**Université ZIANE Achour - Djelfa**
**Faculté des Sciences Exactes et Informatique**
**Département de Physique**
**Niveau : M1 – Physique de la matière condensée** **Date : 09/06/2019, Durée 1H30**

## Matière : Méthodes mathématiques pour la physique -II-

### Exercice N°1 [10 points] :

On considère $\mathbb{R}^3$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit $A$ une matrice définie comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\forall\ \vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$, le triplet $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ à déterminer. (1)
2. Montrer que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Comment appelle-t-on cette base. (1,5)
3. Déduire que la dimension $(\dim(\mathbb{R}^3) = 3)$. (0,5)
4. Décomposer $A$ en deux matrices l'une symétrique ***SY*** et l'autre antisymétrique ***AN***. (2,5)
5. Montrer que les vecteurs $\vec{w}_1 = (1,0,1), \vec{w}_2 = (1,1,0), \vec{w}_3 = (0,0,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. (1)
6. Calculer la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la nouvelle base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$. (1,5)
7. Calculer l'application $f$ qui vérifiée $[f]_{\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}}^{\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}} = A$. (0,5) +
8. Calculer la matrice $B$ de $f$ relative à la base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ c'est-à-dire, $B = [f]_{\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3\}}^{\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3\}}$. (2)

### Exercice N°2 [10 points] :

On considère $\mathbb{R}^3$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application définie comme suit :

$$f\left[(x, y, z)\right] = (4x - y, 3y, x - y + 3z)$$

1. Montrer que $f$ vérifiée bien une application linéaire sur $\mathbb{R}^3$. (1)
2. Soit $A$ la matrice représentative par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire que $A = [f]_{\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}}^{\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}}$, avec $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_2\}$ base canonique de $\mathbb{R}^3$ ; Calculer cette matrice $A$. (1)
3. Caractériser le noyau de $f$ et trouver sa dimension. (1)
4. Caractériser l'image de $f$ et trouver sa dimension. (1)
5. $f$ est-elle bijective ? Comment appelle-t-on l'application $f$. (1)

**6.** Soit l'ensemble $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z=0\}\subset\mathbb{R}^3$. Montrer que $E$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Caractériser l'ensemble $f\,(E)$. 1 1

**7.** Montrer que $A$ est matrice inversible. 1

**8.** Calculer la matrice inverse $A^{-1}$. 1

**9.** Ecrire le système $(S)$ suivant, sous forme $AX=C$. $X$ et $C$ deux matrices à déterminer. 1

$$(S):\begin{cases}-y+4z=1\\ 2x+3y=-1+2x\\ 3x-y+z=2\end{cases}$$

**10.** Déduire la solution de système $(S)$. 1

**Bon courage**

7

Corrigé-type Examen  Au 2018/2019

Mathématiques pour la physique -II-

M1- Physique de la matière condensée

## EXO N°1 (10 points) :

1) On a $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \vec{v} = (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z)$

donc $\vec{v} = x\underbrace{(1,0,0)}_{\vec{e_1}} + y\underbrace{(0,1,0)}_{\vec{e_2}} + z\underbrace{(0,0,1)}_{\vec{e_3}}$ avec 0,5

$\vec{e_1} = (1,0,0)$, $\vec{e_2} = (0,1,0)$, $\vec{e_3} = (0,0,1)$ 0,5

2) Montrons que $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$

2-a) $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ partie génératrice de $\mathbb{R}^3$ ?

on $\forall\ \vec{v} = (x, y, z) = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$ donc

$\mathbb{R}^3 = \langle \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3} \rangle$ c'est à dire que la partie

$\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ génère tous les vecteurs $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$.

$\Downarrow$

$\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ partie génératrice de $\mathbb{R}^3$. 0,5

2-b) $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ partie libre de $\mathbb{R}^3$ ?

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, calculons $\alpha, \beta, \gamma$ avec

$\alpha(\vec{e_1}) + \beta(\vec{e_2}) + \gamma(\vec{e_3}) = \vec{0}_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$.

