادلة رقم: (7) تعبر عن ما يسمى بالمعادلة الطبيعية الثانية.

$$5 \Rightarrow \ -2\sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i}\right)^2 (X_{2i}) = 0$$

$$\sum_i (Y_i X_{2i}) = \hat{\beta}_0 \sum_i X_{2i} + \hat{\beta}_1 \sum_i X_{1i} X_{2i} + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i}^{\ 2} \ldots\ldots\ldots 8$$

المعادلة رقم: (8) تعبر عن ما يسمى بالمعادلة الطبيعية الثالثة.

وتمثل المعادلات (6) و (7) و (8) المعادلات الطبيعية الثلاث التي تستخدم في تقدير المعالم الثلاثة المجهولة $\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0$ وهذه المعادلات يمكن حلها بإحدى الطرق الآتية :

2-3-2 طريقة المحددات :

يمكن أن تحل هذه المعادلات بواسطة قاعدة كرايمر للحصول على قيم $\hat{\beta}_K$من المعلمات وعلى النحو الآتي :

$$\sum_i Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_{1i} + \hat{\beta}_2 . \sum X_{2i} .$$

$$\sum_i (Y_i X_{1i}) = \hat{\beta}_0 \sum_i X_{1i} + \hat{\beta}_1 \sum_i X_{1i}^{\ 2} + \hat{\beta}_2 \sum X_{1i} X_{2i}$$

$$\sum_i (Y_i X_{2i}) = \hat{\beta}_0 \sum_i X_{2i} + \hat{\beta}_1 \sum_i X_{1i} X_{2i} + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i}{}^2$$

$$\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum Y_i X_{1i} \\ \sum Y_i X_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i} X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i} X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{bmatrix}$$

ومن النظام أعلاه، يمكن أيجاد المحددات الآتية :

$$|D| = \begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} Y_i & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i} X_{2i} \\ \sum X_{2i} Y_i & \sum X_{1i} X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}$$

$$|N1| = \begin{vmatrix} n & \sum Y_1 & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i} Y_i & \sum X_{1i} X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{2i} Y_i & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}$$

$$|N2| = \begin{vmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum Y_i \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i} Y_i \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i} X_{2i} & \sum X_{2i} Y_i \end{vmatrix}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{|N_1|}{|D|} = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum Y_i & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i} Y_i & \sum X_{1i} X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{i2i} Y_i & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} Y_i & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i} X_{2i} \\ \sum X_{2i} Y_i & \sum X_{1i} X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{|N_2|}{|D|} = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum Y_i \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i} Y_i & \sum X_{1i} X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{i2i} Y_i & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} Y_i & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i} X_{2i} \\ \sum X_{2i} Y_i & \sum X_{1i} X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}}$$

أما بالنسبة ل $\hat{\beta}_0$ فيتم الحصول عليه عن طريق : $\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2$

3-3-2 طريقة المصفوفات :

تهدف هذه الطريقة إلى إيجاد تقدير للشعاع β الذي يُصَغِّر مجموع مربعات الانحراف $\hat{\varepsilon}_i$ بين القيمة المقدرة $\hat{Y}$ والقيمة الحقيقية Y.

$$Min\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2 = Min\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)^2$$

$$\hat{\varepsilon}_i = Y_i-\hat{Y}_i \qquad i=1.......n \qquad \Rightarrow \quad e = Y-\hat{Y} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

$$Min\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)^2 = Min\left(Y-\hat{Y}\right)'\left(Y-\hat{Y}\right) = Min\, e'e$$

$$Min(e'e) = \left(Y-\hat{Y}\right)'\left(Y-\hat{Y}\right) = \hat{Y}'\hat{Y} - 2\hat{Y}'Y + Y'Y = \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} - 2\hat{\beta}'X'Y + Y'Y$$

للحصول على النهاية الصغرى فيجب أن يحقق الشرط الضروري:

$$\frac{\partial \sum e_i^{\,2}}{\partial \hat{\beta}'} = 0 \Leftrightarrow 2(X'X)\hat{\beta} - 2X'Y = 0$$

وبما أن رتبة (X) هي $k+1$ فإن : $(X'X)$ مصفوفة مربعة $((k+1)\times(k+1))$ رتبتها $k+1$ وتقبل معكوس $(X'X)^{-1}$.

ومنه: $2(X'X)\hat{\beta} - 2X'Y = 0 \quad \Rightarrow (X'X)\hat{\beta} - X'Y = 0$

نضرب طرفي المعادلة بـ $(X'X)^{-1}$ لنحصل على : $\boxed{\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y}$ وهو تقدير لـ β.

وللتأكد من أن $\hat{\beta}$ المتحصل عليه هو قيمة دنيا لـ $\sum e_i^{\,2}$، يجب تحقيق الشرط من الدرجة الثانية:

$$\frac{\partial^2 \sum e_i^{\,2}}{\partial \hat{\beta}'\partial \hat{\beta}} = (X'X) > 0$$ وهي مصفوفة موجبة معرفة ومنه فإن $\hat{\beta}$ هو نهاية صغرى.

المصفوفة $(X'X)$ هي على الشكل التالي:

$$(X'X) = \begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} & \ldots & \sum X_{ki} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^{\,2} & \sum X_{1i}X_{2i} & \ldots & \sum X_{1i}X_{ki} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \sum X_{ki} & \sum X_{ki}X_{1i} & \sum X_{ki}X_{2i} & \ldots & \sum X_{ki}^{\,2} \end{bmatrix}$$

المصفوفة $(X'Y)$ **هي على الشكل التالي:**

$$(X'Y)=\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum Y_i X_{1i} \\ \sum Y_i X_{2i} \\ \dots\dots\dots \\ \sum Y_i X_{ki} \end{bmatrix}$$

2-3-4 طريقة الانحرافات :

يمكن تقدير معاملا الانحدار المتعدد باستخدام طريقة الانحرافات أو ما يسمى بالمتوسطات، أي انحرافات القيم الأصلية عن وسطها الحسابي كالآتي:

$$y_i = \left(Y_i - \overline{Y}\right)$$

$$x_{1i} = \left(X_{1i} - \overline{X}_1\right)$$

$$x_{2i} = \left(X_{2i} - \overline{X}_2\right)$$

إذن تصبح معادلة الانحدار بالمعطيات المركزة بالشكل الآتي:

$$Y_i = \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \varepsilon_i \dots\dots\dots\dots 1$$

نلاحظ من هذه المعادلة أن الحد الثابت لا يوجد .

وفي واقع الآمر فإن هذه المعادلة هي واحدة من جملة معادلات يبلغ عددها (n) تكون نظام المعادلات الآتي :

$$\begin{aligned} i=1: Y_1 &= \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{12} + \dots\dots + \beta_k X_{1k} + \varepsilon_1 \\ i=2: Y_2 &= \beta_1 X_{21} + \beta_2 X_{22} + \dots\dots + \beta_k X_{2k} + \varepsilon_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ i=n: Y_n &= \beta_1 X_{n1} + \beta_2 X_{n2} + \dots\dots + \beta_k X_{nk} + \varepsilon_n \end{aligned}$$

هذه المعادلة تتضمن $(k+1)$ من المعلومات المطلوب تقديرها علما بان الحد الأول منها β_0 يمثل الحد الثابت الأمر الذي يتطلب اللجوء إلى المصفوفات والمتجهات لتقدير تلك المعلمات، عليه يمكن صياغة هذه المعادلات في صورة مصفوفات كآلاتي :

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1K} \\ & X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2K} \\ . & . & . & \dots & . \\ & X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ B_1 \\ . \\ B_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad .... \quad (2)$$

وباختصار يمكن كتابة العلاقة السابقة كالآتي:

$$y = x\beta + \varepsilon$$

Y: متجه عمودي أبعاده $(n\times 1)$ يحتوي مشاهدات المتغير التابع .

X : مصفوفة أبعادها $(n\times k)$ تحتوي مشاهدات المتغيرات المستقلة لا يحتوي عمودها الأول على قيم الواحد الصحيح لأنه لا يوجد الحد الثابت .

