الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Ziane Achour Djelfa
Faculté des Sciences et de la Technologie

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة زيان عاشور
الجلفة
كلية العلوم والتكنلوجيا

Département de Génie Électrique

MÉTHODES NUMÉRIQUES

Cours

MOHAMMEDI Rédha Djamel

r.mohammedi@univ-djelfa.dz

Sommaire

Chapitre 1: Erreurs

1.1 Définitions

Soit x^* une valeur approchée d'un nombre donné x.

- **L'erreur absolue :** $\Delta(x) = |x - x^*| \le \Delta_x$; Δ_x est la borne supérieure de $\Delta(x)$.

  On écrit : $x = x^* \pm \Delta_x$ Δ_x est dit l'incertitude absolue de x .

  <u>*Exemple*</u> $L = (2.1 \pm 0.4)m$ Cette écriture signifie que la valeur exacte de L est comprise dans l'intervalle $[1.7,\ 2.5]m$.

- **L'erreur relative :** $r(x) = \dfrac{\Delta(x)}{|x^*|} \le \dfrac{\Delta_x}{|x^*|} \le r_x$; r_x est la borne supérieure de $r(x)$.

  $r_x\% = r_x \times 100$ $r_x\%$ est dit l'incertitude relative de x .

  <u>*Exemple 1*</u> $P = (25 \text{ à } 8\%)kg \Leftrightarrow P = (25 \pm 0.08 \times 25)kg = (25 \pm 2)kg$ Cette écriture signifie que la valeur exacte de P est compris dans l'intervalle $[23, 27]kg$.

  <u>*Exemple 2*</u> $I = (2.5 \pm 0.2)A \Leftrightarrow I = \left(2.5 \text{ à } \dfrac{0.2}{2.5} \times 100\%\right)A = (2.5 \pm 8\%)A$ Cette écriture signifie que la valeur exacte de I est compris dans l'intervalle $[23, 27]kg$.

- **Chiffres significatifs :** On appelle chiffres significatifs d'un nombre tous les chiffres de son écriture exceptés les zéros situés devant le premier chiffre non nul. <u>*Exemple*</u> 5048 possède 4 chiffres significatifs, 15.623 possède 5 chiffres significatifs et 0.0024003 possède 5 chiffres significatifs. 100.0 possède 4 chiffres significatifs.

1.2 Calculs d'incertitudes

Soient x et y deux quantités exactes positives, x^* et y^* deux approximations positives de x et y, Δx *et* Δy des erreurs absolues sur x et y.

Addition/Soustraction : Lorsqu'on additionne ou on soustrait des mesures, on doit additionner <u>les incertitudes absolues</u>.

Exemple

$$(4.35 \pm 0.02)+(2.12 \pm 0.01)=(6.47 \pm 0.03)$$

$$(4.35 \pm 0.02)-(2.12 \pm 0.01)=(2.23 \pm 0.03)$$

Multiplication/division par une constante : Lorsqu'on multiplie ou on divise des mesures par une constante, on doit multiplier ou diviser l'incertitude absolue par cette constante.

Exemple

$$(44.01 \pm 0.05)\times 2=(44.01\times 2 \pm 0.05\times 2)=(88.02 \pm 0.10)$$

$$\frac{(44.01 \pm 0.05)}{2}=\left(\frac{44.01}{2} \pm \frac{0.05}{2}\right)=(22.01 \pm 0.03)$$

Multiplication/division : Lorsqu'on multiplie ou on divise des mesures, on doit additionner les incertitudes relatives.

Exemple

$$\frac{(44.01 \pm 0.05)}{(2.10 \pm 0.05)}=\frac{\left(44.01\, à\, \frac{0.05}{44.01}\times 100\%\right)}{\left(2.10\, à\, \frac{0.05}{2.10}\times 100\%\right)}=\frac{(44.01\, à\ 0.11\%)}{(2.10\, à\, 2.38\%)}=\left(\frac{44.01}{2.10}\, à\ (0.11+2.38)\%\right)$$

$$=(20.96\, à\ 2.49\%)=\left(20.96 \pm \frac{2.49\times 20.96}{100}\right)=(20.96 \pm 0.52)$$

$$\begin{aligned}(44.01 \pm 0.05)\times(2.10 \pm 0.05)&=(44.01\, à\ 0.11\%)\times(2.10\, à\, 2.38\%)\\&=(44.01\times 2.10\, à\ (0.11+2.38)\%)=(92.42\, à\ 2.49\%)\\&=\left(92.42 \pm \frac{2.49\times 92.42}{100}\right)=(92.42 \pm 2.30)\end{aligned}$$

Puissance et racines : Lorsqu'on met la mesure a une puissance, on doit multiplier l'incertitude relative par la valeur de la puissance.

Exemple

$$(5 \pm 1)^3=(5\ à\ 20\%)^3=(5^3\ à\ 3\times 20\%)=(125\ à\ 60\%)=(125 \pm 75)$$

$$\sqrt[3]{(125 \pm 1)}=(125\ à\ 60\%)^{(1/3)}=\left(125^{(1/3)}\ à\ (1/3)\times 60\%\right)=(5\ à\ 20\%)=(5 \pm 1)$$

1.3 Troncature et Arrondissement d'un nombre

Pour approximer $\pi = 3.141592653589...$, on peut considérer la valeur approchée 3.14 ou encore 3.14159, etc.… et cela selon le besoin. Dans le premier cas on a tronque (couper en éliminant une partie) le nombre π après 2 décimales. Dans le second cas on l'a tronqué après 5 décimales.

Une méthode habituelle pour tronquer un nombre pour ne garder qu'un nombre fini de chiffres significatifs est *l'arrondi*:

Règle d'arrondissement

Pour arrondir un nombre jusqu'à n chiffres significatifs, il faut éliminer les chiffres à droite du $n^{ème}$ chiffre significatif conservé si on se trouve après la virgule. sinon on remplace par des zéros:

- Si le $(n+1)^{ème}$ chiffre significatif est >5 , on augmente le $n^{ème}$ chiffre de 1. Si par contre le $(n+1)^{ème}$ chiffre significatif est <5, les chiffres retenus restent inchangés.
- Si le $(n+1)^{ème}$ chiffre significatif est 5 alors deux cas sont possibles :
  - ✓ Tous les chiffres rejetés, situés après le $(n+1)^{ème}$ chiffre significatif, sont des zeros : on applique la règle du chiffre pair, ie : le $n^{ème}$ chiffre reste inchangé s'il est pair. On lui ajoute 1 s'il est impaire.
  - ✓ Parmi les chiffres rejetés, situés après le $(n+1)^{ème}$ chiffre significatif, il existe au moins un qui soit non nul : On ajoute 1 au $n^{ème}$ chiffre.

Exemples

1. Arrondir $x=0.7897$ à (03) chiffres significatifs.
   $0.789\boxed{7}$ $7>5 \rightarrow x^*=0.790$
2. Arrondir $x=0.753$ à (02) chiffres significatifs.
   $0.75\boxed{3}$ $3<5 \rightarrow x^*=0.75$
3. Arrondir $x=2.5456500$ à (05) chiffres significatifs.
   $2.5456\boxed{5}\underbrace{00}$ Tous les chiffres rejetés sont des zéros $\rightarrow$ la règle du chiffre pair, 6 est paire donc $x^*=2.5456$
4. Arrondir $x=2.5453500$ à (05) chiffres significatifs.
   $2.5453\boxed{5}\underbrace{00}$ Tous les chiffres rejetés sont des zéros $\rightarrow$ la règle du chiffre pair, 3 est impaire donc $x^*=2.5454$
5. Arrondir $x=2.5305023$ à (04) chiffres significatifs.
   $2.530\boxed{5}\underbrace{023}$ Parmi les chiffres rejetés il existe au moins un qui soit non nul $\rightarrow$ donc $x^*=2.531$

Chapitre 2: Résolution des équations non linéaires

2.1 Introduction

On considère une fonction continue $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},$. On se propose de trouver une ou plusieurs solutions à l'équation $f(x)=0$. Les méthodes analytiques de résolution de ce type d'équation sont limitées à certaines formes algébriques (par exemple la forme $Ax^2+Bx+C=0$). Par conséquent pour les autres formes d'équations il faut employer des méthodes numériques pour trouver ou approcher les racines. Dans toute la suite on va supposer qu'on dispose d'un intervalle $[a \quad b]$ où la fonction f admet une seule solution α à l'intérieur de l'intervalle. On suppose aussi que la fonction est dérivable autant de fois qu'il sera nécessaire.

