Chapitre I : Algèbre de Boole et simplification des fonctions logiques :

II.1 Introduction

Les systèmes logiques fonctionnent en mode binaire → les variables d'entrée et de sortie ne prennent que deux valeurs : « 0 » ou « 1 ». Ces valeurs (états) « 0 » et « 1 » correspondent à des plages définies à l'avance.

Exemple

- Technologie électrique TTL :
  « 1 » ↔ 2,4 à 5 V
  « 0 » ↔ 0 à 0,8 V

Les valeurs « 0 » et « 1 » ne représentent pas des nombres réels mais plutôt l'état d'une variable (logique) → on les appelle donc « niveaux logiques ».
Ces deux valeurs peuvent être nommées de différentes façons :

- Niveau logique « 1 » : Vrai, Fermé, Marche, Haut, Allumé, Oui ;
- Niveau logique « 0 » : Faux, Ouvert, Arrêt, Bas, Éteint, Non.

II.1.2 Types de logiques

On définit deux types de logiques :

- Logique positive :

- niveau haut → état logique « 1 » (5V)
- niveau bas → état logique « 0 » (0V)

- Logique négative :

- niveau haut → état logique « 0 » (5V)
- niveau bas → état logique « 1 » (0V)

La logique binaire basée sur l'algèbre de Boole permet de décrire dans un modèle mathématique les manipulations et traitement des informations binaires, et d'analyser les systèmes numériques.
Il existe 3 fonctions élémentaires dans l'algèbre de Boole : addition logique : appelée OU (OR), symbolisée par un plus : « + » ; multiplication logique : appelée ET (AND), symbolisée par un point : «•» ; complémentation : appelée NON (NOT), symbolisée par un surlignement: « ¯ »
- Tout circuit numérique peut être défini à l'aide d'une fonction logique (expression logique) qui représente la variable de la sortie en fonction des variables d'entrée.

II.2 Définitions

II.2.1 Variables logiques (variable booléenne)

Une variable logique est une variable peut prendre l'une des deux valeurs 0 ou 1 et, uniquement, ces deux valeurs. De manière générale, une variable logique peut être associée à un événement. Si ce dernier est vrai, alors la variable prend la valeur 1, dans le cas contraire (événement faux) la variable prend la valeur 0.

II.2.2 Fonction logique (Fonction booléenne)

Une fonction logique est une fonction qui peut avoir une ou plusieurs variables logiques et retourne l'une de deux valeurs 0 ou 1.

II.2.3 Table de vérité

La table de vérité d'une fonction logique représente les différentes combinaisons des variables impliquées dans la fonction et la valeur de cette fonction pour chacune de ces combinaisons. La table de vérité d'une fonction logique F à n variables booléennes est un tableau de $\boldsymbol{m}$ colonnes et de $\boldsymbol{k}$ lignes tels que :

$m=n+1$: Chaque colonne est associée à une variable et la dernière colonne est réservée pour la fonction.

$k=2^n$: Chaque ligne représente une combinaison des *n* variables.

Exemple

Considérons la fonction logique à deux variables *a, b*.

F prend la valeur ***vrai*** si $a=b=0$, sinon prend la valeur ***faux***.

La table de vérité correspondant est la suivante:

a	*b*	*F(a,b)*
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

II.2.4 Complément d'une variable booléenne

Soit *a* une variable logique. Le complément de la variable *a* désigné par $\overline{a}$ (appelée *a* bar) est variable qui satisfaite les conditions suivantes :

- si *a* est vrai alors $\overline{a}$ est faux et si *a* est faux, $\overline{a}$ est vrai
- Et si $\overline{a}$ est vrai alors *a* est faux et si $\overline{a}$ est faux *a* est vrai

II.3 Les opérations logiques

II.3.1 La somme logique (OU logique - OR)

Considérons deux variables logiques *a* et *b*. La somme logique des variables *a* et *b*, représentée par $a+b$, est définie par la table de vérité suivante :

a	*b*	*a+b*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a) Propriétés de la somme logique

Soient les variables logiques *a,b* et *c*. La somme logique satisfait les propriétés suivantes :

