المحول الأول: التوزيعات لاحتمالية المتقطعة الأكثر استخداما

تستخدم هذه التوزيعات في حل العديد من المسائل في المجالات الحياتية مثل المجال الطبي، الأحوال الجوية، النقل، المجال الاقتصادي والادارة. ومن أكثر هذه التوزيعات شيوعا: التوزيع الثنائي وتوزيع بواسون.

في نهاية المحاضرات يفترض أن يكون الطالب قادرا على استذكار القوانين المدروسة وخصائصها الأساسية، ومن خلال التطبيقات يفترض أن يتمكن من معرفة متى وكيف يمكن استخدام كل قانون.

1 توزيع برنولي[1] Bernoulli Distribution

(أ) استنتاج صيغة قانون برنولي

نقول عن تجربة أنها "برنولية" إذا كانت تحتمل نتيجتين متنافيتين A و’A. نسمي A نجاح و’A فشل.

نعتبر المتغير العشوائي X التي تمثل **عدد مرات النجاح**، تأخذ X القيمة 1 عند تحقق الحدث A و0 في الحالة المعاكسة.

نرمز عادة ب p "احتمال النجاح" لاحتمال تحقق الحدث A و q = 1 - p احتمال الحدث المعاكس (احتمال الفشل). يعين توزيع برنولي كما يلي :

$$\boxed{P(X=1)=p, \qquad P(X=0)=q, \qquad X=0,1.}$$

ونكتب **X ~ B(1, p)**

(ب) خصائص توزيع برنولي

- **الأمل الرياضي (التوقع)**: $E(X) = \Sigma x_i p_i = 1.p + 0.q = p \Rightarrow$ $\mathbf{E(X) = p}$.
- **التباين**: $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (1^2.p + 0^2.q) - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq \Rightarrow$ $\mathbf{V(X) = pq}$.
- **الدالة المتجددة للعزوم**: $\mathbf{M(t) = E(e^{xt})} = e^{0t}q + e^{1t}p \Rightarrow$ $\mathbf{M(t) = q + pe^t}$

أمثلة عن إستخدامات توزيع برنولي:

- إلقاء قطعة نقدية (ظهور الوجه أو الصورة)
- نتيجة الامتحان بالنسبة للطالب (نجاح أو رسوب)
- نتيجة تناول مريض ما لدواء معين (إستجابة المريض للدواء أو عدم الاستجابة)، ...الخ

[1] بإسم Jacques Bernoulli الذي درس هذا التوزيع في أواخر القرن 17.

2 التوزيع الثنائي Distribution binomiale

(أ) استنتاج صيغة قانون التوزيع الثنائي:

إذا كررنا تجربة برنولي n مرة فإن X (عدد مرات النجاح) تصبح عبارة عن متغير عشوائي يتبع التوزيع ثنائي الحد.

مثال: نرمي قطعة نقدية n مرة، ونعرف المتغير العشوائي X (عدد مرات الحصول على صورة F

هنا لدينا تجربة برنولي تتمثل في الحصول على نتيجتين متنافيتين (الحصول على الكتابة أو الصورة)، مكررة n مرة.

نميز بين الحالات الأتية:

حالة : n = 2 قيم المتغير العشوائي هي : X = 0, 1, 2.

$P(X = 0) = q*q = q^2$, $P(X=1) = P(FP) + P(PF) = p*q + q*p = \mathbf{2p^1q^1}$

حالة : n = 3 **قيم المتغير العشوائي هي:** X = 0, 1, 2, 3

$P(X=3) = P(FFF) = p*p*p = p^3$, $P(X=2) = P(FFP \text{ ou } PFF \text{ ou } FPF) = \mathbf{3p^2q^1}$

حالة : n = 4 قيم المتغير العشوائي هي : X = 0, 1, 2, 3, 4

$P(X=3) = P(FFFP \text{ ou } PFFF \text{ ou } FPFF \text{ ou } FFPF) = \mathbf{4\,p^3q^1}$

عدد النجاحات يحسب كما يلي:

$$P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x}, \qquad x = 0,1,2,3,...,n \qquad , \qquad n = 1,2,3,...$$

حيث: x عدد مرات النجاح، p: احتمال النجاح في التجربة الواحدة (يبقى ثابت عند تكرار التجربة)، q = 1-p احتمال الفشل وn: عدد التجارب.