2.2 Méthode de Dichotomie (Bissection)

Le principe de la méthode de dichotomie, encore appelée méthode de bissection, est basé sur le théorème de la valeur intermédiaire. La méthode est décrite comme suit : soit, $f:[a \quad b]\rightarrow\mathbb{R}$, une fonction continue sur l'intervalle $[a \quad b]$. Si $f(a)\times f(b)<0\rightarrow$ il existe donc au moins une racine de $f(x)$ appartenant à l'intervalle $[a \quad b]$.

Les différentes étapes de la méthode peuvent être résumées comme suit :

1. Choisir un intervalle $[a \quad b]$ tel que $f(a)\times f(b)<0$.

2. Calculer la valeur de la fonction en $x_m=\dfrac{a+b}{2}$.

3. On choisit un nouvel intervalle $[a \quad x_m]$ ou $[x_m \quad b]$ en respectant la condition du **1**. On est alors assuré de toujours encadrer la racine.

4. Si $f(a)\times f(x_m)<0$ Remplacer la valeur de b par la valeur de x_m Sinon Remplacer la valeur de a par la valeur de x_m.

5. Répéter les étapes **2** et **3** jusqu'à l'obtention de la précision désirée, c'est à dire jusqu'à ce que $f(x_m)<\varepsilon$, avec ε étant la précision désirée.

Remarque Le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir un résultat donné avec une erreur ε à partir d'un intervalle initial $[a \quad b]$ est : $r \approx \dfrac{\log|a-b| - \log\varepsilon}{\log(2)}$

Algorithme

Données : $f,\ a,\ b,\ \varepsilon$

$x_m \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$

Tan que $|f(x_m)| > \varepsilon$ **faire**

  Si $f(a) \times f(x_m) < 0$ **alors**

    $b \leftarrow x_m$

  Sinon

    $a \leftarrow x_m$

  FinSi

$x_m \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$

Fin Tanque

Afficher x_m

Exemple

Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 4x - 10$ possède une racine dans l'intervalle $[1 \quad 2]$ et approximer la racine par la méthode de dichotomie avec une précision $\varepsilon = 0.001$.

Solution

$f(1) = -5$ et $f(2) = 2$. Puisque f est une fonction continue et que $f(1) \times f(2) < 0$, le théorème de valeur intermédiaire démontre que f possède au moins une racine dans l'intervalle $[1 \quad 2]$.

Le nombre d'itérations : $r \approx \dfrac{\ln|1-2| - \ln 0.001}{\ln 2} \quad \rightarrow \quad r \approx 10$

Itération	x_1	x_2	x_m	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_m)$
0	1	2	1.5	-5	2	-1.75
1	1.5	2	1.75	-1.75	1.5	0.0625
2	1.5	1.75	1.625	-1.75	0.0625	-0.859375
3	1.625	1.75	1.6875	-0.859375	0.0625	-0.402344
4	1.6875	1.75	1.71875	-0.402344	0.0625	-0.170898
5	1.71875	1.75	1.734375	-0.170898	0.0625	-0.054443
6	1.734375	1.75	1.742188	-0.054443	0.0625	0.003971
7	1.734375	1.742188	1.738282	-0.054443	0.003971	-0.025248
8	1.738282	1.742188	1.740235	-0.025248	0.003971	-0.010642
9	1.740235	1.742188	1.741212	-0.010642	0.003971	-0.003333
10	1.741212	1.742188	1.741700	-0.003333	0.003971	0.000319< ε

La solution est $x \approx 1.741700$

Code SCILAB

```
// Méthode de dechotomie       Par: R.D. Mohammedi
clc,clear;
//Les entrées------------------------------------------------
deff('y=f(x)','y=x^2+4*x-10'); //declaration de la fonction
x1=1; x2=2;                    //les limites de l'intervalle
epsilon=0.001;                 //la précision désirée
//------------------------------------------------------------
xm=(x1+x2)/2;
while abs(f(xm))>epsilon
    if f(xm)*f(x1)>0
        x1=xm;
    else
        x2=xm;
    end
    xm=(x1+x2)/2;
end
//Les sorties------------------------------------------------
disp ('La solution est :'); disp(xm);
//------------------------------------------------------------
```

2.3 Méthode de Newton-Raphson

Considérons le graphe (Fig. 1) de la fonction $y = f(x)$ et soit α la racine exacte de $f(x) = 0$. Soit x_0 un point proche de α, l'équation de la tangente de la fonction f en x_0 est donnée par : $y(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, cet tendent coupe l'axe des abscisses en x_1 donc :

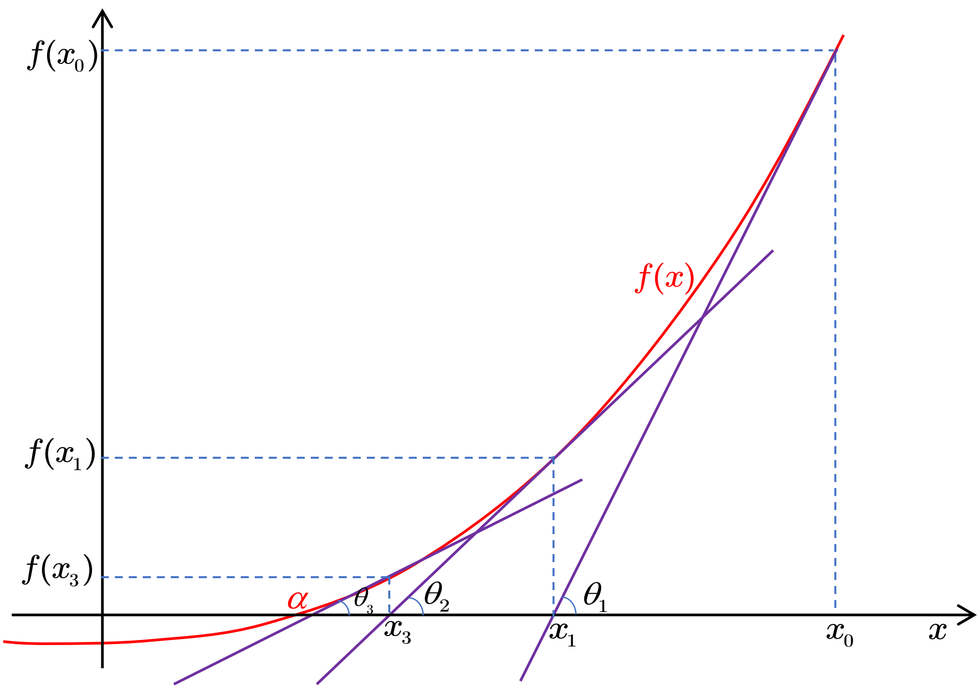


Fig.1 Méthode de Newton-Raphson

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

De proche en proche, nous construisons une suite x_n de solution approchées en utilisant la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Algorithme

Données : $f,\ f',\ x_0,\ \varepsilon$

$n \leftarrow 0$

Tan que $|f(x_n)| > \varepsilon$ ***faire***

$$x_{n+1} \leftarrow x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$n \leftarrow n+1$

Fin Tanque

Afficher x_n

Exemple 1

Résoudre l'équation $\cos(x) = x^3$ par la méthode de *Newton-Raphson* avec $x_0 = 0.5$ avec une précision $\varepsilon = 0.001$.