β : متجه عمودي أبعاده $(k\times 1)$ يحتوي على المعالم المطلوب تقديرها .

ε: متجه عمودي أبعاده $(n\times 1)$ يحتوي على الأخطاء العشوائية .

مثلا يمكننا ببساطة إيجاد $\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1$ كالآتي:

لدينا :

$$\begin{aligned} &Min\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2 = Min\sum_{i=1}^{n}(y_i - \ddot{y}_i)^2 \\ &\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i \qquad i = 1.......n \\ &Min\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = Min(y-\hat{y})'(y-\hat{y}) = Min\, e'e \end{aligned} \qquad \Rightarrow \quad e = y - \hat{y} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

$$Min(e'e) = (y-\hat{y})'(y-\hat{y}) = \hat{y}'\hat{y} - 2\hat{y}'y + y'y = \hat{\beta}'x'x\hat{\beta} - 2\hat{\beta}'x'y + y'y$$

للحصول على النهاية الصغرى فيجب أن يحقق الشرط الضروري:

$$\frac{\partial \sum e_i^{\,2}}{\partial \hat{\beta}^{'}} = 0 \Leftrightarrow 2(x'x)\hat{\beta} - 2x'y = 0$$

وبما أن رتبة (X) هي k فإن : $(x'x)$مصفوفة مربعة $((k)\times(k))$ رتبتها kوتقبل معكوس $(x'x)^{-1}$.

ومنه: $\quad 2(x'x)\hat{\beta} - 2x'y = 0 \quad \Rightarrow (x'x)\hat{\beta} - x'y = 0$

نضرب طرفي المعادلة بـ $(x'x)^{-1}$ لنحصل على : $\hat{\beta} = (x'x)^{-1}x'y$ وهو تقدير لـ β .

المصفوفة $(x'x)$ بالانحرافات هي على الشكل التالي:

$$(x'x) = \begin{bmatrix} \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i}x_{2i} & \dots & \sum x_{1i}x_{ki} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \sum x_{ki}x_{1i} & \sum x_{ki}x_{2i} & \dots & \sum x_{ki}^2 \end{bmatrix}$$

المصفوفة $(x'y)$ بالانحرافات هي على الشكل التالي:

$$(x'y) = \begin{bmatrix} \sum x_{1i}y_i \\ \sum x_{2i}y_i \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sum x_{ki}y_i \end{bmatrix}$$

4-2 الخصائص الإحصائية للمعالم المقدرة:

1-4-2 التوقع:

لدينا: $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y\dots\dots\dots\dots.01$

و أيضا : $Y = X\beta + \varepsilon$

بتعويض قيمة Y في المعادلة 01 نجد:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'[X\beta + \varepsilon] = (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon \Rightarrow \hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

$$\hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.02$$

بإدخال التوقع الرياضي :

$$E(\hat{\beta}) = \beta + (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon) \quad / \quad E(\varepsilon) = 0$$

نتحصل على: $E(\hat{\beta}) = \beta$

نستنتج أن $\hat{\beta}$ المحصل عليه بطريقة المربعات الصغرى مقدرة غير متحيزة،بالإضافة إلى ذلك فإن $\hat{\beta}$ هو التقدير الأفضل من ضمن كل التقديرات الخطية غير المتحيزة لـ β (BLUE).

2-4-2 تباين المقدرات:

لدينا:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = E\left[(\hat{\beta}-\beta)\left(\hat{\beta}-\beta\right)'\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 03$$

من المعادلة رقم 02 نجد:

$$\hat{\beta}-\beta = (X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

نعوض $\hat{\beta}-\beta =$ في المعادلة رقم 03 نجد:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = E\left[\left((X'X)^{-1}X'\varepsilon\right)\left((X'X)^{-1}X'\varepsilon\right)'\right]$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = E\left[\left(X'X'\right)X'\varepsilon\varepsilon'X\left(X'X\right)^{-1}\right]$$

بإدخال التوقع الرياضي :

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \left[\left(X'X'\right)X'E(\varepsilon\varepsilon')X\left(X'X\right)^{-1}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 04$$

لدينا :

$$\Omega_{\varepsilon} = E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma_{\varepsilon}^{2} I_n$$

بتعويض هذه العلاقة في المعادلة رقم : 04 نجد:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \left[\left(X'X'\right)X'\sigma^{2}{}_{\varepsilon} I_n X\left(X'X\right)^{-1}\right]$$

نتحصل على:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_{\varepsilon}^{2}\left(X'X\right)^{-1}$$

حيث σ_{ε}^{2}: تباين الحد العشوائي.

وتسمى المصفوفة العددية أعلاه بمصفوفة التباين والتباين المشترك "Variance -CovarianceMatrix" للمعالم المقدرة، حيث تشكل العناصر القطرية في المصفوفة تباين المعالم المقدرة ، بينما العناصر غير القطرية (أعلى وأسفل القطر) التباين المشترك والترابط بين أي إثنين من هاته المعالم المقدرة.

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \mathrm{var}(\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1) & \ldots. & Cov\left(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_K\right) \\ Cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_0) & Var(\hat{\beta}_1) & \ldots. & Cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_K) \\ . & . & \ldots. & . \\ Cov(\hat{\beta}_K\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_K\hat{\beta}_1) & \ldots. & Var(\hat{\beta}_K) \end{bmatrix}$$

$$Var(\hat{\beta}) = diag\Omega_{\hat{\beta}}$$

$$Var(\hat{\beta}) = diag\sigma_{\varepsilon}^{2}(X'X)^{-1}$$

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma_{\varepsilon}{}^{2} diag(X'X)^{-1}$$

وبالتالي فإن **تباين** أي عنصر من عناصر $\hat{\beta}$ هو عبارة عن حاصل ضرب قيمة $\sigma_{\varepsilon}{}^{2}$ بما يقابلها من العناصر الواقعة على قطر المصفوفة $(X'X)^{-1}$، كما أن قيمة **التباين المشترك** بين أي اثنين من عناصر $\hat{\beta}$ هو عبارة عن حاصل ضرب $\sigma_{\varepsilon}{}^{2}$ بالعنصر المقابل لها والواقع خارج نطاق القطر للمصفوفة $(X'X)^{-1}$.

تباين المقدرات باستخدام المعطيات المركزة:

يمكننا إيجاد مصفوفة التباين والتباين المشترك باستخدام المعطيات المركزة كما يلي:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_{\varepsilon}^{2}(x'x)^{-1}$$

إذا كان لدينا متغيرتين مستقلتين في النموذج فإن $\Omega_{\hat{\beta}}$ تكتب على الشكل التالي:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_{\varepsilon}{}^{2}\begin{bmatrix} \sum x_{1i}{}^{2} & \sum x_{1i}x_{2i} \\ \sum x_{1i}x_{2i} & \sum x_{2i}{}^{2} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} \begin{bmatrix} \mathrm{var}(\hat{\beta}_1) & Cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2) \\ Cov(\hat{\beta}_2\hat{\beta}_1) & Var(\hat{\beta}_2) \end{bmatrix} =$$

نلاحظ من مصفوفة التباين والتباين المشترك للمقدرات بالانحرافات أنها لا تتضمن تباين الحد الثابت

$Var(\hat{\beta}_0)$ كما أنها لا تتضمن التباين المشترك للحد الثابت مع أي ميل حدي $Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_i)\ i = 1,2,$

كما نستطيع أن نستخرج تباين الحد الثابت بكل سهولة من العلاقة الآتية:

$$Var(\hat{\beta}_0) = \sigma_{e}^{2}\left[\overline{X}'(x'x)^{-1}\overline{X} + \frac{1}{n}\right]$$

$\bar{X}'$ منقول مصفوفة المتوسطات الحسابية في حالة متغيرتين مستقلتين: $\bar{X}'=\left(\bar{X}_1,\bar{X}_2\right)$ و $\bar{X}=\begin{pmatrix}\bar{X}_1\\ \bar{X}_2\end{pmatrix}$

5-2 تقدير تباين الأخطاء $\left(\sigma_\varepsilon^2\right)$:

إحدى فرضيات النموذج هي $E(\varepsilon\varepsilon')=\Omega_\varepsilon=\sigma^2 I_n$ وبما أن σ^2غير معروف، فينبغي تقديره:

$$\hat{\varepsilon}=Y-X\hat{\beta}=X\beta+\varepsilon-X\hat{\beta}=\varepsilon-X(\hat{\beta}-\beta)=\varepsilon-X(X'X)^{-1}X'\varepsilon=(I_n-X(X'X)^{-1}X')\varepsilon$$

نضع : $M_X=(I_n-X(X'X)^{-1}X')$

حيث M_X *تسمى المصفوفة الدورية* أي :

$$M_X=M_X'M_X=M_X^2=M'$$

بالإضافة إلى ذلك : $M_X X=0$

ومنه:

$$e'e=e'M_X'M_X e$$

أي :

$$e'e=e'M_X e$$

ندخل التوقع الرياضي على الطرفين : $E(e'e)=E(e'M_X e)$

ويجب الملاحظة أن أثر $e'e$يساوي أثر $e'Me$، ونعلم أيضا أن أثر (AB)=أثر (BA).