ويكتب قانون التوزيع الاحتمالي أيضا كما يلي: **X ~ B(n, p)**

(ب) شروط استخدام التوزيع الثنائي

1. تجربة برنولية مكررة عدد محدد من المرات
2. احتمال النجاح في التجربة ثابت (التجارب مستقلة أي أن السحب بالإرجاع)

مثال : أحسب عند رمي قطعة نقدية متوازنة 4 مرات، احتمال الحصول على: ولا مرة صورة، مرة واحدة، مرتين.

- $P(\mathbf{X = 0}) = C^0_4 \; 0.5^0 \, 0.5^4 = 1/16$
- $P(\mathbf{X = 1}) = C^1_4 \; 0.5^1 \, 0.5^3$
- $P(\mathbf{X = 2}) = C^2_4 \; 0.5^2 \, 0.5^2$

(ج) خصائص التوزيع الثنائي

التوقع والتباين: يمكن اعتبار X مجموع متغيرات مستقلة برنولية $X = X_1 + X_2 + \dots X_i + \dots + X_n$ لها نفس المعلم p وبالتالي نفس التوقع $(E(Xi) = p)$ أيضا. إذا باستخدام خصائص التوقع والتباين نجد:

- $E(X) = E(X_1 + X_2 + \dots X_i + \dots + X_n) = \Sigma E(Xi) = \Sigma pi = n\,p \Rightarrow$ **$E(X) = np$**
- $V(X) = V(X_1 + X_2 + \dots X_i + \dots + X_n)$,

Xi مستقلة إذن $V(X) = \Sigma V(Xi) = \Sigma pq \Rightarrow$ **$V(X) = npq$**

- **الدالة المتجددة للعزوم:**

"من أجل X_1 و X_2 متغيرات عشوائية مستقلة لها الدالة المولدة للعزوم $M_{x1}(t)$ و $M_{x2}(t)$ فإن:

$$M_{x1+x2}(t) = M_{x1}(t).\, M_{x2}(t)"؛$$

نستنتج:

$$M_X(t) = M_{x=x1+x2+\dots xn}(t) = M_{x1}(t)\,.\,M_{x2}(t)\dots M_{xn}(t)$$

$$M_X(t)= E(e^{x1t})\,.\,E(e^{x2t})\dots E(e^{xnt}) \Rightarrow \quad \mathbf{M_X(t) = [q + pe^t]^n}$$

3 توزيع بواسون[2] Poisson Distribution

(أ) صيغة قانون توزيع بواسون

نقول أن متغير عشوائي يتبع التوزيع الاحتمالي لـ بواسون، إذا كانت دالة كثافته الإحتمالية تكتب على الشكل:

$$\boxed{p(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad x = 0,1,2,\dots}$$

و هو احتمال x نجاح في وحدة زمن واحدة، حسب توزيع بواسون حيث **$\lambda > 0$**. ونكتب: **$X\sim P(\lambda)$**

ملاحظة: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828...$

(ب) خصائص توزيع بواسون

$$E(X) = V(X) = \lambda \quad ; \quad M(t) = \exp\left[\lambda(e^t - 1)\right]$$

---

[2] باسم سيميون دونيز بواسون Siméon-Denis Poisson (1781-1840) الفيزيائي و الرياضي الفرنسي الذي استخدم هذا لقانون سنة 1837 في كتابه بحث في احتمال الأحكام في مجال الجريمة و في المجال المدني (Recherche sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile) حيث أدخل كنهاية لقانون باسكال والقانون الثنائي. إلا أن أول استعمال له للقانون الذي يحمل اسمه يعود إلى 1830. تجدر الإشارة إلى أن بواسون صاحب الفضل في نظرية مهمة أخرى هي نظرية الأعداد الكبيرة التي تنسب لشيبيشيف. أنظر ج ج دراوزبيك [1997].

مثال. بفرض أن عدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى مركز هاتفي معين تتبع توزيع بواسون بمعدل $\lambda=5$ في الثانية. أحسب احتمال وصول 7 مكالمات في ثانية ونصف.

$$t\lambda = 1.5(5) \qquad P(X=7) = \frac{(1.5(5))^7 e^{-1.5(7)}}{7!}$$

ملاحظة: إذا كان X يتبع توزيع بواسون بمعدل λ، فإن $Y= aX$ هو الآخر يتبع توزيع بواسون بمعدل $a\lambda$.