Solution

On recherche la racine de $\mathrm{f(x)} = \cos(x) - x^3$. La dérivation donne $f'(x) = -\sin(x) - 3x^2$.

$x_0 = 0.5 \ \rightarrow \ |f(x_0)| = 0.7526 > \varepsilon$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.5 - \frac{\cos(0.5) - 0.5^3}{-\sin(0.5) - 3\times 0.5^2} \simeq 1.1121 \ \rightarrow \ |f(x_1)| = 0.9328 > \varepsilon$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.1121 - \frac{\cos(1.1121) - 1.1121^3}{-\sin(1.1121) - 3\times 1.1121^2} \simeq 0.9097 \ \rightarrow \ |f(x_1)| = 0.1388 > \varepsilon$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.9097 - \frac{\cos(0.9097) - 0.9097^3}{-\sin(0.9097) - 3\times 0.9097^2} = 0.8673 \rightarrow |f(x_3)| = 0.0054 > \varepsilon$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 0.8673 - \frac{\cos(0.8673) - 0.8673^3}{-\sin(0.8673) - 3\times 0.8673^2} = \boxed{0.8655} \rightarrow |f(x_4)| \approx 0.0000 < \varepsilon$$

La solution est $x \approx 0.8655$

Code SCILAB

```
// Méthode de Newton               Par: R.D. Mohammedi
clc,clear;
//Les entrées-----------------------------------------------
deff('y=f(x)','y=cos(x)-x^3');     //declaration de la fonction
deff('y=fp(x)','y=-sin(x)-3*x^2'); //la dérivée de la fonction
x0=0.5;                            //la racine initiale
epsilon=0.001;                     //la précision désirée
//----------------------------------------------------------
while abs(f(x0))>epsilon
    x0=x0-(f(x0)/fp(x0));
end
//Les sorties-----------------------------------------------
disp ('La solution est :'); disp(x0);
//----------------------------------------------------------
```

Exemple 2

Calculer une valeur approximative de $\sqrt{2}$ par la méthode de *Newton- Raphson*.

Solution

$x=\sqrt{2}$

$x^2=2 \Rightarrow x^2-2=0$

$f(x)=x^2-2$ La dérivation donne $f'(x)=2x$

On considère $x_0=1$ et la précision $\varepsilon=0.001$.

$x_0=1 \quad \rightarrow |f(x_0)|=1$

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=1-\frac{(1)^2-2}{2(1)}=1.5 \rightarrow |f(x_1)|=0.25$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=1.5-\frac{(1.5)^2-2}{2(1.5)}=1.4167 \rightarrow |f(x_2)|=0.0070$$

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=1.4167-\frac{(1.4167)^2-2}{2(1.4167)}=1.4167 \rightarrow |f(x_3)|\approx 0.000<\varepsilon$$

La valeur approximative de $\sqrt{2}$ par la méthode de *Newton- Raphson* est 1.4167.

2.4 Méthode de Point Fixe

Dans cette méthode, l'équation $f(x)=0$ est supposée mise sous la forme $x=g(x)$ tel que : $f(x)=x-g(x)$. Le choix d'une valeur initiale de la racine x_0 permet d'avoir une première approximation x_1 tel que : $x_1=g(x_0)$ puis une meilleure approximation x_2 tel que : $x_2=g(x_1)$ on obtient une suite définie par la relation récursive suivante :

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1}=g(x_n) \end{cases}$$

Algorithme

Données : $f,\ x_0,\ \varepsilon$
$n \leftarrow 0$
Tan que $|f(x_n)|>\varepsilon$ ***faire***
    $x_{n+1} \leftarrow g(x_n)$
    $n \leftarrow n+1$
Fin Tanque
Afficher x_n

Exemple

Résoudre l'équation $x+e^x+1=0$ par la méthode de point fixe avec $x_0=-0.5$ avec une précision $\varepsilon=0.001$.

Solution

L'équation $f(x)=x+e^x+1=0$ peut être mise sous la forme $x=g(x)$ avec $g(x)=-e^x-1$

Itération	x_n	$g(x_n)$	$f(x_n)$
0	-0.5	-1.6065	1.10653
1	-1.6065	-1.2006	0.40595
2	-1.2006	-1.3010	0.10044
3	-1.3010	-1.2722	-0.02876
4	-1.2722	-1.2802	0.00795
5	-1.2802	-1.2780	-0.00222
6	-1.27798	-1.2786	$0.00062<\varepsilon$

La solution est $x \approx -1.27798$

Code SCILAB

```
// Méthode de Point Fixe               Par: R.D. Mohammedi
clc,clear;
//Les entrées---------------------------------------------
deff('y=f(x)','y=x+exp(x)+1');   //declaration de la fonction
deff('y=g(x)','y=-exp(x)-1');    //la dérivée de la fonction
x0=-0.5;                         //la racine initiale
epsilon=0.001;                   //la précision désirée
//--------------------------------------------------------
while abs(f(x0))>epsilon
    x0=g(x0);
end
//Les sorties---------------------------------------------
disp ('La solution est :'); disp(x0);
//--------------------------------------------------------
```

Chapitre 3: Interpolation polynomiale

3.1 Introduction

À partir d'une fonction $f(x)$ connue seulement en $(n+1)$ points de la forme $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0,1,2,\ldots,n$, peut-on construire une approximation de $f(x)$, et ce, pour tout x ? les points $(x_i, f(x_i))$ sont appelés *points d'interpolation* et peuvent provenir de données expérimentales ou d'une table. En d'autres termes, si l'on ne connaît que les points d'interpolation $(x_i, f(x_i))$ d'une fonction, peut-on obtenir une approximation de $f(x)$ pour une valeur de x différente des x_i ? Il s'agit d'un problème d'interpolation, dont la solution est relativement simple. Il suffit de construire un polynôme de degré n dont la courbe passe par les $(n+1)$ points d'interpolation. On parle alors du *polynôme d'interpolation*.

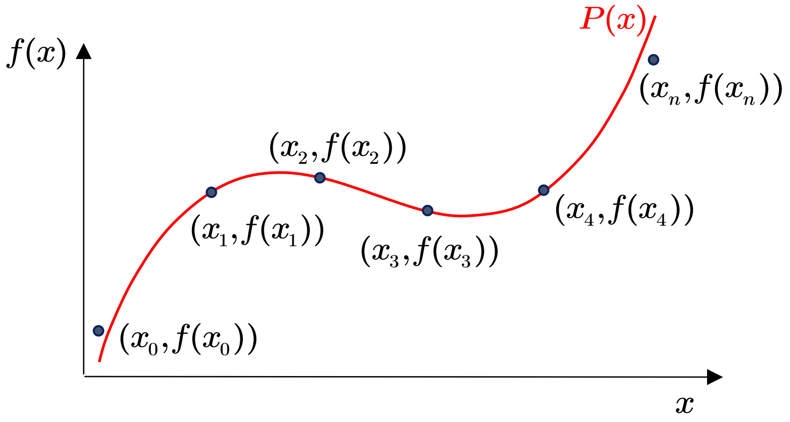


Fig.2 Interpolation polynômiale

3.2 Interpolation de Lagrange

On se donne $(n+1)$ points $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ (avec les x_i distincts deux à deux). On se propose de construire un polynôme de degré n qui aux abscisses x_i prend les valeurs $f(x_i)$. En général, l'interpolation polynomiale de *Lagrange* est de la forme :

$$P_n(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + \cdots f(x_n)L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)$$

Dans laquelle les termes $L_i(x)$ $i = 0,1,2\ldots,n$ sont des polynômes de degré n, et sont appelées *les coefficients d'interpolation de Lagrange*.

