Centre universitaire ZIANE Achour de Djelfa
Institut des Sciences Economiques, Commerciales et de Gestion
Département de Gestion
$2^{ème}$ année gestion **Module : Maths 2**

SYNTHESE DE MATHEMATIQUES **DUREE : 1H : 30min**

Exercice n°1 : *(10pts)*

On considère les trois ensembles suivants :

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z)/x,y,z \in \mathbb{R}\}, E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x+y+z=0\},$$

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x=y=z\}$$

1. Montrer que le vecteur $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ s'écrit $\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ avec $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ à déterminer. Conclure. 1
2. Montrer que la famille $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$. 1
3. Déduire que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. 0,5
4. Déduire la dimension $\mathbb{R}^3$. 0,5
5. Montrer que E et F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$. 2
6. Trouver une base pour E et F. 2
7. Quelles sont les dimensions des deux sous-espaces de E et F. 1
8. Montrer que $\dim(E+F) = 3$ et que $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim E + \dim F$ 1
9. Déduire que E et F sont deux sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. $(\mathbb{R}^3 = E \oplus F)$. 1

Exercice n°2: *(10pts)*

Soient les matrices suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Calculer P^{-1}. 0,5
2) Calculer $D = P^{-1}AP$. 0,5
3) Déduire que A est diagonalisable. 0,5
4) Déduire les valeurs et les vecteurs propres de A. 1

5) Résoudre le système différentiel suivant: 1

$$(S):\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -x + 2y \end{cases} \quad \text{avec} \quad x' = \frac{dx}{dt}, \quad y = \frac{dy}{dt}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

6) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$ 1

7) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ et les relations de récurrences :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2v_n \end{cases}$$

a) Calculer u_n et v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. 1

8) Calculer les valeurs et les vecteurs propres de la matrice A . 2

9) En déduire les sous-espaces propres de A . 0,5

10) La matrice A est-elle diagonalisable? 1

11) Ecrire la matrice A sous forme $A = TBT^{-1}$ en précisant les deux matrices T et B . 1

Corrigé de La synthèse

$2^{ème}$ année Gestion

EXO N° 1 : (10 pts) :

1) a) Montrons que $\forall \vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ s'écrit sous forme $\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ avec $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$.

$$\vec{v} = (x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, y)$$

$$= x\underbrace{(1, 0, 0)}_{\vec{e}_1} + y\underbrace{(0, 1, 0)}_{\vec{e}_2} + y\underbrace{(0, 0, 1)}_{\vec{e}_3}$$

$$= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$ avec

$\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$. 0,5

b) Conclusion : $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ est une partie génératrice de $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^3 = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$. 0,5

2) Montrons que la partie $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ est une partie libre de $\mathbb{R}^3$.

on a $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.1.1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ est partie libre dans $\mathbb{R}^3$. 1

3) Déduction que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\left.\begin{array}{l} \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \text{ libre dans } \mathbb{R}^3 \\ \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \text{ génératrice de } \mathbb{R}^3 \end{array}\right\} \Rightarrow \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.$$ 0,5

4) <u>Deduction de la dimension de $\mathbb{R}^3$:</u>

$\dim(\mathbb{R}^3) = \mathrm{card}\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\} = 3$ 0,5

5) <u>a)</u> <u>Montrons que E est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:</u>

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0\}.$$

Soient $\vec{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v_2} = (x_2, y_2, z_2) \in E$ et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \vec{v_1} \in E \\ \vec{v_2} \in E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 = 0 \\ x_2 + y_2 + z_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha z_1 = 0 \\ \beta x_2 + \beta y_2 + \beta z_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2) = 0 \Rightarrow$$

$$(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) \in E \Rightarrow$$

$$(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) + (\beta x_2, \beta y_2, \beta z_2) \in E \Rightarrow$$

$$\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) \in E \Rightarrow$$

$\alpha \cdot \vec{v_1} + \beta \cdot \vec{v_2} \in E \Rightarrow E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. 1

<u>b)</u> <u>Montrons que F est sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.</u>

Soient $\vec{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v_2} = (x_2, y_2, z_2) \in F$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \vec{v_1} \in F \\ \vec{v_2} \in F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 = z_2 \\ x_2 = y_2 = z_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha x_1 = \alpha y_1 = \alpha z_1 \\ \beta x_2 = \beta y_2 = \beta z_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$(\alpha x_1 + \beta x_2) = (\alpha y_1 + \beta y_2) = (\alpha z_1 + \beta z_2) \Rightarrow$