$\Downarrow$

$\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

donc la partie $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ 0,5 de ⓐ et ⓑ la partie $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

*) Cette base est appelée base canonique de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$. 0,5

3) <u>Déduction de dimension de l'espace $\mathbb{R}^3$</u>

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \text{Card}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} = 3$$ 0,5

4) <u>Décomposition de la matrice A en une matrice symétrique SY et une autre antisymétrique AN</u>

$$\begin{cases} A = SY + AN \\ {}^tA = {}^t(SY) + {}^t(AN) = SY - AN \end{cases}$$ 0,5

$$SY = \frac{A + {}^tA}{2}, \quad AN = \frac{A - {}^tA}{2}$$ 0,5 0,5

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A + {}^tA = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \quad A - {}^tA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*) <u>Matrice symétrique</u>: $SY = \dfrac{A + A^t}{2} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$ 0,5

* <u>Matrice antisymétrique</u>: $AN = \dfrac{A - {}^tA}{2} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ 0,5

5) Montrons que $\{\vec{w_1}=(1,0,1), \vec{w_2}=(1,1,0), \vec{w_3}=(0,0,1)\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ :

a) $\{\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_2}\}$ partie libre de $\mathbb{R}^3$ ?

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ; calculons $\alpha, \beta, \gamma$ avec.

$$\alpha \vec{w_1} + \beta \vec{w_2} + \gamma \vec{w_2} = \vec{0}_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0).$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha(1,0,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$\Downarrow$$

$$(\alpha, 0, \alpha) + (\beta, \beta, 0) + (0,0,\gamma) = (0,0,0)$$

$$\Downarrow$$

$$(\alpha+\beta, \beta, \alpha+\gamma) = (0,0,0)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \beta=0 \\ \alpha+\gamma=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta=0 \\ \alpha=-\beta=0 \\ \gamma=-\alpha=0 \end{cases} \rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

donc la partie $\{\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

0,5

b) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Comme on sait que } \dim(\mathbb{R}^3)=3 \\ \text{et} \\ \{\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}\} \text{ partie libre de } \mathbb{R}^3 \end{array} \right.$ 0,5

$$\Downarrow \text{(théorème)}$$

$\{\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

c) Calcul de la matrice de passage $P$ de la base canonique $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ à la base $\{\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}\}$.

$$\vec{w}_1 = (1,0,1) = 1.\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 1.\vec{e}_3$$
$$\vec{w}_2 = (1,1,0) = 1.\vec{e}_1 + 1.\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 \quad \Rightarrow \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
$$\vec{w}_3 = (0,0,1) = 0.\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 1.\vec{e}_3$$

0,5 1

8) Calcul de la matrice B de f relative à base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$

c'est à $B = [f]_{\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3\}}^{\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3\}}$.

a) Méthode 1 (En utilisant la définition) : 2pts

$$\begin{cases} f(\vec{w}_1) = (4,0,4) = 4\vec{e}_1 + 4\vec{e}_3 \\ f(\vec{w}_2) = (3,3,0) = 3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 \quad \text{0,5} \quad \cdots \text{(I)} \\ f(\vec{w}_2) = (0,0,3) = 3\vec{e}_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{w}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \\ \vec{w}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{w}_3 = \vec{e}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{w}_1 - \vec{w}_3 \\ \vec{e}_2 = -\vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \vec{w}_3 \quad \cdots \text{(II)} \\ \vec{e}_3 = \vec{w}_2 \quad \text{0,5} \end{cases}$$

remplaçant (II) dans (I)

$$\begin{cases} f(\vec{w}_1) = 4\vec{w}_1 + 0\vec{w}_2 + 0\vec{w}_3 \\ f(\vec{w}_2) = 0\vec{w}_1 + 3\vec{w}_2 + 0\vec{w}_3 \quad \text{0,5} \\ f(\vec{w}_3) = 0\vec{w}_1 + 0\vec{w}_2 + 3\vec{w}_3 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$B = [f]_{\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3\}}^{\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3\}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{0,5}$$

b) Méthode 2) En utilisant le théorème. 2pts

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\quad f \quad} \mathbb{R}^3$$

$$\begin{tikzcd} \{e_1, e_2, e_3\} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P"'] & \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \arrow[d, "P"] \\ \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\} \arrow[r, "B"] & \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\} \end{tikzcd} \quad \text{0,5}$$