يكون لدينا إذن : أثر $(e'Me)$=أثر $(ee'M)$

$$E(ee')=E(ee')Tr(M_X)$$

نعلم أن: $E(ee')=\sigma^2$ وعليه: $E(ee')=\sigma^2\{Tr(I_n)-Tr(X(X'X)^{-1}X')\}$

ومنه : $E(e'e)=\sigma^2(n-k-1)$

حيث : $Tr(I_n)=n$; $Tr(X(X'X)^{-1}X')=k+1$

لكي نحصل على تقدير غير متحيز لـ σ^2 يكفي قسمة العبارة على $(n-k-1)$:

$$E\left(\frac{e'e}{n-k-1}\right)=\sigma^2$$

في حالة الانحدار المتعدد حيث هناك $k+1$ معلم للتقدير و n عدد المشاهدات، وهذا يُعطي عدد درجات الحرية $n-k-1$، إذن :

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-k-1}$$

6-2 اختبار جودة التوفيق والارتباط:

عندما يكون لدينا أكثر من متغير مستقل في نموذج الانحدار الخطي، ننتقل من معامل التحديد العادي (معامل التحديد البسيط) إلى معامل التحديد المضاعف.

1-6-2 معامل التحديد المضاعف R^2 : Multiple Coefficient of determination

على عكس معامل التحديد العادي الذي يقيس العلاقة بين متغير مستقل وآخر تابع، فإن ماعامل التحديد المضاف ويعد مؤشر أساس في تقييم مدى معنوية العلاقة بين المتغير التابع (Y) والمتغيرات المستقلة (X_k) حيث : $(k=1,2,3.......k)$ ، بعبارة أخرى هو مقياس يوضح نسبة مساهمة المتغيرات المستقلة في تفسير التغير الحاصل في المتغير التابع . ويمكن اشتقاقه باستخدام المصفوفات بالانحرافات كالأتي:

$$y = x\hat{\beta} + e$$
$$e = y - \hat{\beta}$$
$$e'e = (y - x\hat{\beta})'(y - x\hat{\beta})$$
$$e'e = y'y - y'x\hat{\beta} - \hat{\beta}'x'y + \hat{\beta}'x'x\hat{\beta}$$

وبما أن التحديد الثاني الثالث قيمة واحدة كما وان كلا منها يمثل مبدلا للآخر فان :

$$e'e = y'y - 2\hat{\beta}'x'y + \hat{\beta}'x'x\hat{\beta}$$
$$\hat{\beta} = (x'x)^{-1}x'y$$
$$(x'x)\hat{\beta} = x'y$$
$$e'e = y'y - 2\hat{\beta}'x'y + \hat{\beta}'x'y$$
$$e'e = y'y - \hat{\beta}'x'y$$

بذلك يمكن كتابة معادلة الانحرافات الكلية كآلاتي :

$$y'y = \hat{\beta}x'y - e'e$$

حيث:

$y'y$: تمثل الانحرافات الكلية .

$\hat{\beta}'x'y$: تمثل الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار .

$e'e$: تمثلا الانحرافات غير الموضحة .

وبما أن معامل التحديد R^2عبارة عن نسبة الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار إلى الانحرافات الكلية (Total variation) ، فانه يمثل نسبة مجموع مربعات التغير في المتغيرات المستقلة إلى مجموع المربعات الكلية:

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}'x'y}{y'y} = \frac{\hat{\beta}'x'y}{\sum y^2}$$

حيث : $y_i = Y_i - \overline{Y} \quad , \quad x_i = X_i - \overline{X} \qquad \forall i = 1......n$

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}_1 \sum x_{1i} y_i + \hat{\beta}_2 \sum x_{2i} y_i + ... + \hat{\beta}_k \sum x_{ki} y_i}{\sum y_i^2}$$

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}'X'Y - n\overline{Y}^2}{Y'Y - n\overline{Y}^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{e'e}{Y'Y - n\overline{Y}^2}$$

إن الصعوبات في استعمال R^2 كمقياس لجودة التوفيق راجعة لأن هذا المعامل يعتمد على التغيرات الحاصلة في Y (المشروحة وغير المشروحة)، وبالتالي فإنه لا يأخذ بعين الاعتبار عدد درجات الحرية في أي مشكل إحصائي، ولهذا الغرض يستعمل معامل آخر يسمى معامل التحديد المعدل أو المصحح $\overline{R}^2$ والمعطى على النحو الآتي:

$$\overline{R}^2 = \left[1 - \left(\frac{SCR}{SCT}\right)\frac{N-K-1}{n-1}\right]$$

$$\overline{R}^2 = \left[1 - \left(1 - R^2\right)\frac{n-1}{n-k-1}\right]$$

نلاحظ أن:

$k>1$ إذا كانت $R^2 \geq \bar{R}^2$

إذا كان حجم العينة n كبيرا، فإن R^2 و $\bar{R}^2$ يقتربان قي قيمتهما، لكن في العينات الصغيرة، إذا كان عدد المتغيرات المستقلة كبيرا بالمقارنة مع حجم العينة، فإن $\bar{R}^2$ يقل بكثير على R^2، ويمكن أن يأخذ قيما سالبة، في هذه الحالة يجب شرحه على أساس أن قيمته تساوي الصفر.

إن $\bar{R}^2$ له مجموعة من الخصائص تجعله وسيلة قياس جودة التوفيق أفضل من R^2، فهو على الأقل يجيب على تساؤلات بعض الباحثين حول أهمية زيادة عدد المتغيرات للنموذج، بدون التفكير في سبب ظهور هذه المتغيرات على كل حال، رغم ذلك لا يجب التفكير في أن $\bar{R}^2$ يحل كل المشاكل المتعلقة بالمقياس R^2 لجودة التوفيق، حيث أن القرار حول إمكانية ظهور بعض المتغيرات في النموذج أم لا، تبقى معتمدة على اعتبارات نظرية أخرى في القياس الاقتصادي، كما أن القيمة العددية لـ $\bar{R}^2$ تكون جد حساسة لنوع المعطيات أو البيانات المستعملة.

2-6-2 معامل الارتباط الجزئي:Partial Correlation

في بعض الظواهر والدراسات يوجد هناك عدد من المتغيرات (ثلاثة فأكثر) مرتبطة بعلاقة رياضية فيما بينها مثل: إنفاق أسرة يكون مرتبط بدخلها الشهري و عدد افرداها وكذلك حجم مبيعات سلعة معينة يرتبط بسعرها وحجم الدعاية لها وكذلك الفترة الزمنية للبيع ففي هذه الحالة، ولغرض حساب معامل الارتباط بين متغيرين اثنين في دراسة معينة مع وجود متغيرات أخرى نلجأ إلى حساب ما يسمى بالارتباط الجزئي .