Les coefficients d'interpolation de Lagrange sont définis par :

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

Détermination pratique des polynômes de Lagrange

La détermination pratique des polynômes peut être conduite de façon suivante : on dresse le tableau carré :

$x - x_0$	$x_0 - x_1$	$x_0 - x_2$	$\cdots$	$x_0 - x_n$
$x_1 - x_0$	$x - x_1$	$x_1 - x_2$	$\cdots$	$x_1 - x_n$
$x_2 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x - x_2$	$\cdots$	$x_2 - x_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$x_n - x_0$	$x_n - x_1$	$x_n - x_2$	$\cdots$	$x - x_n$

Et on voit que :

$$L_i(x) = \frac{Le\ produit\ des\ termes\ diagonanx\ du\ tableau}{Le\ produit\ des\ termes\ de\ la\ (i)^{ième}\ ligne\ du\ tableau}$$

Exemple 1

Trouver le polynôme de Lagrange qui passe par les points suivants :

x_i	$x_0 = 1$	$x_1 = -1$	$x_2 = 2$
$f(x_i)$	$f(x_0) = 3$	$f(x_1) = 2$	$f(x_2) = -1$

Solution

On calcule d'abord les coefficients d'interpolation de Lagrange :

$x-x_0$	x_0-x_1	x_0-x_2
x_1-x_0	$x-x_1$	x_1-x_2
x_2-x_0	x_2-x_1	$x-x_2$

$\Rightarrow$

$x-1$	2	-1
-2	$x+1$	-3
1	3	$x-2$

$$L_0(x)=\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)(x-2)}{\cancel{(x-1)}(2)(-1)}=-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+1$$

$$L_1(x)=\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}(x-2)}{(-2)\cancel{(x+1)}(-3)}=\frac{x^2}{6}-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-1)(x+1)\cancel{(x-2)}}{(1)(3)\cancel{(x-2)}}=\frac{x^2}{3}-\frac{1}{3}$$

$$P(x)=f(x_0)\cdot L_0(x)+f(x_1)\cdot L_1(x)+f(x_2)\cdot L_2(x)$$

$$P(x)=-\frac{3}{2}x^2+\frac{x}{2}+4$$

Exemple 2

Trouver le polynôme de *Lagrange* qui passe par les points suivants :

x_i	$x_0=0$	$x_1=1$	$x_2=2$	$x_3=3$
$f(x_i)$	$f(x_0)=1$	$f(x_1)=4$	$f(x_2)=8$	$f(x_3)=14$

Solution

On calcule d'abord les coefficients d'interpolation de Lagrange :

$x-x_0$	x_0-x_1	x_0-x_2	x_0-x_3
x_1-x_0	$x-x_1$	x_1-x_2	x_1-x_3
x_2-x_0	x_2-x_1	$x-x_2$	x_2-x_3
x_3-x_0	x_3-x_1	x_3-x_2	$x-x_3$

$\Rightarrow$

x	-1	-2	-3
1	$x-1$	-1	-2
2	1	$x-2$	-1
3	2	1	$x-3$

$$L_0(x)=\frac{\cancel{(x)}(x-1)(x-2)(x-3)}{\cancel{(x)}(-1)(-2)(-3)}=x^2-\frac{x^3}{6}-\frac{11x}{6}+1$$

$$L_1(x)=\frac{(x)\cancel{(x-1)}(x-2)(x-3)}{(1)\cancel{(x-1)}(-1)(-2)}=\frac{x^3}{2}-\frac{5x^2}{2}+3x$$

$$L_2(x)=\frac{(x)(x-1)\cancel{(x-2)}(x-3)}{(2)(1)\cancel{(x-2)}(-1)}=2x^2-\frac{x^3}{2}-\frac{3x}{2}$$

$$L_3(x)=\frac{(x)(x-1)(x-2)\cancel{(x-3)}}{(3)(2)(1)\cancel{(x-3)}}=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}$$

$$P(x)=f(x_0)\cdot L_0(x)+f(x_1)\cdot L_1(x)+f(x_2)\cdot L_2(x)+f(x_3)\cdot L_3(x)$$

$$P(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{17}{6}x+1$$

Code SCILAB

```
// Méthode de Lagrange              Par: R.D. Mohammedi
clc,clear
//Les entrées--------------------------------------------------
X=[0 1 2 3]; Y=[1 4 8 14];        // les coordonnées des points
//-------------------------------------------------------------
n=length(X);      // le degré du polynôme = la taille de X
x=poly(0,"x");    // x est un polynôme (qui à la racine 0)
P=0;              // intialition du polynôme
for i=1:n
    L=1;          // intialition du coefficient de Lagrange
    for j=1:n
        if i~=j   // si i est différent de j
            L=L*(x-X(j))/(X(i)-X(j)); // coefficient de Lagrange
        end
    end
    P=P+L*Y(i);   // polynôme de Lagrange
end
//Les sorties---------------------------------------------------
disp(P)
//--------------------------------------------------------------
```

3.3 La méthode des différences divisées (Newton)

Le polynôme d'interpolation est calculé à l'aide de la formule suivante :

$$\begin{aligned}P(x)= &\ D_0\\ &+D_1(x-x_0)\\ &+D_2(x-x_0)(x-x_1)\\ &+\cdots\\ &+D_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})\end{aligned}$$

Où les coefficients D_i sont les *différences divisées*, que l'on peut calculer à l'aide de la formule suivante :

Ordre 0 : $D_0 = f(x_0)$

Ordre 1 : $D_1 = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Ordre 2 : $D_2 = \dfrac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2 - x_0}$

…….

Exemple 1

Étant donné 3 points $\{(0,1),(2,5),(4,17)\}$. Nous allons déterminer le polynôme d'interpolation de Newton de degré 2 passant par ces points.

$$\begin{array}{cccc} & D_0 & D_1 & D_2 \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{llll} x_0 = 0 & f(x_0) = 1 & & \\ x_1 = 2 & f(x_1) = 5 & \dfrac{5-1}{2-0} = 2 & \\ x_2 = 4 & f(x_2) = 17 & \dfrac{17-5}{4-2} = 6 & \dfrac{6-2}{4-0} = 1 \end{array}\right]$$

Par suite :

$$P(x) = D_0 + D_1(x - x_0) + D_2(x - x_0)(x - x_1)$$
$$= 1 + (x-0)\times 2 + (x-0)(x-2)\times 1$$
$$= 1 + x^2$$

Exemple 2

Trouver le polynôme de Newton qui passe par les points équidistants suivants :

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$
$f(x_i)$	$f(x_0) = 1$	$f(x_1) = 4$	$f(x_2) = 8$	$f(x_3) = 14$

Solution

$$P(x) = D_0 + D_1(x - x_0) + D_2(x - x_0)(x - x_1) + D_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Ordre 3

$$\begin{bmatrix}
x_0 & \overset{D_0}{f(x_0)} & & & \\
x_1 & f(x_1) & \overset{D_1}{\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}} & & \\
x_2 & f(x_2) & \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} & \overset{D_2}{\dfrac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}} & \\
x_3 & f(x_3) & \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} & \dfrac{\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}-\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}{x_3-x_1} & \overset{D_3}{\dfrac{\dfrac{\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}-\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}-\dfrac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}}{x_3-x_0}}
\end{bmatrix}$$

Application numérique :

$$\begin{bmatrix}
0 & \overset{D_0}{1} & & & \\
1 & 4 & \dfrac{4-1}{1-0}=\overset{D_1}{3} & & \\
2 & 8 & \dfrac{8-4}{2-1}=4 & \dfrac{4-3}{2-0}=\overset{D_2}{\dfrac{1}{2}} & \\
3 & 14 & \dfrac{14-8}{3-2}=6 & \dfrac{6-4}{3-1}=1 & \dfrac{1-\dfrac{1}{2}}{3-0}=\overset{D_3}{\dfrac{1}{6}}
\end{bmatrix}$$

$$P(x)=1+3(x-0)+\frac{1}{2}(x-0)(x-1)+\frac{1}{6}(x-0)(x-1)(x-2)$$

$$P(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{17}{6}x+1$$

Chapitre 4: Intégration numérique

4.1 Introduction

Dans le présent chapitre, le problème consiste à obtenir des approximations des intégrales définies :

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

où a et b sont des réels.