ج) الاستخدام العملي لتوزيع بواسون

ظل توزيع بواسون لفترة طويلة يستعمل فقط لتمثيل الأحداث النادرة، لكنه اليوم يستعمل في مجالات متعددة. فمن الدراسة الشهيرة ل (Ladislaus Bortkiewics) عن حوادث إصابات الجنود بصكات الجياد في الجيوش أصبح اليوم توزيع بواسون يستعمل في شتى المجالات؛ منها مراقبة الجودة إحصائيا، تسيير ظواهر الانتظار، الاتصالات (عدد المكالمات في وحدة زمن)، كما يستخدم في الفيزياء النووية لدراسة عدد الجزيئات المنبعثة من مادة مشعة وفي البيولوجيا الدقيقة (microbiologie) لمراقبة تكاثر البكتيريا في حقل تجارب، كما يستخدم في البيولوجيا وحتى في علم الأحوال الجوي.

في مجال التسيير، يستخدم توزيع بواسون بشكل خاص عند دراسة مسائل متعلقة "بظواهر الانتظار"؛ ففي هذا النوع من المسائل، كثيرا ما يفترض أن وصول الزبائن إلى مكان الخدمة يتبع توزيع بواسون. من أمثلة ذلك: عدد الطائرات التي تصل إلى المطار في وحدة زمن، عدد البواخر التي تصل إلى ميناء في وحدة زمن، عدد الزبائن الذين يصلون إلى مكتب بريدي في وحدة زمن، عدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى مركز هاتفي، عدد الحالات الاستعجالية التي تصل إلى مستشفى، ... تسمى هذه الظواهر في نظرية صفوف الانتظار "بظواهر الوصول".

مثال1. بينت دراسة أن عدد حوادث العمل في معمل معين يتبع توزيع بواسون بمعدل حادثتين يوميا.

أوجد احتمال أن لا يسجل أي حادث في يوم معين. أوجد احتمال حادث على الأقل في يوم:

- $P(X = 0) = \lambda^x * e^{-\lambda}/x! = \lambda^0 * e^{-\lambda}/0! \Rightarrow \mathbf{P(X = 0) = e^{-\lambda}} = e^{-2}$
- $P(X \geq 1) = 1- P(0) = 1– [\lambda^0 * e^{-\lambda}/0!] \Rightarrow \mathbf{P(X \geq 1) = 1 - e^{-\lambda}} = 1 – e^{-2}$

مثال2. بينت دراسة إحصائية سابقة أن عدد السيارات التي تصل إلى محطة بنزين معينة بين الساعة 12:00 و12:05 هو في المتوسط 3 سيارات، كما بينت الدراسة أن عدد السيارات التي تصل إلى المحطة يتبع توزيع بواسون. أوجد احتمال أن تصل 4 سيارات بين 12:00 و12:05.

متوسط عدد السيارات في الساعة = 2 * 3 = 6 ومنه:

$$P(X=4) = 6^4 * e^{-6}/4\,! = 1296 * e^{-6}/24 = 54 * e^{-6}$$

4 التوزيع الثنائي السالب (باسكال) Negative Binomial Distribution

(أ) استنتاج صيغة قانون التوزيع الثنائي السالب:

مثال: نرمي قطعة نقود إلى غاية الحصول على 3 مرات صورة (متتالية أو لا). أحسب احتمال أن نحصل على ذلك بعد 5 رميات، 4 رميات، 3 رميات، توقع عدد الرميات اللازمة وأحسب التباين.

من جديد ليكن لدينا تجربة برنولية (نتيجتين نجاح وفشل) مكررة، لكن هذه المرة **إلى غاية الحصول على عدد معين (r) من النجاحات**. X في هذه الحالة هي **عدد مرات تكرار التجربة** إلى غاية الحصول على r نجاح.