4

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

on a dans le système (II) : $\begin{cases} \vec{e_1} = \vec{w_1} + 0\vec{w_2} - \vec{w_3} \\ \vec{e_2} = -\vec{w_1} + \vec{w_2} + \vec{w_3} \\ \vec{e_3} = 0\vec{w_1} + 0\vec{w_2} + \vec{w_3} \end{cases}$ 0,5

donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 0,5

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$ 0,5

7) $[f]_{\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}}^{\{e_1, e_2, e_3\}} = A \Leftrightarrow f(\vec{u}) = A \cdot \vec{u} \,/\, \vec{u} = (x, y, z)$

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x, y, z) \longmapsto \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow f[(x, y, z)] = (4x - y, 3y, x - y + 3z)$

0,5

5

EX 02 (10 points) :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto f[(x,y,z)] = (4x-y, 3y, x-y+3z)$$

1) Montrons que f vérifiée bien une application linéaire

a) on $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ le couple $(4x-y, 3y, x-y+3z)$ existe dans $\mathbb{R}^3 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}^3 \Rightarrow f$ est une application. 0,25

b) f est linéaire dans $\mathbb{R}^3$, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ?

*) Soient $\vec{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v_2} = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}$.

$\vec{v_1} + \vec{v_2} = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$.

$$f(\vec{v_1}+\vec{v_2}) = f[(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)]$$
$$= (4(x_1+x_2)-(y_1+y_2), 3(y_1+y_2), (x_1+x_2)-(y_1+y_2)+3(z_1+z_2))$$
$$= ((4x_1-y_1)+(4x_2-y_2), 3y_1+3y_2, (x_1-y_1+3z_1)+(x_2-y_2+3z_2))$$
$$= (4x_1-y_1, 3y_1, x_1-y_1+3z_1)+(4x_2-y_2; 3y_2, x_2-y_2+3z_2)$$
$$= f[(x_1,y_1,z_1)] + f[(x_2,y_2,z_2)].$$
$$= f(\vec{v_1}) + f(\vec{v_2}).$$ 0,25

**) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$\lambda.\vec{v} = \lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

$$f(\lambda \vec{v}) = f[(\lambda x, \lambda y, \lambda z)] = (4(\lambda x)-(\lambda y),\ 3(\lambda y),\ (\lambda x)-(\lambda y)+3(\lambda z))$$

$$= (\lambda(4x-y),\ \lambda(3y),\ \lambda(x-y+3z))$$

$$= \lambda(4x-y,\ 3y,\ x-y+3z)$$

$$= \lambda f[(x,y,z)] = \lambda f(\vec{v}). \quad 0{,}25$$

de ⊛ et ⊛⊛ l'application $f$ est linéaire. 0,25

2) Calcul de $A = [f]_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}}^{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}}$.

$$f(\vec{e}_1) = f[(1,0,0)] = (4,0,1) = 4\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 1.\vec{e}_3$$

$$f(\vec{e}_2) = f[(0,1,0)] = (-1,3,-1) = -\vec{e}_1 + 3.\vec{e}_2 - 1\vec{e}_3 \quad 0{,}5$$

$$f(\vec{e}_3) = f[(0,0,1)] = (0,0,3) = 0.\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$$

$$\boxed{A = [f]_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}}^{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}} \quad 0{,}5$$

3) Caractérisation du noyau de $f$ :

$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}\{\vec{0}_{\mathbb{R}^3}\} = \{\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f(\vec{v}) = f[(x,y,z)] = (0,0,0)\} \quad 0{,}25$$

$$f[(x,y,z)] = (4x-y,\ 3y,\ x-y+3z) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} 4x-y=0 \\ 3y=0 \\ x-y+3z=0 \end{cases} \xrightarrow{\Downarrow} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\frac{y}{4}=0 \\ z=(y-x)/3=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(0,0,0) \quad 0{,}25$$

2

donc $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\} = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^3}\} \Rightarrow \dim(\operatorname{Ker} f) = 0$

0,25 0,25

4) Caractérisation de l'image de $f$ ?

$$\operatorname{Im} f = \{ f(\vec{v}) \, / \, \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \}$$

On sait que $\mathbb{R}^3 = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = \langle (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \rangle$

$\Downarrow$ théorème 0,25

$$f(\mathbb{R}^3) = \operatorname{Im} f = \langle f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3) \rangle$$

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = f[(1,0,0)] = (4,0,1) = \vec{u}_1 \\ f(\vec{e}_2) = f[(0,1,0)] = (-1,3,-1) = \vec{u}_2 \\ f(\vec{e}_3) = f[(0,0,1)] = (0,0,3) = \vec{u}_3 \end{cases}$$ 0,25

montrons que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ sont libres ?