Dans certains cas très limités, une telle intégrale peut être calculée analytiquement (à la main). Souvent dans la pratique on doit faire appel aux méthodes d'intégration numériques pour calculer la valeur de l'intégrale I car en général la fonction f est connue en un nombre fini de points ou elle est difficile, voire impossible de l'intégrer.

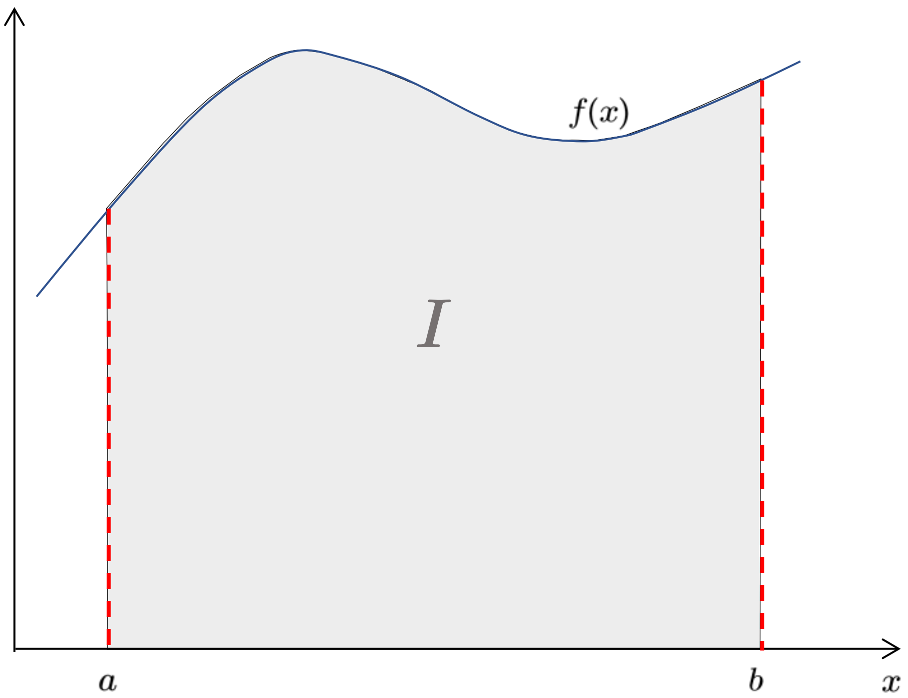


Fig. 1 Intégral définie

4.2 Méthode des Rectangles

Soit f une fonction définie et continu sur l'intervalle $\left[a \quad b\right]$ on veut déterminer la valeur approchée de l'intégrale : $I = \int_a^b f(x)dx$ Pour cela on va subdiviser l'intervalle $\left[a \quad b\right]$ en n intervalles égaux de même largeur h :

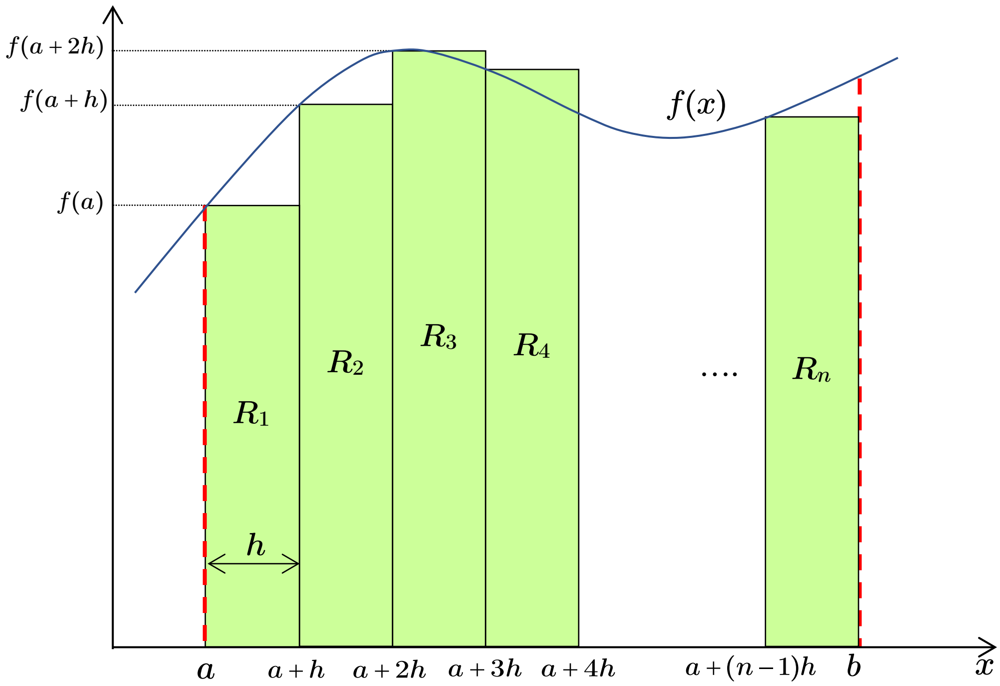


Fig. 2 Intégration par la méthode des Rectangles

Le nombre des rectangles est $n = \dfrac{b-a}{h}$, on calcule l'intégrale numérique en réalisant une somme de surfaces de rectangles :

$$I = \int_a^b f(x) \approx h\times f(a) + h\times f(a+h) + h\times f(a+2\times h) + \ldots\ldots h\times f(a+(n-1)\times h)$$

Donc $\boxed{\int_a^b f(x) \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih)}$

Algorithme

Données : f, a, b, h
$I \leftarrow 0$
$n \leftarrow (b-a)/h$
Pour $i \leftarrow 0$ ***à*** $(n-1)$ ***faire***
    $I \leftarrow I + h\times f(a+i\times h)$
Fin Pour
Afficher I

Exemple

Calculer l'intégral : $I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$ par la *méthode analytique* puis par la *méthode des Rectangles* avec $h = 0.1$.

Solution analytique :

$$I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\log(1+x^2)\right)\Big|_0^1 = 0.3466$$

Solution numérique :

$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$; $a = 0$; $b = 1$; Le nombre des Rectangles est : $n = \frac{b-a}{h} = \frac{1-0}{0.1} = 10$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$f(x)$	0	0.0990	0.1923	0.2752	0.3448	0.4	0.4412	0.4698	0.4878	0.4972	0.5

$$I \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih) = 0.1 \times (0 + 0.099 + 0.1923 + \ldots + 0.4972 + 0.5)$$

$$I \approx 0.3207$$

Code SCILAB

```
// Méthode des Rectangles          Par: R.D. Mohammedi
clc,clear;
//Les entrées-----------------------------------------------------
deff('y=f(x)','y=x/(1+x^2)');      //declaration de la fonction
a=0; b=1;                          //bornes d'intégration
h=0.1;                             //pas d'intégration
//----------------------------------------------------------------
n=(b-a)/h;                         //nombre des rectangles
I=0;                               //intialisation de la somme
for i=0:n-1
    I=I+h*f(a+i*h);
end
//Les sorties-----------------------------------------------------
disp ('La solution est :'); disp(I);
//----------------------------------------------------------------
```

4.3 Méthode des Trapèzes

Soit f une fonction définie et continu sur l'intervalle $[a \quad b]$ on veut déterminer la valeur approchée de l'intégrale : $I = \int_a^b f(x)dx$ Pour cela on va subdiviser l'intervalle $[a \quad b]$ en n intervalles égaux de même largeur h :