$a+0=a$	0 est l'élément neutre pour la somme logique
$a+1=1$	1 est l'élément absorbant pour la somme logique
$a+a=a$	Propriété d'idempotence
$a+\overline{a}=1$	Propriété de l'inverse par rapport à la somme logique
$a+b=b+a$	La somme logique est commutative
$a+(b+c)=(a+b)+c$	La somme logique est associative

b) La somme logique disjonctive (OU eXclusif- XOR)

Considérons deux variables logiques *a* et *b*. La somme logique disjonctive des variables *a* et *b*, représentée par $a \oplus b$ est définie par la table de vérité suivante :

a	b	$a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

II.3.2 Le produit logique (ET logique - AND)

Soient les deux variables logiques *a* et *b*. Le produit logique des deux variables *a* et *b*, représenté par *a.b* et défini par la table de vérité suivante :

a	b	$a \bullet b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a. Propriétés du produit logique

Soient les variables booléennes a,b et c. Le produit logique satisfait les propriétés suivantes :

$a.0=0$	0 est l'élément absorbant pour le produit logique
$a.1=a$	1 est l'élément neutre pour le produit logique
$a.a=a$	Propriété d'idempotence
$a \cdot \overline{a} = 0$	$\overline{a}$ est l'inverse de a par rapport au produit logique
$a.b=b.a$	Le produit logique est commutatif
$a.(b.c)=(a.b).c$	Le produit logique est associatif

II.3.3 Propriétés générales

Ces propriétés concernent la somme et produit logique :

a. La dualité

A toute propriété P correspond une propriété P* dite duale. On obtient la propriété duale P* d'une propriété P

- en inversant les opérateurs (+ et •) par (• et +)
- et en permutant les éléments neutres (0 pour la somme et 1 pour le produit) et les éléments absorbants

Exemple :

Propriété P	Propriété P*	
$a=a+a$	$a=a.a$	On a remplacé l'opérateur (+) par l'opérateur (.)
$a.0=0$	$a+1=1$	On a remplacé l'opérateur (.) par l'opérateur (+) On a remplacé (0) par (1)

b. La distributivité :

La somme logique est distributive par rapport au produit logique :

$a+(b.c)=(a+b).(a+c)$

Le produit logique est distributif par rapport à la somme logique :

$a.(b+c)=a.b+a.c$

c. L'absorption

$$a+a.b=a \qquad \text{(I)}$$

Démonstration :
On a :
$a=a.1$ On va remplacer le premier a par a.1 dans l'égalité (I) :
$a.1+a.b=a$
$a.(1+b)=a$ et on a $1+b=1$, donc :
$a+a.b=a$
La propriété duale de **(I)** est : $a.(a+b)=a$

d. L'inhibition

$$a+\overline{a}.b=a+b \text{ (II)}$$

Démonstration :
$a+\overline{a}.b=(a+\overline{a})(a+b)$ la somme logique est distributive par rapport au produit.
$a+\overline{a}=1$ donc :
$a+\overline{a}.b=a+b$
La propriété duale de (II) est : $a.(\overline{a}+b)=a.b$
Ainsi, les propriétés générales les plus importantes sont :

- $a+b.c=(a+b).(a+c)$
- $a.(b+c)=a.b+a.c$
- $a+\overline{a}.b=a+b$
- $a+a.b=a$

II.3.4 Théorèmes de De Morgan

Les théorèmes de De Morgan portent sur la complémentation de la somme logique et du produit logique, ainsi que la complémentation des variables logiques et des fonctions logiques de manière générale. Les lois de De Morgan sont :

$$\overline{a.b}=\overline{a}+\overline{b} \qquad (1)$$
$$\overline{a+b}=\overline{a}.\overline{b} \qquad (2)$$
$$\overline{\overline{a}}=a \qquad (3)$$

Pour démontrer ces propriétés, il suffit d'établir les tables de vérité correspondantes.

a	b	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$a.b$	$\overline{a.b}$	$\overline{a}+\overline{b}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

Pour montrer la propriété (2), il suffit de trouver la propriété duale de la propriété (1) :
$\overline{a+b}=\overline{a}.\overline{b}$ qui correspond bien à la propriété (2).
En ce qui concerne la propriété (3) :

a	$\overline{a}$	$\overline{\overline{a}}$
0	1	0
1	0	1

Ainsi, on vient de démontrer les deux lois de De Morgan.