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ calculons :

$$\alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2 + \gamma \vec{u}_3 = \vec{0}_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow (4\alpha, 0, \alpha) + (-\beta, 3\beta, -\beta) + (0, 0, 3\gamma) = (0,0,0)$$

$$\Downarrow$$

$$(4\alpha - \beta, 3\beta, \alpha - \beta + 3\gamma) = (0,0,0)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 4\alpha - \beta = 0 \\ 3\beta = 0 \\ \alpha - \beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = \frac{\beta}{4} = 0 \\ \gamma = (\beta - \alpha)/3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

donc les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ sont libre dans $\mathbb{R}^3$.

Comme $\left\{\begin{array}{l} \mathrm{Im} f = \langle \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3} \rangle \\ \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\} \text{ libre dans } \mathbb{R}^3 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{théorème}} \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$ base ~~de $\mathbb{R}^3$~~ de $\mathrm{Im} f$.

donc $\dim(\mathrm{Im} f) = \mathrm{Card}\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ 0,25

$$\boxed{\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3}$$ 0,25

5) Nature de $f$.

a) $\ker f = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^3}\} \Rightarrow \dim(\ker f) = 0 \xrightarrow{\text{théorème}} f$ injective 0,25

b) $\mathrm{Im} f = f(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{théorème}} f$ est surjective 0,25

de ⓐ et ⓑ donc $f$ est application bijective 0,25

*) $f$ est appelée automorphisme (endomorphisme 0,25 bijective).

6) Montrons que $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$ est s.e.v de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$ : $\boxed{\vec{0}_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in E}$ ok

a) Soit $\vec{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v_2} = (x_2, y_2, z_2) \in E$.

0,25 $\left.\begin{array}{l} \vec{v_1} \in E \Rightarrow x_1 + y_1 + z_1 = 0 \\ \vec{v_2} \in E \Rightarrow x_2 + y_2 + z_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = 0$

donc le vecteur de composantes $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in E$

donc $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in E$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in E.$$

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{v} = (x, y, z) \in E$.

0,25

$\vec{v} \in E \Rightarrow x+y+z=0$

$\Rightarrow \lambda(x+y+z)=0$

$\Rightarrow (\lambda x)+(\lambda y)+(\lambda z)=0$

donc le vecteur de composantes $(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in E$

$$\Downarrow$$

$$\lambda(x, y, z) \in E$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda \vec{v} \in E.$$

de ⓐ et ⓑ $E$ est s.e.v de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$.

0,5

6**) Caractérisation de $f(E)$

trouvons une base de $E$ :

$\vec{v} \in E \Rightarrow x+y+z=0 \Rightarrow z=-x-y$

$\vec{v} = (x, y, z) = (x, y, -x-y) = (x, 0, -x) + (0, y, -y)$

$= x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$

donc $E = \langle (1, 0, -1), (0, 1, -1) \rangle$ 0,25

5

Montrons $(1,0,-1)$ et $(0,1,-1)$ sont libre dans $E$.

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, Calculons $\alpha(1,0,-1)+\beta(0,1,-1)=(0,0,0)$

$$\Downarrow$$

$$(\alpha, \beta, -\alpha-\beta)=(0,0,0)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=0$$

donc les vecteurs $(1,0,-1)$ et $(0,1,-1)$ sont libre dans $E$.

Comme $\left\{ \begin{array}{l} E=\langle (1,0,-1), (0,1,-1)\rangle \\ \text{et} \\ \{(1,0,-1), (0,1,-1)\} \text{ libre dans } E \end{array} \right\}$

$$\Downarrow$$

$\{(1,0,-1), (0,1,-1)\}$ est base de $E$.