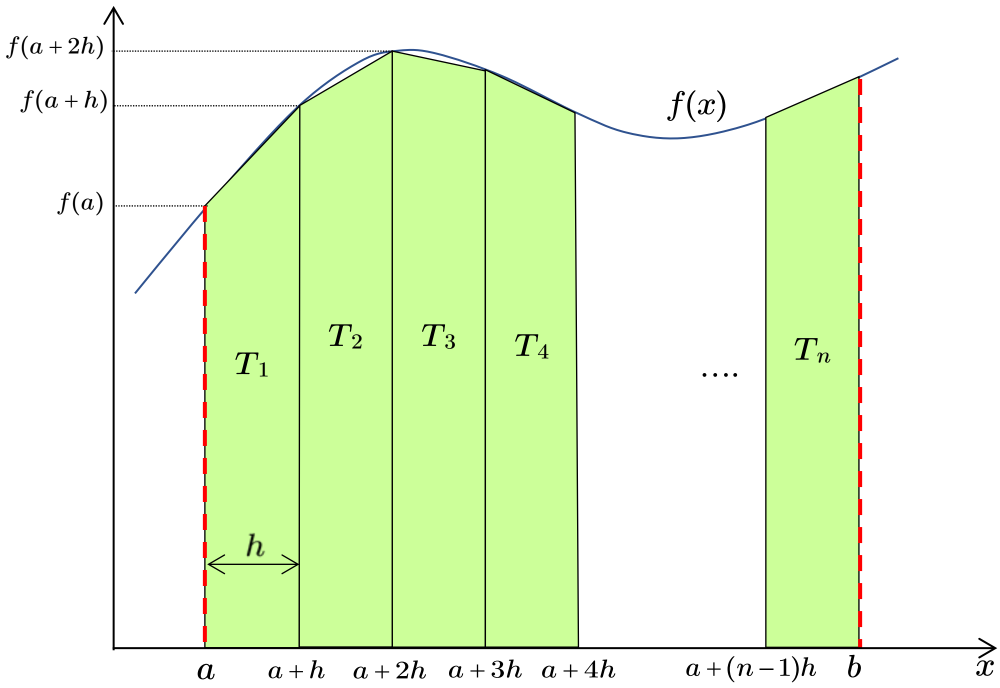


Fig. 3 Intégration par la méthode des Trapèzes

Le nombre des trapèzes est $n = \dfrac{b-a}{h}$, on calcule l'intégrale numérique en réalisant une somme de surfaces de trapèzes :

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{h}{2}(f(a)+f(a+h)) + \frac{h}{2}(f(a+h)+f(a+2h)) + \dots\dots\dots$$
$$+\frac{h}{2}(f(a+(n-2)h)+f(a+(n-1)h))$$

Donc

$$\boxed{\int_a^b f(x) \approx \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(f(a+ih)+f(a+ih+h))}$$

Algorithme

Données : f, a, b, h
$I \leftarrow 0$
$n \leftarrow (b-a)/h$
Pour $i \leftarrow 0$ ***à*** $(n-1)$ ***faire***

$$I \leftarrow I + \left(\frac{h}{2}\right) \times \left(f(a+i\times h) + f(a+i\times h+h)\right)$$

Fin Pour
Afficher I

Exemple

Calculer l'intégral : $I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$ par la méthode des Trapèzes avec $h = 0.1$.

Solution

$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$; $a = 0$; $b = 1$; Le nombre des Rectangles est : $n = \frac{b-a}{h} = \frac{1-0}{0.1} = 10$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$f(x)$	0	0.0990	0.1923	0.2752	0.3448	0.4	0.4412	0.4698	0.4878	0.4972	0.5

$$I \approx \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(a+ih) + f(a+ih+h)\right)$$

$$I \approx \frac{h}{2}\left[\left(Somme\ du\ 1^{er}\ et\ dernier\ élément\right) + 2\times\left(Somme\ des\ éléments\ restants\right)\right]$$

$$= \frac{0.1}{2}\left[(0+0.5) + 2\times(0.099 + 0.1923 + \ldots + 0.4878 + 0.4972)\right]$$

$$I \approx 0.3460$$

Code SCILAB

```
// Méthode des Trapèzes             Par: R.D. Mohammedi
clc,clear;
//Les entrées----------------------------------------------
deff('y=f(x)','y=x/(1+x^2)');       //declaration de la fonction
a=0; b=1;                           //bornes d'intégration
h=0.1;                              //pas d'intégration
//---------------------------------------------------------
n=(b-a)/h;                          //nombre des Trapèzes
I=0;                                //intialisation de la somme
for i=0:n-1
    I=I+(h/2)*(f(a+i*h)+f(a+i*h+h));
end
//Les sorties----------------------------------------------
disp ('La solution est :'); disp(I);//Affichage du résultat
//---------------------------------------------------------

```

4.4 Méthode des Simpson

Cette méthode est basée sur l'interpolation, de chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, par un polynôme de degré deux. Ainsi, la fonction f est substituée par ce polynôme du second degré qui définit donc un arc de parabole passant par les points d'ordonnées $f(x_i)$, $f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)$ et $f(x_{i+1})$. Le schéma numérique de cette méthode est donné par :

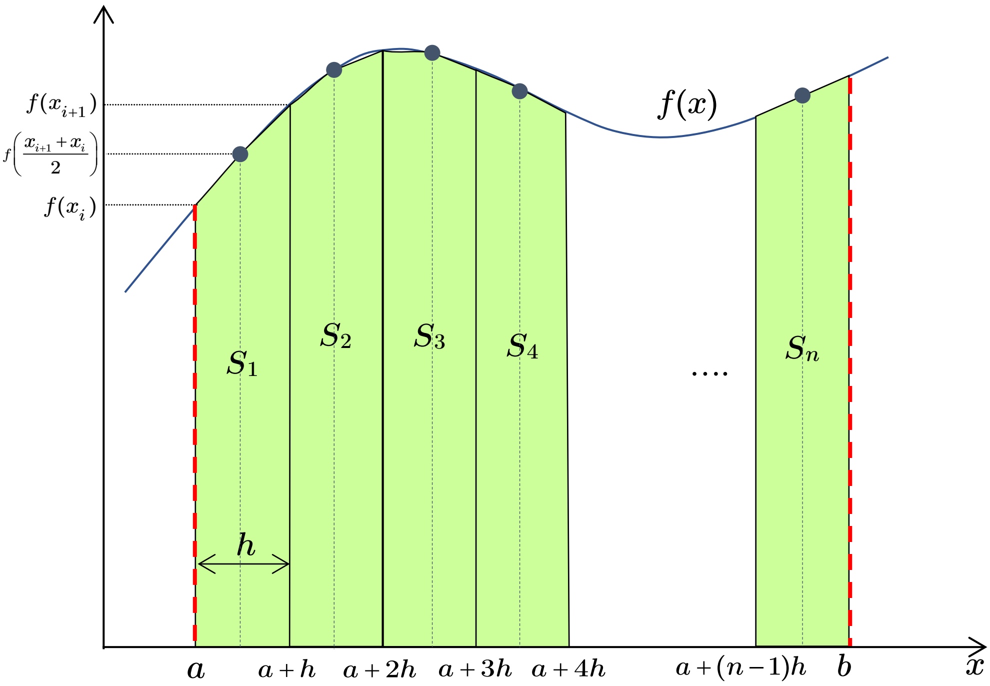


Fig. 4 Intégration par la méthode des Simpson

$$I=\int_a^b f(x)\approx\frac{h}{6}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(x_i)+f(x_{i+1})+4\times f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right)$$

Algorithme

Données : $f,\, a,\, b,\, h$
$I\leftarrow 0$
$n\leftarrow (b-a)/h$
Pour $i\leftarrow 0$ **à** $(n-1)$ **faire**
    $x_i\leftarrow a+i\times h$
    $x_{i+1}\leftarrow x_i+h$
    $I\leftarrow I+\frac{h}{6}\left(f(x_i)+f(x_{i+1})+4f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)\right)$
Fin Pour
Afficher I

Exemple

Calculer l'intégral : $I=\int_1^2\frac{1}{x}dx$ par la *méthode analytique* puis par la *méthode des Simpson* avec $h=0.5$.