الارتباط الجزئي هو: العلاقة الرياضية الصافية بين متغيرين اثنين فقط مع وجود متغيرات أخرى قيد الدراسة ويمكن حساب هذه العلاقة الرياضية من خلال معامل الارتباط الجزئي.

إن الفرق بينه وبين معامل الارتباط البسيط هو أن معامل بيرسون يستخرج العلاقة بين متغيرين اثنين لأي ظاهرة بدون يأخذ بنظر الاعتبار وجود متغيرات أخرى تؤثر في الظاهرة أو لا ، بينما معامل الارتباط الجزئي لا يأخذ بنظر الاعتبار وجود متغيرات أخرى تؤثر في الظاهرة فحسب وإنما يقوم باستبعاد أثرها لكي يستخرج الارتباط الصافي بين أي متغيرين.

1-2-6-2 معامل الارتباط الجزئي

ليكن لدينا نموذج انحدار متكون من متغيرتين مستقلتين كالاتي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$$

- **معامل الارتباط الجزئي بين (X_1, Y):**

$r_{(Y,x_1)}(X_2) = \dfrac{r_{YX1} - r_{YX2} r_{X1X2}}{\sqrt{(1-r^2_{yx2})(1-r^2_{x1x2})}}$ حيث تعني العبارة بين القوسين X_2 تثبيت المتغيرة عند مستواها المتوسط.

r_{YX1} : معامل الارتباط البسيط بين المتغيرتين (Y, X_1).

r_{YX2} : معامل الارتباط البسيط بين المتغيرتين (Y, X_2).

r_{X1X2} : معامل الارتباط البسيط بين المتغيرتين (X_1, X_2).

- **معامل الارتباط الجزئي بين (X_2, Y):**

$r_{(Y,x_2)}(X_1) = \dfrac{r_{YX2} - r_{YX1} r_{X1X2}}{\sqrt{(1-r^2_{yx1})(1-r^2_{x1x2})}}$ حيث تعني العبارة بين القوسين X_2 تثبيت المتغيرة عند مستواها المتوسط.

2-2-6-2 خصائص معامل الارتباط الجزئي:

* إن قيمة معامل الارتباط الجزئي تتراوح بين (1-،1)

* تفسر قيمته كما تفسر قيمة معامل الارتباط البسيط.

* إن معامل الارتباط الجزئي لأي متغيرين تكون إشارته مماثلة لإشارة معامل الارتباط البسيط بينهما.

7-2 اختبار الفرضيات لنموذج الخطي المتعدد :

يهدف هذا العنصر إلى توسيع معارفنا الأساسية لنموذج الانحدار وذلك بإجراء اختبار معنوية الانحدار المتعدد والمقدر باستخدام توزيع اختبار إحصاءه Fومقارنته باختبار t ومن ثم تقييم كفاءة الأداء العام لنموذج الانحدار المتعدد R^2 ومقارنته بمعامل التحديد المقدر المعدل $\bar{R}^2$،

وكذلك اختبار العلاقة بين F و R^2 من خلال جدول تحليل التباين $ANOVA$ ، ثم علاقة R^2 بقيمة المتغير العشوائي $\sum e_i^2$.

3-7-1 اختبار معنوية المعالم (t) :

يستخدم اختبار t لتقييم معنوية تأثير المتغيرات المستقلة $X_1, X_2, ..., ..., X_k$ في المتغير التابع y في يعتمد نموذج الانحدار المتعدد على الفرضتين التاليتين:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_i = 0 & \text{المعلمة ليس لها دلالة معنوية (فرضية العدم)} \\ H_1 : \beta_i \neq 0 & \text{المعلمة لها دلالة معنوية (الفرضية البديلة)} \end{cases}$$

وبعد احتساب قيمة (t) تقارن مع قيمتها الجدولية لتحديد قبول او رفض فرضية العدم ومن ثم تقييم معنوية معلمات النموذج المقدر، والصيغة الرياضية لهذا الاختبار يمكن بيانها كما يلي:

: القيمة المحسوبة. $t_c = \dfrac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}}$

وما دمنا نختبر فرضية العدم وتنص على انعدام β_i فإن قيمة t_c تصبح على الشكل التالي:

$t_c = \dfrac{\hat{\beta}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}}$ ، حيث يتم قبول أو رفض الفرضية H_0 بمستوى معنوية (α%) على أساس مقارنة t_c مع القيمة المجدولة t_t حيث أن : t_t يتم قراءتها من جدول ستودينت كالتالي: $t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}$ حيث أن:

$\dfrac{\alpha}{2}$: مستوى المعنوية و k: عدد المتغيرات المستقلة في نموذج الانحدار الخطي المتعدد المراد دراسته .

إذا كانت $\left|\dfrac{\hat{\beta}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}}\right| \leq t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}$ ففي هذه الحالة المعلمة ليس لها معنوية إحصائية أي يساوي معنويا الصفر .

إذا كانت $\left|\dfrac{\hat{\beta}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}}\right| > t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}$ أي المعلمة لها معنوية إحصائية فهو يختلف معنويا عن الصفر.

ملاحظة: عندما يكون حجم العينة كبيرا ($n > 30$) في هذه الحالة نستعمل التوزيع الطبيعي ويمكن أخذ القيمة الحرجة $z_{\alpha/2}$ و ذلك بحساب المساحة المظللة للتوزيع الطبيعي.

2-7-2 اختبار فيشر F – Statistics :

يمكن اختبار المعنوية الاجمالية للنموذج باستخدام نسبة التباين المفسر، إلى التباين غير المفس، ويتبع هدا التوزيع فيشر F، بدرجة حرية k و n-k-1، حيث n عدد المشاهدات و k+1 عدد المعالم المقدرة، يعتمد الاختبار على الفرضتين التاليتين:

(فرضية العدم) $H_0: \beta_i = \beta_2 = \beta_3 = ...\beta_k = 0$ الانحدار ككل ليس له دلالة معنوية

(الفرضية البديلة) $H_1: \exists$ معامل $\neq 0$ الانحدار ككل له دلالة معنوية

وتكتب الصيغة الرياضية لهذا الاختبار كما يلي:

$$F_c = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \Big/ k}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2 \Big/ (n-k-1)} = \frac{\hat{\beta}'X'Y - n\bar{Y}^2 \big/ k}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2 \Big/ (n-k-1)} \sim F_\alpha(k, n-k-1)$$

$$F_c == \frac{R^2 / k}{(1-R^2)/(n-k-1)} \sim F_\alpha(k, n-k-1)$$

وبعد احتساب قيمة F تقارن مع قيمتها الجدولية بدرجة حرية (k) و $(n-k-1)$ للبسط والمقام ولمستوى معنوية معين .

- عندما تكون $|F_{Cal}| \rangle F_{Tab}$ نرفض فرضية العدم (H_0) ونقبل الفرضية البديلة (H_1) مما يدل على أنه من بين معلمات النموذج يوجد واحد على الأقل يختلف عن الصفر أي أن هناك متغيرا مفسرا له تأثير جوهري على المتغير التابع بمعنى أن معادلة الانحدار المقدرة لها معنوية إحصائيا.
- عندما تكون $|F_{Cal}| \leq F_{Tab}$ نقبل فرضية العدم (H_0)أي جميع المتغيرات التفسيرية لا تمارس أي تأثير على المتغير التابع وتكون معادلة الانحدار المقدرة غير معنوية إحصائيا.

3-7-2 جدول تحليل التباين ANOVA:

من أجل معرفة تأثير كل من (X_1)، (X_2) في المتغير التابع Y، يجب تشكيل جدول تحليل التباين لمعرفة أثر المتغيرين المستقلين (X_1)و (X_2)في النموذج.