II.3.5 Résumé d'importantes propriétés des opérateurs OU et ET

Propriété	OU	ET
Élément neutre	$a+0=a$	$a.1=a$
Élément absorbant	$a+1=1$	$a.0=0$
Idempotence	$a+a=a$	$a.a=a$
Complémentation	$a+\overline{a}=1$	$a.\overline{a}=0$
Commutativité	$a+b=b+a$	$a.b=b.a$
Associativité	$a+(b+c)$ $=(a+b)+c$	$a.(b.c)$ $=(a.b).c$
Distributivité	$a+(b.c)$ $=(a+b).(a+c)$	$a.(b+c)$ $=(a.b)+(a.c)$
Absorption	$a+a.b=a$	$a.(a+b)=a$
Inhibition	$a+\overline{a}.b=a+b$	$a.(\overline{a}+b)=a.b$
De Morgan	$\overline{a+b}=\overline{a}.\overline{b}$	$\overline{a.b}=\overline{a}+\overline{b}$

II.4 Représentation d'une fonction logique

Une fonction logique peut être représentée par deux manières différentes :

- Soit, par la table de vérité,
- Soit, par la forme algébrique.

II.4.1 Représentation par la table de vérité

On a déjà vu qu'on pouvait représenter une fonction par une table de vérité.

II.4.2 Représentation par la forme algébrique

On peut représenter une fonction logique en utilisant les opérations logiques déjà vues (somme logique et produit logique). On peut représenter n'importe quelle fonction logique par une table de vérité à partir de son expression algébrique.

Exemple 1

Considérons la fonction $f(a,b)=a.b+\overline{a}.\overline{b}$

$a.b$ et $\overline{a}.\overline{b}$ sont des ***termes algébriques***.

Pour représenter cette fonction par une table de vérité, procédons comme suit :

- On considère chaque terme algébrique (la fonction sous forme somme de produits) à part :

- On affecte à chaque variable la valeur 1(s'il y a une variable manquante, il faut la prendre en deux cas pour 0 et pour 1).

Dans notre cas : $a\rightarrow1$ et $b\rightarrow1$donc, on aura la combinaison $ab\rightarrow11$

- On affecte à chaque variable complémentée la valeur 0

Dans notre cas : $\overline{a}.\overline{b}=11$ donc, on aura $a\ b\rightarrow0\ 0$

- Dans la table de vérité, on met des 1 dans les cases correspondantes aux différentes combinaisons de variables qu'on a ainsi obtenues.

Dans notre exemple, nous avons obtenu les deux combinaisons:11 et 00, donc on aura la table de vérité suivante :

a	*b*	*f(a,b)*
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Pour les autres combinaisons qui ne figurent pas dans la fonction, des zéros (0).

Exemple2

Soit la fonction $f(a,b,c)=a.b.c+a.b.\overline{c}+\overline{a}.b.\overline{c}+\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}$

Il y a quatre termes algébriques. Pour chaque terme, on va déterminer la combinaison de variables correspondantes.

Le terme	*La combinaison*
$a.b.c$	111
$a.b.\overline{c}$	110
$\overline{a}.b.\overline{c}$	010
$\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}$	000

a	*b*	*c*	*f(a,b,c)*
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Exemple3

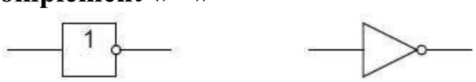
$f(a,b,c) = a.b + \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} + a\cdot\overline{b}\cdot c$ le terme *ab signifier deux cas* $ab\overline{c}$ *et* abc.

a	*b*	*c*	*f(a,b,c)*
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

II.5 Opérateurs logiques élémentaires et composés

Les fonctions logiques sont conçues à partir d'un groupe d'opérateurs élémentaires appelés « portes ». Chaque opérateur est représenté par un symbole et sa fonction est définie par une table de vérité.

II.5.1 NON (NOT) : complément « ¯ »



A	$S=\overline{A}$
0	1
1	0

II.5.2 ET (AND) : produit logique « . »

A	B	$S=A.B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Propriétés du AND :
$a.1 = a \quad a.\overline{a} = 0 \quad a.0 = 0 \quad a.a = a$
Élément neutre : 1

Élément absorbant : 0

II.5.3 OU (OR) : somme logique « + »

A	B	$S = A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Propriétés du OR :

$a + 1 = 1 \quad a + 0 = a \quad a + \overline{a} = 1 \quad a + a = a$

Élément neutre : 0
Élément absorbant : 1

Remarque

Les opérateurs {ET,OU,NON} permettent à eux trois de réaliser n'importe quelle fonction logique : on dit qu'ils forment un groupe complet.