Solution analytique :

$$I=\int_1^2\frac{1}{x}dx=\log(x)\Big|_0^1=\ 0.6931$$

Solution numérique :

$f(x)=\frac{1}{x}$; $a=0$; $b=1$; Le nombre des intervalles est : $n=\frac{b-a}{h}=\frac{2-1}{0.5}=2$

x	1	1.25	1.5	1.75	2
$f(x)$	1	0.8	0.6667	0.5714	0.5

$$I=\int_a^b f(x)\approx\frac{h}{6}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+4\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\right)\right)$$

$$I\approx\frac{0.5}{6}(1+0.6667+4\times0.8+0.6667+0.5+4\times0.5714)$$

$$I\approx 0.6933$$

Code SCILAB

```
// Méthode de Simpson              Par: R.D. Mohammedi
clc,clear;
//Les entrées----------------------------------------------
deff('y=f(x)','y=1/x');            //declaration de la fonction
a=1; b=2;                          //bornes d'intégration
h=0.5;                             //pas d'intégration
//---------------------------------------------------------
n=(b-a)/h;                         //nombre des intervalles
I=0;                               //intialisation de la somme
for i=0:n-1
    x0=a+i*h;
    x1=a+i*h+h;
    I=I+(h/6)*(f(x0)+f(x1)+4*f((x0+x1)/2));
end
//Les sorties----------------------------------------------
disp ('La solution est :'); disp(I);//Affichage du résultat
//---------------------------------------------------------
```

Chapitre 5: Résolution des équations différentielles ordinaires

5.1 Introduction

Une '*équation différentielle ordinaire*' EDO, est une équation d'une seule variable indépendante qui contient une ou plusieurs dérivées (y', y'', …) de la fonction inconnue $y(.)$. L'ordre de cette équation est déterminé par le degré le plus élevé de la dérivation.

On ne sait résoudre qu'un très petit nombre d'EDO. De plus, quand cela est possible, il n'est pas toujours facile d'exprimer la solution sous forme explicite. Dans ce chapitre, nous considérons des méthodes numériques pour la résolution des ED avec condition initiale.

5.2 Méthode d'Euler

Cas d'une équation différentielle du premier ordre dont la forme mathématique est :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad t \in [t_0 \quad t_f]$$

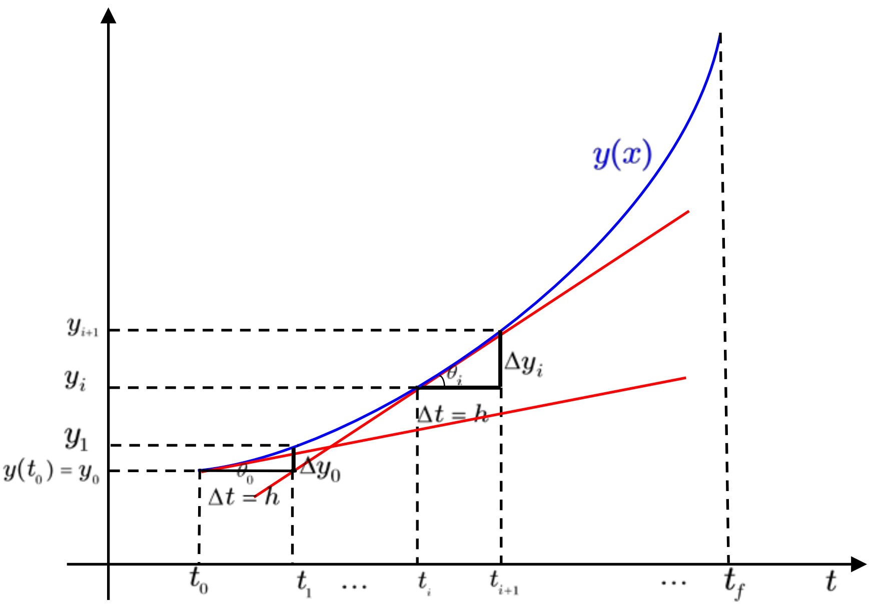


Fig.1 Méthode d'Euler

D'après la figure ci-dessus *:*

$$\tan(\theta_0) \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{h}$$

$\Delta y \approx h\tan(\theta) \Rightarrow \Delta y \approx h\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=t_0}$ *donc, d'après la première équation :* $\Delta y \approx hf(t_0, y_0) \Leftrightarrow$

$y_1 - y_0 \approx hf(t_0, y_0)$

Donc $y_1 \approx y_0 + hf(t_0, y_0)$

La formule générale :

$y_{i+1} \approx y_i + hf(t_i, y_i)$

<u>*Procédure :*</u> Pour calculer des valeurs approchées de $y(t)$ sur l'intervalle $\left[t_0 \quad t_f\right]$, On subdivise cet intervalle en n intervalles égaux de largeur h, donc $n = (n_f - n_0)/h$.

Pour la valeur initiale, on a $y(t_0) = y_0$ ce qui permet de placer le premier point (t_0, y_0).

Pour les n valeurs $(t_0 + h), (t_0 + 2h), \ldots, (t_0 + ih),$ on par les formules suivantes :

$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$

$y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1)$

….

Et ainsi de suite n itérations jusqu'à :

$y_n = y_{n-1} + hf(t_{n-1}, y_{n-1})$

<u>*Exemple*</u>

Résoudre l'équation différentielle suivante par la méthode d'Euler dans l'intervalle $t \in \left[0 \quad 0.5\right]$ avec le pas $h = 0.1$.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -2ty \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Comparer le résultat par la solution analytique (exacte) : $y = \exp(-t^2)$

Solution :

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ y_0 = 1 \\ h = 0.1 \\ f(t,y) = -2ty \end{cases}$$

On a $y(0) = y_0 = 1$, *et par la formule d'Euler, on calcule les autres valeurs de la fonction* y

$$x_1 = x_0 + h = 0.1,\ y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) \ \rightarrow\ y_1 = 1 + 0.1f(0,1) = 1 + 0.1 \times (-2 \times 0 \times 1) = 1$$

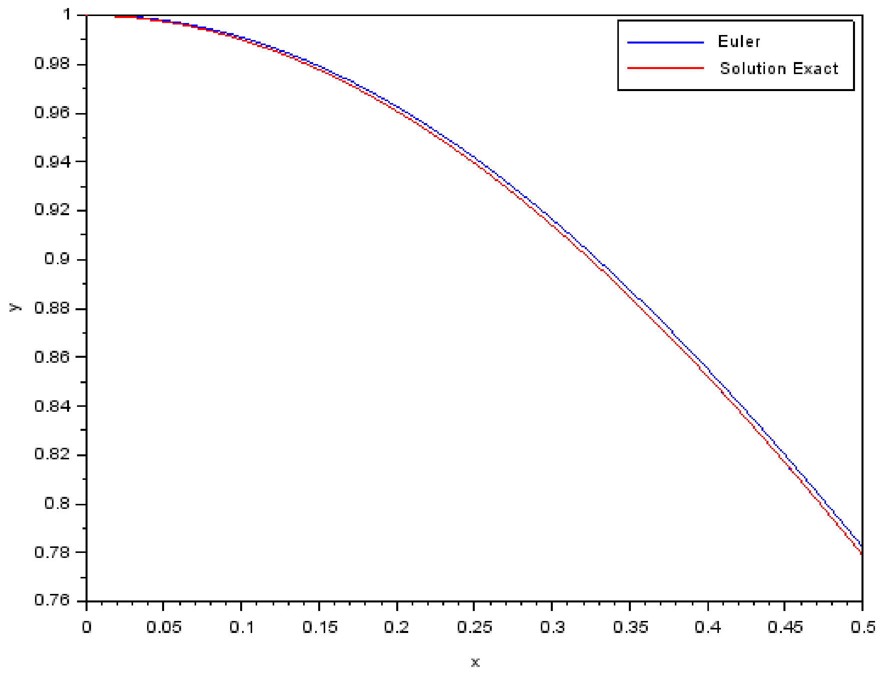
$$x_2 = x_1 + h = 0.2,\ y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) \ \rightarrow\ y_2 = 1 + 0.1f(0.1,1) = 1 + 0.1 \times (-2 \times 0.1 \times 1) = 0.9800$$