جدول تحليل التباين

مصدر التباين	مجموع مربعات الخطأ	درجات الحرية	متوسط مربعات الخطأ	اختبار F
الانحراف الموضح من قبل (X_1) و (X_2) SCE	$\sum\left(\hat{Y}_i-\bar{Y}\right)^2$	k	$\sum\left(\hat{Y}_i-\bar{Y}\right)^2 / k$	$F_c=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2 / k}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2 / (n-k-1)} \sim F_\alpha(k,n-k-1)$
الانحراف غير الموضح SCR	$e'e$	$n-k-1$	$e'e / n-k-1$	
الانحراف الكلي SCT	$\sum\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2$	$n-k$		

4-7-2 قياس حدود الثقة:

يتم تقدير حدود الثقة لمعالم معادلة الانحدار في المجتمع بالاستعانة بالتقديرات المتحصل عليها من العينة والأخطاء المعيارية، وعند مستوى معنوية $(\alpha\%)$ يكون مجال الثقة لكلا المعلمين :

$$\Pr\left[-t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\hat{\beta}_i-\beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}} \le +t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\right]=1-\alpha \qquad i=0,1,\ldots,k$$

و الصيغة الرياضية لتقدير حدود الثقة هي:

الانحراف المعياري المعلمة المقدرة$(t\alpha/2)$ $\pm$ المعلمة المقدرة $=$ معلمة المجتمع أي:

$$\beta_i \in \left[\hat{\beta}_i - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i},\ \hat{\beta}_i + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}\right] \qquad i=0,1,\ldots,k$$

حيث $t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$: القيمة الحرجة لتوزيع *Student* بدرجة حرية $n-2$ و نسبة معنوية $(\alpha\%)$ ونجدها من جدول لتوزيع القيمة المحسوبة.

ملاحظة: في حالة حجم العينة كبيرا $(n>30)$ يجب استعمال التوزيع الطبيعي حيث يمكننا أن نأخذ القيمة الحرجة $z_{\alpha/2}$ و ذلك بحساب المساحة المظلة للتوزيع الطبيعي.

وتصبح العلاقة السابقة كالأتي:

$$\beta_i \in \left[\hat{\beta}_i - z_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}, \hat{\beta}_i + z_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}\right] \qquad i = 0,1,\ldots,k$$

مع $z_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$: القيمة الحرجة للتوزيع *الطبيعي* بدرجة حرية $n-2$ و نسبة معنوية $(\alpha\%)$ ونجد من جدول التوزيع الطبيعي القيمة المجدولة.

2-8 اختبار استقرار معاملات النموذج (اختبار CHOW)

يدرس هذا الاختبار مدى استقرار النموذج في كامل الفترة الزمنية (دراسة التغيير الهيكلي للنموذج)، أي صياغة النموذج هي نفسها ولكن تختلف القيم المقدرة للمعاملات في العينتين الجزئيتين، نقوم بتقدير النموذج انطلاقا من عينتين جزئيتين n_1 و n_2 مع $n = n_1 + n_2$، حيث:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0^{(1)} + \hat{\beta}_1^{(1)}X_{i1} + \hat{\beta}_2^{(1)}X_{i2} + \ldots + \hat{\beta}_k^{(1)}X_{ik}$$
$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0^{(2)} + \hat{\beta}_1^{(2)}X_{i1} + \hat{\beta}_2^{(2)}X_{i2} + \ldots + \hat{\beta}_k^{(2)}X_{ik}$$

نختبر الفرضيات التالية :

H_0 (فرضية العدم): النموذج يحافظ على نفس بنائه الهيكلي

H_1 (الفرضية البديلة): الانحدارين مختلفين

إن هذا النوع من الاختبارات يسمى باختبار المساواة ما بين مجموعات و بين معالم الانحدار أو اختبارات التغير الهيكلي أو اختبار CHOW وهو إحدى التطبيقات المهمة لتحليل التباين.

تعرف إحصائية فيشر كما يلي :

$$F_c = \frac{\left[SCR - \left(SCR^1 + SCR^2\right)\right]/df_1}{\left(SCR^1 + SCR^2\right)/df_2}$$

مع :

$$df_1 = (n-k-1) - \left[(n_1-k-1) + (n_2-k-1)\right] = k+1$$
$$df_2 = (n_1-k-1) + (n_2-k-1) = n - 2(k+1)$$

إذا كانت $F_c \le F_\alpha(k+1, n-2(k+1))$، فإننا نقبل الفرضية H_0، أي أن النموذج يحافظ على نفس بنائه الهيكلي، أي أن المعاملات مستقرة في كامل الفترة الزمنية.

2-9 التنبؤ:

2-9-1 التنبؤ باستعمال الانحدار الخطي المتعدد

لاحتساب حدود الثقة لأية مشاهدة (نقطة) من مشاهدات الانحدار للمجتمع أو بعبارة أخرى لحساب القيمة الحقيقية ل Y عند مستوى معنوية معين للمتغير المستقل في النموذج ، نفترض أن النقطة المراد تقدير حدود ثقتها هي Y_f. ولتقدير المجال الذي يمكن أن تقع فيه قيمة Y_f المقابلة لتشكيلة معينة من قيم المتغيرات المستقلة (k) يجب اشتقاق متباينة القيمة Y_f.

التنبؤ في المستقبل باستخدام نموذج الانحدار المتعدد كما يلي:

$$\hat{Y}_f = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1f} + \ldots + \hat{\beta}_K X_{kf}$$

$$\hat{Y}_f = \left[1 X_{1f}\ X_{2f} \ldots X_{kf}\right] \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ . \\ . \\ \hat{\beta}_K \end{bmatrix}$$

$$\hat{Y}_f = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1f} + \ldots + \hat{\beta}_K X_{kf}$$

وباختصار : $\hat{Y}_f = C'\hat{B}$ حيث أن: $C' = \begin{pmatrix} 1 \\ X_1 \\ X_2 \\ \ldots\ldots \\ X_f \end{pmatrix}$ شعاع التنبؤ.

***مجال الثقة للتنبؤ**

ولغرض اشتقاق المتباينة الخاصة بتقدير فترات حدود الثقة للقيمة Y_f يجب اشتقاق وتباين القيمة $(\hat{Y}_f)$ وكالاتي:

لإيجاد الوسط نستخدم القيمة المتوقعة ل $(\hat{Y}_f)$:

$$E(\hat{Y}_f) = E(C'_f \hat{\beta})$$
$$E(\hat{Y}_f) = C'_f E(\hat{\beta})$$
$$E(\hat{\beta}) = \beta$$
$$E(\hat{Y}_f) = C'_f \beta$$

ولإيجاد التباين :

$$Var(\hat{Y}_f) = E\{(\hat{Y}_f - E(\hat{Y}_f)(\hat{Y}_f - E(\hat{Y}_f)'\}$$

$$= E\{(\hat{Y}_f - C'_f\beta)(\hat{Y}_f - C'_f\beta)'\}$$

$$\hat{Y}_f = C'_f\hat{\beta}$$

$$= C'_f\{E(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)'\}C_{f_f}$$

$$= \sigma^2 C'_f (X'X)^{-1} C_f$$

لنعرف شعاع أخطاء التنبؤ:

$$e_f = Y_f - \hat{Y}_f$$

$$E(e_f) = E(Y_f - \hat{Y}_f) = 0$$

أما تباين شعاع أخطاء التنبؤ فهو:

$$\text{var}(e_f) = \text{var}(Yf - \hat{Y}_f) = E\left[\left(-X_{T+H}(\hat{\beta}-\beta)+\varepsilon_{T+H}\right)\left(-X_{T+H}(\hat{\beta}-\beta)+\varepsilon_{T+H}\right)'\right]$$

لنجد في الأخير: $Var(Y_f - \hat{Y}_f) = \text{var}(e_f) = \sigma_\varepsilon^2 C'_f (X'X)^{-1} C_f + \sigma_\varepsilon^2 I_H$

مجال الثقة للتنبؤ:

$$Y_f = \hat{Y}_f \mp t_{\alpha l 2}.\sigma(\hat{Y}_f)$$

$$Y_f = C'\hat{\beta} \mp T_{\left(\alpha/2, n-k-1\right)}.\sigma(\hat{Y}_F)$$

$$Y_f = C'\hat{\beta} \pm T_{(\alpha/2, n-k-1)}\sqrt{\sigma_\varepsilon^2\left[C'_f (X'X)^{-1} C_f + 1\right]}$$

2-9-2 التنبؤ باستعمال القيمة المتوقعة:

وإذا كنا بصدد التنبؤ وقياس حدود الثقة للقيمة المتوقعة $E(Y_f)$ فان مجال الثقة للتنبؤ:

$$E(Y_f) = \hat{Y}_f \mp t_{\alpha l 2}.\sigma(\hat{Y}_f)$$

$$Y_f = C'\hat{\beta} \mp T_{\left(\alpha/2, n-k-1\right)}.\sigma(\hat{Y}_F)$$

$$Y_f = C'\hat{\beta} \pm T_{(\alpha/2, n-k-1)}\sqrt{\sigma_\varepsilon^2\left[C'_f (X'X)^{-1} C_f\right]}$$

10-2 اختبار مقدرة النموذج على التنبؤ:

من أجل اختبار فعالية النموذج على التنبؤ، نقوم بفحص ما إذا كانت قيم المتغيرات الداخلية الأصلية متطابقة مع قيم المتغيرات (المحسوبة) للقيام بهذا الاختبار لدينا بالإضافة إلى التحليل العادي البياني عدد من المؤشرات الإحصائية التالية :

* متوسط الخطأ : يعرف متوسط الخطأ كما يلي :

1. $EM = \frac{1}{n}\sum_{i=1}(\hat{Y} - Y_i)$

حيث :

$\hat{Y}_i$: المتغيرة الداخلية المحاكية .

Y_i : المتغيرة الداخلية المشاهدة .

n : يمثل حجم العينة

2. متوسط نسبة الخطأ:

$$EMP = \frac{1}{n}\sum_{i=1}\frac{\hat{Y} - Y_i}{Y_i}$$

نشير هنا أن المشكل مع هذين المعيارين، هو أنها يمكنها أن تنعدم، وبالتالي لا يمكننا إظهار الفروق بين المتغيرات الملاحظة والمتغيرات المحاكية بفعل نفي القيم الموجبة والسالبة أثر بعضها البعض،لذا هذا العيب يمكن أن يأخذ في الحسابات من طرف المعايير الإحصائية التالية :

3. متوسط القيم المطلقة للخطأ :

$$MAE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}\left|\hat{Y}_i - Y_i\right|$$

4. متوسط القيم المطلقة لنسبة للخطأ :

$$MAEP = \frac{1}{n}\sum_{i=1}\left|\frac{\hat{Y}_i - Yi}{Y_i}\right|$$

5. متوسط مربع للخطأ :

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}\left(\hat{Y}_i - Y_i\right)^2$$

6. متوسط مربع نسبة للخطأ :

$$MSEP = \frac{1}{n}\sum_{i=1} \frac{\left(\hat{Y}_i - Y_i\right)^2}{Y_i}$$

نستعمل عامة جذر لمتوسط مربع الخطأ المعرف بـ :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1} (\hat{Y}_i - Y_i)^2}$$

7. معامل متباينة تايل (Coefficient d'inégalité de Theil)

$$U = \frac{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i} (\hat{Y}_i - Y_i)^2}}{A+B}$$

$$\mathrm{A} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1} (\hat{Y}_i)^2}$$

$$\mathrm{B} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1} (Y_i)^2}$$

$$U = \frac{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1} (\hat{Y}_i - Y_i)^2}}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1} (Y_i)^2} + \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1} (Y_i \;)^2}}$$

- إذا كان $U = 0$ و $\hat{Y}_i = Y_i$ وبالتالي فنحن هنا في محاكاة كاملة **(Simulation Parfaite)**.
- إذا كان $U = 1$ فالنتائج المتنبأ بها (المتوقعة) للنموذج هي أسوأ ما يكون

11-2 مثال تطبيقي 02 :

الجدول التالي يحتوي على بيانات منتجات:

Y_i	X_1	X_2
0	**1**	**1**
2	**2**	**1**
5	**3**	**7**
10	**4**	**10**
12	**5**	**15**
20	**6**	**15**
$\sum Y_i = 49$	$\sum X_{1i} = 21$	$\sum X_{2i} = 49$

1*<u>إيجاد المعادلة المقدرة باستخدام المعطيات العادية والمركزة " الانحرافات".</u>

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$(X'X) = \begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{bmatrix}$$

بالتطبيق العددي نتحصل على :

$$(X'X) = \begin{bmatrix} 6 & 21 & 50 \\ 21 & 91 & 235 \\ 50 & 235 & 632 \end{bmatrix}$$

$$(X'Y) = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_{1i}Y_i \\ \sum X_{2i}Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 \\ 239 \\ 637 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y) = \begin{bmatrix} 6 & 21 & 50 \\ 21 & 91 & 235 \\ 50 & 235 & 632 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 49 \\ 239 \\ 637 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.38607 \\ 4.84164 \\ -0.28710 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\hat{Y}_i = -6.38607 + 4.84164 X_{1i} - 0.2871 X_{2i}}$$

- **شرح المعنى الاقتصادي لمعالم الانحدار المقدرة .**

تشير التقديرات إلى وجود علاقة طردية بين (Y) و (X_1) فكل زيادة في (X_1) بمقدار وحدة واحدة تزداد (Y) ب 0.84 وحدة مع ثبات (X_2) .

كما تشير المعادلة إلى وجود علاقة عكسية بين (X_2) و (Y) فزيادة (X_2)بوحدة واحدة تؤدي إلى انخفاض (Y) ب 0.28 وحدة مع ثبات أثر (X_1).

2* **حساب الانحراف المعياري المقدر للمعلمات المقدرة .**

$$\boxed{Var(\hat{\beta}) = diag\Omega_{\hat{\beta}}}$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \text{var}(\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1) & Cov(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_2) \\ Cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_0) & Var(\hat{\beta}_1) & Cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2) \\ Cov(\hat{\beta}_2\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_2\hat{\beta}_1) & Var(\hat{\beta}_2) \end{bmatrix}$$

لدينا : $\boxed{\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_\varepsilon^2 (X'X)^{-1}}$ و $\boxed{\hat{\sigma}_e^2 = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-k-1}}$

إيجاد $\sum e^2{}_i$:

لدينا : $\sum_i (Y_i - \overline{Y})^2 = \sum_i (\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 + \sum_i \hat{\varepsilon}_i^2$

$$SCT = \sum_i (Y_i - \overline{Y})^2 = 272.8333$$

$$SCE = \sum_I \left(\hat{Y} - \overline{\hat{Y}}\right)^2 = \hat{\beta}'X'Y - n\overline{Y}^2 = 261.1708$$

$$SCR = \sum e_i^2 = SCT - SCE = 11.68317$$

$$\boxed{\hat{\sigma}_e^2 = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-k-1}}$$

$$\sigma_e^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k-1} = \frac{11.6832}{3} = 3.8944$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_e{}^2 (X'X)^{-1} = 3.8944 \begin{bmatrix} 2.2644 & -1.5069 & 0.3812 \\ -1.5069 & 1.2792 & -0.3564 \\ 0.3812 & -0.3564 & 0.1040 \end{bmatrix}$$

- **حساب الانحراف المعياري للمقدرات :**

$$Var(\hat{\beta}) = diag\Omega_{\hat{\beta}}$$

$$Var(\hat{\beta}_0) = 3.8944 \times 2.2644 = 8.8185 \qquad \sigma_{\hat{\beta}0} == \sqrt{8.8185} = 2.9696$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = 3.8944 \times 1.2792 = 4.9817 \qquad \sigma_{\hat{\beta}1} == \sqrt{4.9817} = 2.2320$$

$$Var(\hat{\beta}_2) = 3.8944 \times 0.1040 = 0.4050 \qquad \sigma_{\hat{\beta}2} = \sqrt{0.4050} = 0.6364$$

- **إيجاد معامل التحديد مع التفسير.**

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{SCT - SCR}{SCT} = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{261.1708}{272.8333} = 0.9572$$

أو :

$$R^2 = 1 - \frac{SCR}{SCT} = 1 - \frac{11.68317}{272.8333} = 0.9572$$

التفسير : (Y) مفسر بـ 95.72% عن طريق (X_1) و (X_2) وتبقى 4.28% تدخل ضمن هامش الخطأ وهي متغيرات أخرى لم تدرج في النموذج أو أخطاء إرتكبناها أثناء القياس ، على العموم هو هامش قليل جدا دلالة على قوة النموذج التفسيرية.