II.5.4 NON-OU (NOR)

Les deux opérateurs OU et NON peuvent être combinés en un seul opérateur NON-OU (NOR): NON-OU est donc un opérateur complet.

A	B	$S = A + B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

II.5.5 NON-ET (NAND)

Les deux opérateurs ET et NON peuvent être combinés en un seul opérateur NON-ET (NAND): NON-ET est donc un opérateur complet.

A	B	$S = \overline{A.B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

II.5. 6 OU exclusif (XOR) « ⊕ »

A	B	$S = A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

! !

Propriétés du XOR :

$$a \oplus b = a\overline{b} + \overline{a}b = (a + b).(\overline{a} + \overline{b})$$

$$a \oplus a = 0 \quad et \quad a \oplus \overline{a} = 1$$

$$a \oplus 1 = \overline{a} \quad et \quad a \oplus 0 = a$$

$$a \oplus b = b \oplus a$$

$$a(b \oplus c) = ab \oplus ac$$

II.5.7 NON-OU exclusif (XNOR) (équivalence) $\odot$

A	B	$S = A \odot B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

II.6 Universalité des portes NAND et NOR

Rappelons que le théorème de De Morgan :

$\overline{a.b}=\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{a+b}=\overline{a}.\overline{b}$ et $\overline{\overline{a}}=a$

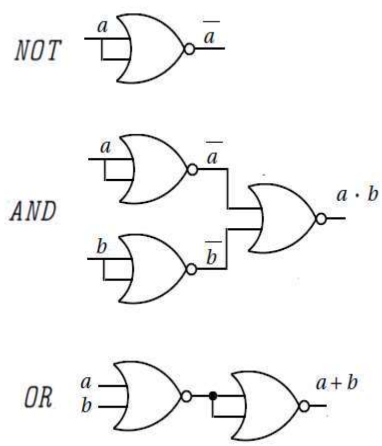
conséquence : Toutes les portes logiques élémentaires (ET , OU , NON) peuvent être réalisées avec des portes NOR ou NAND .

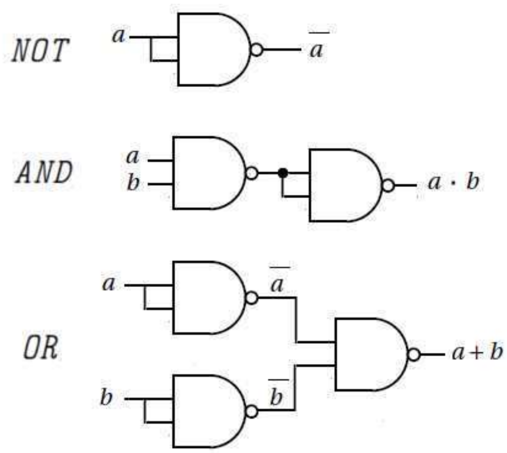
Pour l'opérateur NOR, on a :

$$\overline{a}=\overline{a+a}$$
$$a.b=\overline{\overline{a}+\overline{b}}$$
$$a+b=\overline{\overline{a+b}}$$

Et pour l'opérateur NAND, on a :

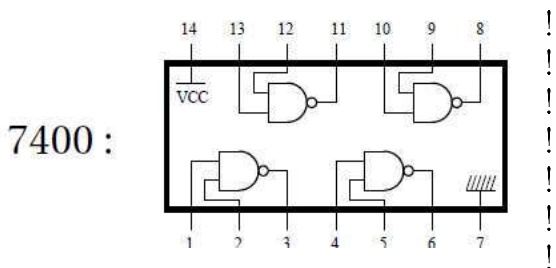
$$\overline{a}=\overline{a.a}$$
$$a.b=\overline{\overline{a.b}}$$
$$a+b=\overline{\overline{a}\,\overline{b}}$$





Exemple

Réalisation de la fonction $z=a.b+c.d$ à l'aide à l'aide du circuit intégré 7400 (contient 4 portes NAND).



On a :

$z=a.b+c.d=\overline{\overline{a.b+c.d}}=\overline{\overline{a.b}.\overline{c.d}}$ donc on doit utiliser 3 portes NAND comme suivant :