$(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) \in F \Rightarrow$

$(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) + (\beta x_2, \beta y_2, \beta z_2) \in F \Rightarrow$

$\alpha (x_1, y_1, z_1) + \beta (x_2, y_2, z_2) \in F \Rightarrow$

$\alpha \vec{v_1} + \beta \vec{v_2} \in F \Rightarrow F$ est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. 1

6) a) base de E :

*) $\vec{v} = (x, y, z) \in E \Rightarrow x + y + z = 0 \Rightarrow z = -x - y$

$\Rightarrow \vec{v} = (x, y, -x-y) \in E$.

$\vec{v} = (x, y, z) = (x, y, -x-y) = (x, 0, -x) + (0, y, -y)$

$= x \underbrace{(1, 0, -1)}_{\vec{u_1}} + y \underbrace{(0, 1, -1)}_{\vec{u_2}} \Rightarrow \{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$ est une partie génératrice de E $\Rightarrow E = \langle \vec{u_1}, \vec{u_2} \rangle$.

0,5

**) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$\alpha \vec{u_1} + \beta \vec{u_2} = \vec{0}_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, -1) = (0, 0, 0) \Rightarrow$

$(\alpha, 0, -\alpha) + (0, \beta, -\beta) = (\alpha, \beta, -\alpha-\beta) = (0, 0, 0) \Rightarrow$

$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ -\alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \Rightarrow \{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$ est libre dans E.

0,5

de (*), (**) $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$ est base de E.

b) base de F :

*) $\vec{v} = (x, y, z) \in F \Rightarrow x = y = z \Rightarrow \vec{v} = (x, x, x) \in F$

$\vec{v} = x(1,1,1) \in F \Rightarrow \{(1,1,1)\}$ est une partie génératrice de F $\Rightarrow F = \langle \underbrace{(1,1,1)}_{\vec{u_3}} \rangle = \langle \vec{u_3} \rangle$

**) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \vec{u_3} = \vec{0}_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha(1,1,1) = (0,0,0) \Rightarrow$

$(\alpha, \alpha, \alpha) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \{\vec{u_3}\}$ est libre dans F.

de (*) et (**) $\{\vec{u_3}\}$ est une base de F. 1

7) a) dimension de E :

$\dim(E) = \text{Card}\{\vec{u_1}, \vec{u_2}\} = 2$ 0,5

b) dimension de F :

$\dim(F) = \text{Card}\{\vec{u_3}\} = 1$ 0,5

8) a) Montrons que $\dim(\langle E+F \rangle) = 3$:

0,5

*) $E + F = \{\vec{u} + \vec{v} \,/\, \vec{u} \in E \text{ et } \vec{v} \in F\}$.

Soient $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \in E$ et $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \in F$.

$$\begin{cases} \vec{u} \in E \\ \vec{v} \in F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 = 0 \\ x_2 = y_2 = z_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -x_1 - y_1 \\ x_2 = y_2 + z_2 \end{cases}$$

le vecteur $\vec{u}+\vec{v} \in E+F \Rightarrow (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in E+F \Rightarrow$

$(x_1, y_1, -x_1 - y_1) + (x_2, x_2, x_2) \in E+F \rightarrow$

$(x_1, 0, -x_1) + (0, y_1, -y_1) + (x_2, x_2, x_2) \in E+F \Rightarrow$

$$x_1 \underbrace{(1, 0, -1)}_{\vec{u_1}} + y_1 \underbrace{(0, 1, -1)}_{\vec{u_2}} + x_2 \underbrace{(1, 1, 1)}_{\vec{u_3}} \in E+F \Rightarrow$$

la partie $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$ est génératrice de $E+F \Rightarrow$

$$E+F = \langle \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3} \rangle$$

**) Calculons le déterminant $\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = ?$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\,(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(1+2) = 3 \neq 0$$

$\Delta' = 3 \neq 0 \Rightarrow \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$ est partie libre.

de * et ** la partie $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$ est une base de sous-espace $E+F \Rightarrow \dim(E+F) = \text{Card}\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\} = 3$

$$\dim(E+F) = 3$$

b) <u>Montrons que $\dim(E) + \dim(F) = \dim(\mathbb{R}^3)$</u> :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dim(E) = 2 \\ \quad \text{et} \\ \dim(F) = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \dim(E) + \dim(F) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

0,5