- **إيجاد معامل التحديد المصحح .**

$$\bar{R}^2 = \left[1 - (1 - R^2)\frac{n-1}{n-k-1}\right]$$

$$\bar{R}^2 = 1 - (0.0428 \times 1.6667 = 0.9287$$

3* اختبر معنوية المعلمات باستخدام اختبار t عند مستوى معنوية α = 5% .

- **اختبار معنوية ميل الدخل الوطني عند مستوى معنوية α = 5% .**

فرضيات هذا الاختبار هي:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = 0 & \text{(فرضية العدم) المعلمة ليس لها دلالة معنوية} \\ H_1 : \beta_1 \neq 0 & \text{(الفرضية البديلة) المعلمة لها دلالة معنوية} \end{cases}$$

يتم هذا لاختبار بإيجاد القيمة المحسوبة t_C وتساوي :

حيث أن: $t_C = \frac{\left|\hat{\beta}_1 - \beta_1\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$

وما دمنا نختبر فرضية العدم وتنص على انعدام β_1 فإن قيمة t_C تصبح على الشكل التالي:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} = \frac{4.84164}{2.2320} = 2.17$$

مقارنة t_C مع القيمة المجدولة t_t حيث أن : t_t يتم قراءتها من جدول ستودينت كالتالي: $t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}$ حيث أن:

$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$: مستوى المعنوية و $k = 2$: عدد المعالم في النموذج .

$t_t = t_{n-3,\frac{\alpha}{2}} = t_{3,0.025} = 3.182$.

إذا كانت $|t_c| \prec t_{n-3,\frac{\alpha}{2}}$ أي المعلمة ليست لها معنوية إحصائية فهي لا تختلف معنويا عن الصفر.

- **<u>اختبار معنوية ميل السعر عند مستوى معنوية α = 5%.</u>**

فرضيات هذا الاختبار هي:

المعلمة ليس لها دلالة معنوية $H_0 : \beta_2 = 0$ (فرضية العدم)

المعلمة لها دلالة معنوية $H_1 : \beta_2 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

يتم هذا لاختبار بإيجاد القيمة المحسوبة t_C وتساوي :

حيث أن: $t_C = \frac{\left|\hat{\beta}_2 - \beta_2\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}}$

وما دمنا نختبر فرضية العدم وتنص على انعدام β_2 فإن قيمة t_C تصبح على الشكل التالي:

$$t_c = \frac{\left|\hat{\beta}_2\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}2}} = \frac{|-0.2871|}{0.6364} = 0.45$$

مقارنة t_C مع القيمة المجدولة t_t حيث أن : t_t يتم قراءتها من جدول ستودينت كالتالي: $t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}$ حيث أن:

$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$: مستوى المعنوية و $k = 2$: عدد المعالم في النموذج .

. $t_{t=}t_{n-3,\frac{\alpha}{2}} = t_{7,0.025} = 3.182$

إذا كانت $|t_c| \prec t_{n-3,\frac{\alpha}{2}}$ أي المعلمة ليست لها معنوية إحصائية فهي لا تختلف معنويا عن الصفر.

- **<u>اختبر معنوية الحد الثابت عند مستوى معنوية α = 5%.</u>**

فرضيات هذا الاختبار هي:

(فرضية العدم) $H_0 : \beta_0 = 0$ المعلمة ليس لها دلالة معنوية

المعلمة لها دلالة معنوية $H_1 : \beta_0 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

يتم هذا لاختبار بإيجاد القيمة المحسوبة t وتساوي :

حيث أن: $t_C = \dfrac{\left|\hat{\beta}_0 - \beta_0\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}$

وما دمنا نختبر فرضية العدم وتنص على انعدام β_0 فإن قيمة t_C تصبح على الشكل التالي:

$$t_c = \frac{\left|\hat{\beta}_0\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} = \frac{|-6.38607|}{2.9696} = 2.15$$

حيث أن: $t_{n-k,\frac{\alpha}{2}}$ يتم قراءتها من جدول ستودينت كالتالي: t_tحيث أن : t_t مع القيمة المجدولة t_Cمقارنة

$\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{0.05}{2} = 0.025$: مستوى المعنوية و $k = 2$: عدد المعالم في الانحدار الخطي البسيط .

إذا كانت $t_{t=}t_{n-3,\frac{\alpha}{2}} = t_{3,0.025} = 3.182$.

إذا كانت $|t_c| \succ t_{n-3,\frac{\alpha}{2}}$ أي المعلمة ليست لها معنوية إحصائية فهي لا تختلف معنويا عن الصفر .

4* تقدير معالم النموذج عند مستوى ثقة 95%.

لدينا :

$$\beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 - t_{n-3,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}, \hat{\beta}_0 + t_{n-3,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}\right]$$

$$\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 - t_{n-3,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}, \hat{\beta}_1 + t_{n-3,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\right]$$

$$\beta_2 = \left[\beta_2 - t_{n-3,\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\hat{\beta}3}, \hat{\beta}_3 + tn - 3, \frac{\alpha}{2}\sigma_{\hat{\beta}3}\right]$$

$$\beta_0 \in [-15.83533 \quad 3.06319]$$
$$\beta_1 \in [-2.26058 \quad 11.94386]$$
$$\beta_2 \in [-2.31212 \quad 1.73792]$$

- هذا يعني أن هناك احتمال **95%** أن تقع القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع β_0 بين الحدين الأعلى 3.06 والأدنى 15.83- ، وأن هناك احتمال **5%** أن تقع خارج هذين الحدين.
- نفس الشيء بالنسبة للمعلمة β_1 هناك احتمال **95%** أن تقع القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع β_1 بين الحدين الأعلى 11.94 والأدنى 2.26- ، وأن هناك احتمال **5%** أن تقع خارج هذين الحدين.
- نفس الشيء بالنسبة للمعلمة β_2 هناك احتمال **95%** أن تقع القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع β_1 بين الحدين الأعلى 1.73 والأدنى 2.31- ، وأن هناك احتمال **5%** أن تقع خارج هذين الحدين.

5*اختبار معنوية المعلمات باستخدام اختبار F عند مستوى معنوية α = 5% .

الصيغة الرياضية للفرضية المراد اختبارها كالأتي:

(فرضية العدم) $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$ الانحدار ككل ليس له دلالة معنوية

الانحدار ككل له دلالة معنوية $H_1 : \beta_1 \neq \beta_2 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

يتم أولا تحديد قيمة F المحسوبة كالتالي :

$$F = \frac{SCE/k}{SCR/(n-k-1)} \sim F_{(k,n-k-1)}$$

$$F = \frac{261.1708/2}{11.68317/(6-3)} = 14.6667$$

أو : $F = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-k-1)} = \frac{0.9572/2}{(1-0.9572)/3} = 14.6667$

في توزيع F القيمة المجدولة لإحصائية *Fischer* في هده الحالة تعتمد على درجتي حرية 2 (في البسط) و $n-3$ (في المقام).

$$F_t = F_{k,n-k-1} = F_{(2,3)} = 9.55$$

إذا كان $F_C \geq F_t$ نقبل H_1 ونرفض H_0 الانحدار ككل له دلالة معنوية إحصائية.

6*إيجاد قيمة Y_f **علما أن :** $X_{1f} = 7$ **و** $X_{2f} = 16$

$$\hat{Y}_f = \begin{bmatrix} 1 X_{1f} X_{2f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{Y}_f = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1f} + \hat{\beta}_2 X_{2f}$$

وباختصار : $\hat{Y}_f = C'\hat{B}$ حيث أن: $C' = \begin{pmatrix} 1 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ شعاع التنبؤ.

$$\hat{Y}_f = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6.39 \\ 4.84 \\ -0.29 \end{bmatrix} = 22.86$$

$$\hat{Y}_f = -6.39 + 7 \times 4.84 + 16 \times (-0.29 = 22.86$$

7*تحديد مجال الثقة للاستيراد المتنبأ به سابقا عند مستوى ثقة 95%.