كيف يحسب الاحتمال ؟ نعلم أن تحقق النجاح r مرة احتماله p^r واحتمال الفشل x-r مرة يساوي q^{x-r}. إذا الاحتمال المطلوب يتضمن جداء هذين الاحتمالين $p^r\, q^{x-r}$. لكن هناك عددا من الطرق الملائمة لتحقيق r نجاح من بين X تجربة مع العلم أن آخر تجربة هي نجاح. هذا العدد يساوي إذا عدد الطرق الملائمة لاختيار r-1 نجاح من بين x-1 تجربة C^{r-1}_{x-1} (التجربة الأخيرة معلومة النتيجة).

$$\boxed{P(X=x)=C_{x-1}^{r-1}p^r q^{x-r}, \qquad X=r,r+1,r+2,\ldots+\infty, \qquad r=1,2,3,\ldots,+\infty}$$

يسمى هذا **التوزيع توزيع باسكال أو الثنائي السالب** ونكتب: **X~B (N, r, p)**

يمكن إذا الإجابة على أسئلة المثال السابق بما يلي:

- $P(X=5)=C^{3-1}_{5-1}\, p^3 q^{5-3} = C^2_4\, (½)^3 (½)^2 = 6\,(1/8)\,(1/4) = \mathbf{9/32}$

$E(X) = r/p = 3/(1/2) = \mathbf{6}$, $V(X) = rq/p^2 = 3\,(1/2) / (1/2)^2 = 12/2 = \mathbf{6}$

(ب) خصائص التوزيع الثنائي السالب

- **الأمل الرياضي (التوقع او المتوسط)**: **$E(X) = r/p$**
- **التباين**: **$V(X) = rq/p^2$**
- **الدالة المولدة للعزوم:**

$$M(t)=p\frac{e^t}{(1-qe^t)^r}$$

5 التوزيع الهندسي Geometric Distribution

(أ) استنتاج صيغة قانون التوزيع الهندسي

التوزيع الهندسي شبيه بالتوزيع الثنائي من حيث الشروط ، حيث يخص الحوادث الخاضعة لتوزيع برنولي مكررة n مرة ، إلا أننا لا نهتم بعدد حالات تكرار النجاح أو الفشل في التجربة، بل يتعلق الأمر بأول مرة يتحقق فيها نجاح التجربة بعد عدد من المحاولات.

مثال: نرمي قطعة نقدية إلى أن نحصل على صورة. احتمال أن يتطلب ذلك 4 رميات هو: $P(X=4) = P(PPPF)$

نعود من جديد إلى التجربة البرنولية وهذه المرة نكرر التجربة إلى غاية الحصـــول على النتيجة أو الحدث المطلوب (نجاح مرة واحدة). المتغيرة العشوائية X التي تمثل عدد مرات تكرار التجربة (بما فيها المرة التي حصل فيها النجاح) تتبع التوزيع الهندسي.

إذا رمزنا لاحتمال النجاح ب p ولاحتمال الفشل ب q فإن الاحتمال يمكن كتابته كما يلي: $P(X=4) = q^3p$

وبصفة عامة فإن احتمال أي قيمة لـ X يعبر عنه كما يلي :

$$\boxed{P(X=x)=q^{x-1}p \qquad , \qquad X=1,2,3,\ldots}$$

(ب) خصائص التوزيع الهندسي

- الأمل الرياضي (التوقع او المتوسط)
- التباين
- **$E(X) = 1/p$**
- **$V(X) = q/p^2$**
- الدالة المولدة للعزوم:

$$M(t) = p\frac{e^t}{\left(1-qe^t\right)}$$

ملاحظة: التوزيع الهندسي ما هو إلا حالة خاصة من توزيع باسكال حيث **r = 1**

6 التوزيع الهندسي الزائد: **Hypergeometric Distribution**

(أ) استنتاج صيغة قانون التوزيع الهندسي الزائد:

مثال 1. صندوق به 6 كريات منها 4 بيضاء و2 حمراء. نسحب بدون إرجاع 3 كريات.

احسب احتمال الحصول على كرتين بيضاوين، 3 كريات بيضاء، كرية واحدة بيضاء، ولا كرية بيضاء.

نفترض أننا نسحب من صندوق كريات **بدون إرجاع** عددها n، إذا كان الصندوق يحتوي على N كرية منها b بيضاء و r حمراء (N = b + r) فإن احتمال الحصول على عدد معين $x \le b$ من الكريات البيضاء يمكن أن نحصل عليه من خلال القانون الكلاسيكي للاحتمالات (ع الحالات الملائمة / ع الحالات الممكنة) وذلك باستخدام التوفيقات:

$$\boxed{P(X=x) = \frac{C_b^x \cdot C_r^{n-x}}{C_N^n}}$$

تسمى هذه الصيغة: قانون التوزيع الهندسي الزائد ونكتب **X ~ H(N, b, p)** حيث:

$p = b/N$ و $q = r/N = 1-p$

يمكن الآن الإجابة على أسئلة المثال كما يلي:

$P(X=2) = C_4^2 \,.\, C_2^1 / C_6^3 = 12/20$, $P(x=3) = C_4^3 \,.\, C_2^0 / C_6^3 = 1/5$ ، …

(ب) خصائص التوزيع الهندسي الزائد

$$\mu = np, \qquad \sigma^2 = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

7 التوزيع الهندسي الزائد المتعدد: **Multivariate Hypergeometric Distribution**

(أ) استنتاج صيغة قانون التوزيع الهندسي الزائد المتعدد

يمكن بسهولة تعميم القانون السابق على حالة وجود أكثر من صنفين (k صنف)، حيث من كل صنف لدينا Ni كرية، ($\Sigma Ni = N$) ، ولحساب احتمال نتيجة معينة؛ مثلا 2 كريات بيضاء ($X_1 = 2$) ، 5حمراء، 1 زرقاء، . . . يمكن حساب عدد الحالات الملائمة والممكنة من خلال التوفيقات كما يلي:

$$\boxed{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots X_k = x_k) = \frac{C_{N_1}^{x_1} C_{N_2}^{x_2} \ldots C_{N_k}^{x_k}}{C_N^n} \qquad \sum_1^k N_i = N, \sum_1^k x_i = n}$$

(ب) **خصائص التوزيع الهندسي الزائد المتعدد**

$$E(X_i) = n\frac{N_i}{N} = np_i$$

جامعة زيان عاشور – الجلفة –

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

المستوى: السنة الثانية **المقياس: إحصاء 03** **قسم : علوم التسيير**

التوزيع الاحتمالي	متى يستخدم	القيم الممكنة للمتغيرة	الاحتمال	التوقع والتباين
الهندسي الزائد **X~ H(N, b,p)**	سحب بدون إرجاع. كريات من صنفين.	$X = \{0,1,2,\ldots,b\}$, $b \leq b + r = N$	$P(X = x) = \frac{C_b^x \cdot C_r^{n-x}}{C_N^n}$	$\mu = np,$ $\sigma^2 = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ $q = r/N$ و $p = b/N$ n عدد الكريات المسحوبة N العدد الكلي للكريات b عدد الكريات البيضاء r ع الكريات الحمراء
الهندسي الزائد المتعدد	نفس شروط الهندسي الزائد مع وجود أكثر من صنفين من الكريات.	$X_i = \{0,1,2,\ldots,N_i\}$, $\Sigma x_i = n$, $\Sigma N_i = N$	$P(X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots X_k=x_k)=$ $= \frac{C_{N1}^{x1} C_{N2}^{x2} C_{N3}^{x3} \cdots C_{Nk}^{xk}}{C_N^n}$	$E[X_i] = n (N_i/N) = np_i$
X~B(1,p) برنولي	تجربة واحدة (غير مكررة) تقبل نتيجتين.	$X = \{0, 1\}$	$P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p = q$	$E(X) = p$, $V(X)= pq$
X~B(n, p)الثنائي	تجارب ثنائية النتيجة، مكررة ومستقلة (p ثابت).	$X = \{0,1,2\ldots,n\}$	$P(X = x) = C^x_n p^x q^{n-x}$ $C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$	$E(X)= np$, $V(X) = npq$
باسكال (الثنائي السالب)	X هي عدد التجارب اللازمة للحصول على عدد r من النجاحات في تجارب برنولية مكررة.	$X = \{r, r+1, r+2, \ldots, +\infty\}$	$P(X = x) = C^{r-1}_{x-1} p^r q^{x-r}$	$E(X) = r/p$, $V(X)= rq/p^2$
الهندسي	X هي عدد التجارب اللازمة للحصول على النجاح الأول في تجارب برنولية مكررة.	$X = \{1,2,\ldots,+\infty\}$	$P(X = x) = q^{x-1}p$	$E(X) = 1/p$, $V(X) = q/p^2$
X~P(λ) بواسون **$\lambda > 0$**	X عدد النجاحات في عدد كبير جدا من التجارب البرنولية (عدد الوحدات التالفة في شحنة). أو أيضا عدد من الأحداث في فترة زمن.	$X = \{0,1,2,\ldots,+\infty\}$	$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ $P(X = 0) = e^{-\lambda}$ $P(X \geq 1) = 1 - e^{-\lambda}$	$E(x) = V(x) = \lambda$