0,25

$$\Downarrow$$

$$\dim E = \operatorname{card}\{(1,0,-1), (0,1,-1)\} = 2$$

$$\cancel{E}=\langle (1,0,-1), (0,1,-1)\rangle \xrightarrow{\text{théorème}} f(E)=\langle f(1,0,-1), f(0,1,-1)$$

$$\begin{cases} f[(1,0,-1)]=(4,0,-2) \\ f[(0,1,-1)]=(-1,3,-4) \end{cases}$$

$f(E)=\langle (4,0,-2), (-1,3,-4)\rangle$, $\dim f(E)=2$

0,25 0,25

6

7) Montrons que A est inversible :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

les vecteur lignes sont $(4,-1,0)$, $(0,3,0)$, $(1,-1,3)$

→ Montrons que ces vecteurs sont linéairements indépendants dans $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$ :

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, Calculons

$$\alpha(4,-1,0) + \beta(0,3,0) + \gamma(1,-1,3) = (0,0,0).$$

$$\Downarrow$$

$$(4\alpha + \gamma, -\alpha + 3\beta - \gamma, 3\gamma) = (0,0,0).$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 4\alpha + \gamma = 0 \\ -\alpha + 3\beta - \gamma = 0 \\ 3\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha = -\frac{\gamma}{4} = 0 \\ \beta = \frac{\gamma + \alpha}{3} = 0 \end{cases}$$

0,5 $\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

donc les vecteurs lignes $(L_1, L_2, L_3)$ sont linéairements indépendants $\xrightarrow[\text{Theorème}]{}$ A est inversible.

0,5

8) Calcul de la matrice inverse $A^{-1}$ ;

~~$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} A \cdot X = B$~~

Soit $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

$$A\cdot X = Y \Rightarrow \underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}\cdot X = A^{-1}\cdot Y \Rightarrow \underbrace{I\cdot X}_{X} = A^{-1}\cdot Y$$

pivot $\neq 0$.

$$\Rightarrow \boxed{X = A^{-1}\cdot Y} \quad \text{cherchons } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X.$$

0,25

$$\begin{pmatrix} \boxed{4} & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$ Notation

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 0 & x_1 \\ 0 & 3 & 0 & x_2 \\ 1 & -1 & 3 & x_3 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

0,25

$\Downarrow$ transformation ①

$$\begin{array}{l} L_1' = L_1 \\ L_2' = L_2 \\ L_3' = 4L_3 - L_1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 0 & x_1 \\ 0 & 3 & 0 & x_2 \\ 0 & -3 & 3 & x_3 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 4y_3 - y_1 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$ transformation ②

$$\begin{array}{l} L_1'' = L_1' \\ L_2'' = L_2' \\ L_3'' = L_3' + L_2' \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 0 & x_1 \\ 0 & 3 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 3 & x_3 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ -y_1 + y_2 + 4y_3 \end{pmatrix}.$$

0,25

donc on a: $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = y_1 \\ 3x_2 = y_2 \\ 3x_3 = -y_1 + y_2 + 4y_3 \end{cases}$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(y_1 + x_2) = \frac{1}{4}\left(y_1 + \frac{1}{3}y_2\right) = \frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{12}y_2 \\ x_2 = \frac{1}{3}y_2 \\ x_3 = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{4}{3}y_3 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{Y},$$

donc $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}}$ 0,25

9) $S: \cancel{\begin{cases} -z - y + 3x = 0 \; \cdots (1) \\ 3y + 3x = 3x \; \cdots (2) \\ +y - 4z = 8 \; \cdots (3) \end{cases}} \Rightarrow \cancel{\begin{cases} 4z - y = -8 \; \cdots (3) \\ 3x = 0 \; \cdots (2) \\ z + 2x + 3y = \end{cases}}$

$$S: \begin{cases} -y + 4z = 1 \\ 2\cancel{x} + 3y = -1 + 2\cancel{x} \\ 3x - y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4z - y = 1 \\ 3y = -1 \\ z - y + 3x = 2 \end{cases}$$

0,25

$$(S) : \begin{cases} 4z - y + 0x = 1 \\ 0z + 3y + 0x = -1 \\ z - y + 3x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{C}$$

0,25 0,5

9) Solution du système S :

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

0,5

$$\begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{12} - \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{8-2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{12} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{(x, y, z) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)}$ 0,5

Fin

(10).