لدينا : $Y_f = C'\hat{\beta} \pm T_{(\alpha/2, n-k-1)} \sqrt{\sigma_\varepsilon^2 \left[C'_f \ (X'X)^{-1} C_f \right]}$

$$Y_f = 22.86 \pm 3.182 \sqrt{1.97 \left[\begin{pmatrix} 1 & 7 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 21 & 50 \\ 21 & 91 & 235 \\ 50 & 235 & 632 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 16 \end{pmatrix} + 1 \right]}$$

$$Y_f \in [-34.03 \quad , \quad 79.75]$$

2-12 سلسلة تمارين:

التمرين 01:

السؤال الأول: ماهي الفروض التي يجب توافرها في نموذج الانحدار المتعدد حتى يمكن تقدير معلمة بطريقة المربعات الصغرى؟

السؤال الثاني: وضح المقصود بما يلي:

- معاملات الانحدار.
- معاملات الارتباط الجزئية.

التمرين 02:

يمثل الجدول الموالي لدخل الفرد الحقيقي بآلاف الدولارات (Y) ، مع نسبة القوة العاملة في الزراعة (X_1) و متوسط سنوات التعليم للسكان فوق سن 25 سن (X_2) ، لعدد 15 دولة متقدمة في سنة ما:

Y_i	6	8	8	7	7	12	9	8	9	10	10	11	9	10	10
X_1	9	10	8	7	10	4	5	5	6	8	7	4	9	5	5
X_2	8	13	11	10	12	16	10	10	12	14	12	16	14	10	12

المطلوب:

* أوجد معادلة الانحدار المقدرة ، فسر النتائج المتحصل عليها ؟
* أوجد مصفوفة التباين$(\hat{\Omega}_{\hat{\beta}})$ ؟
* أوجد تباين المقدرات ؟ ثم أوجد(R^2) ؟
* اوجد معامل الارتباط الجزئي ثم بين أي من هذه المتغيرات تساهم أكثر في تفسير (Y)؟

التمرين 03:

فيما يلي البيانات الخاصة بالمتغير (Y) والمتغيرين (X_1) و (X_2) ، لعدد 8 من المشاهدات:

Y_i	6	8	7	5	9	6	8	7
X_1	3	4	2	1	3	4	5	2
X_2	5	3	2	3	4	6	2	7

المطلوب:

- أوجد معادلة الانحدار المقدرة ، فسر النتائج المتحصل عليها ؟
- أوجد مصفوفة التباين$(\hat{\Omega}_{\hat{\beta}})$
- أوجد تباين المقدرات ؟ ثم أوجد(R^2) ، ماذا تستنتج؟
- اختبر معنوية معالم معادلة الانحدار، اختبر معنوية النموذج ككل.
- تقدير مجال الثقة عند المستوى 95%.

التمرين 04:

فيما يلي البيانات الخاصة بالمتغير (Y) والمتغيرات (X_1) و (X_2) و(X_2)، لعدد 14 من المشاهدات:

Y	12	14	10	16	14	19	21	19	21	16	19	21	25	21
X1	2	1	3	6	7	8	8	5	5	8	4	9	12	7
X2	45	43	43	47	42	41	32	33	41	38	32	31	35	29
X3	121	132	154	145	129	156	132	147	128	163	161	172	174	180

المطلوب:

- أوجد معادلة الانحدار المقدرة ، فسر النتائج المتحصل عليها ؟
- أوجد مصفوفة التباين$(\hat{\Omega}_{\hat{\beta}})$
- أوجد تباين المقدرات ؟ ثم أوجد(R^2) ، ماذا تستنتج؟
- اختبر معنوية معالم معادلة الانحدار، اختبر معنوية النموذج ككل.
- تقدير مجال الثقة عند المستوى 95%.

التمرين 05:

لتقدير نموذج الانحدار الخطي المتعدد للعلاقة بين الكمية المطلوبة من سلعة معينة (Y) وسعر السلعة (X_1) والدخل الفردي (X_2) حيث تحصلنا على النتائج التالية:

$$X'X = \begin{bmatrix} 1.5 & -1.2 & 1.8 \\ & 1 & -1.7 \\ & & 2 \end{bmatrix} \qquad \hat{\sigma}_e^2 = 10 \qquad X'Y = \begin{bmatrix} 42 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix}$$

المطلوب:

* قدر معالم معادلة الانحدار مع التفسير الاقتصادي.

*أوجد تباين المقدرات.

* اختبر معنوية معالم النموذج عند المستوى 5%.

* اختبر صلاحية النموذج عند مستوى الدلالة $\alpha = 5\%$.

* أحسب معامل التحديد ومعامل التحديد المصحح.

التمرين 06:

لكن لدينا النموذج المقدر التالي:

$$\ln Y_t = 1.24 + 0.25 \ln L_t + 0.78 \ln K_t$$

مع:

Y: حجم الإنتاج

L: العمالة

K: الرأس المال المادي

قدم تفسيرا اقتصاديا للنموذج.

التمرين 07:

قام باحث بتقدير العلاقة متغير تابع Y_t (الرقم القياسي للواردات) متغيرين مستقلين X_{1t} (الرقم القياسي للإنتاج الإجمالي) و X_{2t} (نسبة الرقمين القياسيين السابقين) وتحصل على النتائج التالية:

$$\widehat{Y}_t = -49.329 + 1.364X_{1t} + 0.114X_{2t}$$

$$\sum(Yt-\bar{Y})^2 = 1260.89 \qquad R^2 = 0.94 \qquad n = 9$$

المطلوب: ضع جدول تحليل التباين مع $F_{tab} = 5.14$.

التمرين 08:

النتائج التالية تحصلنا عليها من عينة تمثل 13 عائلة حيث Y يمثل الإنفاق الأسبوعي X_1 يمثل الدخل وX_2 يمثل عدد الأطفال في الأسرة:

$$\widehat{Y} = 6.26 + 0.45X_1 - 0.38X_2$$

$$\sum X_2^2 = 60 \qquad \sum X_1^2 = 74 \qquad \sum X_1Y = 38 \qquad \sum X_2Y = -28$$

$$t_{5\%} = 2.179 \qquad \sum X_1X_2 = -12 \qquad \sum e_i^2 = 12.27$$

المطلوب:

* ما مقدار ما يفسره المتغيران المستقلان من التغير الحاصل في المتغير التابع؟

* اختبر معنوية المعلمة $\widehat{\beta}_1$.

* قدر مجال الثقة للمعلمة $\widehat{\beta}_1$ عند المستوى 95%.

*ماهو حجم الإنفاق العائلي عندما يكون X_1=400 و X_2=4.

التمرين 09:

النتائج التالية تحصلنا عليها من عينة تمثل 15 مريضا حيث Y يمثل مدة الاستشفاء في مستشفى الأمراض المزمنة X_1 تمثل هدد المراجعات السابقة وX_2 يمثل السن:

$$\widehat{Y} = 2.08 + 0.05X_1 + 1.76X_2$$

$$\sum X_2 = 26 \qquad \sum Y = 66 \qquad \sum X_1Y = 215 \qquad \sum X_1 = 815 \quad \sum X_2Y = 9$$

$R^2 = 0.83 \qquad t_{5\%} = 2.36 \qquad F_{5\%} = 6.54 \quad \sigma^2_{\hat{\beta}_1^2} = 0.00025 \qquad \sigma^2_{\hat{\beta}_2^2} = 0.093$

المطلوب:

* اختبر معنوية العلاقة بين المتغير التابع والمتغيرين المستقلين.

* اختبر معنوية المعالم المقدرة

* قدر مجال الثقة للمعلمة $\hat{\beta}_1$ عند المستوى 95%.

* قدر مدة الاستشفاء لمريض راجع المستشفى (5) مرات سابقة ويبلغ من العمر (42) سنة.