Et ainsi de suite.

i	t_i	*Solution Exact* $y = \exp(-t^2)$	*Solution Numérique Euler*	*Erreur*
0	0	1	1	0.000
1	0.1	0.9900	$1 + 0.1(-2 \times 0 \times 1) = 1$	0.0100
2	0.2	0.9608	$1 + 0.1(-2 \times 0.1 \times 1) = 0.98$	0.0192
3	0.3	0.9139	$0.98 + 0.1(-2 \times 0.2 \times 0.98) = 0.9408$	0.0269
4	0.4	0.8521	$0.9408 + 0.1(-2 \times 0.3 \times 0.9408) = 0.8843$	0.0322
5	0.5	0.7788	$0.8843 + 0.1(-2 \times 0.4 \times 0.8843) = 0.8135$	0.0347

Code SCILAB

```
// Méthode d'Euler     Par: R.D. Mohammedi
clc,clear;
//Les entrées----------------------------------------------------
deff('yp=f(t,y)','yp=-2*t*y');          //declaration de la fonction
t0=0;tf=0.5;                             //l'intervalle de la solution
h=0.01;                                  //le pas
y(1)=1;                                  //solution initiale
//---------------------------------------------------------------
n=(tf-t0)/h;                             //nombre des intervalles
ye(1)=y(1);
t=[t0:h:tf];
for i=2:n+1
    y(i)=y(i-1)+h*f(t(i-1),y(i-1)); //Solution Euler
    ye(i)=exp(-(t(i))^2);          //Solution Exact
end
//Les sorties----------------------------------------------------
disp ('La solution est :'); disp(y);    //Affichage du résultat
plot([t0:h:tf],y); plot([t0:h:tf],ye,'r') //tracage des courbes
legend('Euler','Solution Exact')
xlabel('x'); ylabel('y');
//---------------------------------------------------------------
```



5.3 Méthode de Heun (Euler Améliorée)

La Méthode de Heun est une version améliorée de celle d'Euler.

$$\begin{cases} y_0 = valeur\ \text{int}iale \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}\Big(f(t_i, y_i) + f\big(t_{i+1}, y_i + hf(t_i, y_i)\big)\Big) \end{cases}$$

Exemple

Résoudre l'équation différentielle suivante par la méthode de de *Heun (Euler améliorée)* dans l'intervalle $t \in [0 \quad 0.5]$ avec le pas $h = 0.1$.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -2ty \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Comparer le résultat par la solution analytique (exacte) : $y = \exp(-t^2)$ et la méthode d'*Euler*.

Solution

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ y_0 = 1 \\ h = 0.1 \\ f(t, y) = -2ty \end{cases}$$

On a $y(0) = y_0 = 1$, et par la formule d'Euler améliorée, on calcule les autres valeurs de la fonction y, la formule générale est : $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(t_i, y_i) + f\left(t_{i+1}, y_i + hf(t_i, y_i)\right)\right)$

$x_1 = x_0 + h = 0.1,$

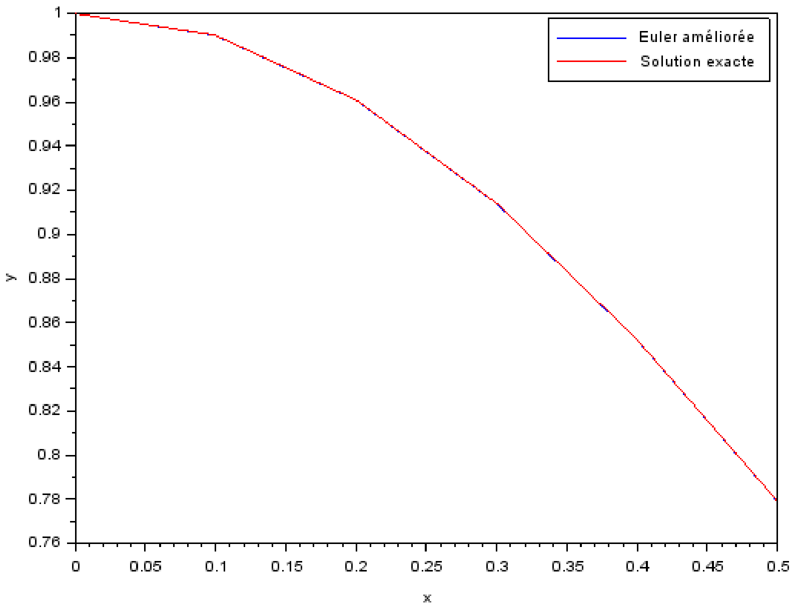
$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(f(t_0, y_0) + f\left(t_1, y_0 + hf(t_0, y_0)\right)\right) \rightarrow y_1 = 1 + \frac{0.1}{2}\left(f(0,1) + f\left(0.1, 1 + 0.1f(0,1)\right)\right)$$

$y_1 = 1 + \frac{0.1}{2}\left((-2\times0\times1) + (-2\times0.1\times1)\right) = 0.9900$ Et ainsi de suite.

i	t_i	Solution Exact $y = \exp(-t^2)$	Euler	Erreur	Euler améliorée	Erreur
0	0	1	1	0.0000	1	0.0000
1	0.1	0.9900	1	0.0100	0.9900	0.0000
2	0.2	0.9608	0.98	0.0192	0.9607	0.0001
3	0.3	0.9139	0.9408	0.0269	0.9138	0.0001
4	0.4	0.8521	0.8843	0.0322	0.8520	0.0001
5	0.5	0.7788	0.8135	0.0347	0.7788	0.0001

Code SCILAB

```
// La méthode d'Euler améliorée         Par R.D. Mohammedi
clc,clear;
//Les entrées---------------------------------------------
deff('yp=f(t,y)','yp=-2*t*y')         //déclaration de la fonction
t0=0;tf=0.5;                          //l'intervalle de la solution
h=0.1;                               //le pas
y(1)=1;                               //la solution initiale
//-------------------------------------------------------
n=(tf-t0)/h;                   //nombre des intervalles
ye(1)=y(1);
t=[t0:h:tf];
for i=2:n+1
    y(i)=y(i-1)+(h/2)*(f(t(i-1),y(i-1))+f(t(i),y(i-1)+h*f(t(i-1),y(i-1))));
    ye(i)=exp(-(t(i))^2);
end
//Les sorties---------------------------------------------
disp('la solution est:'); disp(y);
plot(t,y);  plot(t,ye,'r');        //Courbe de convergence
legend('Euler améliorée','Solution exacte')
xlabel('x'); ylabel('y');
//-------------------------------------------------------
```



5.4 Méthode de Runge Kutta

Les méthodes de Runge Kutta sont bien utilisés dans la pratique, car elles présentent plusieurs avantages (facilité de programmation, stabilité de la solution, modification simple du pas….etc.) Les inconvénients de cette méthode se résument au temps de calcul lent et à la difficulté de l'estimation de l'erreur.

Runge Kutta d'ordre 2 $y_{i+1} = y_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$ *avec* $k_1 = hf(t_i, y_i)$

Code SCILAB (Runge Kutta d'ordre 2)

```
// Méthode de Runge Kutta d'ordre 2     Par: R.D. Mohammedi
clc,clear;
//Les entrées--------------------------------------------------------
deff('yp=f(t,y)','yp=-2*t*y');          //declaration de la fonction
t0=0;tf=0.5;                            //l'intervalle de la solution
h=0.01;                                 //le pas
y(1)=1;                                 //solution initiale
//-------------------------------------------------------------------
n=(tf-t0)/h;                            //nombre des intervalles
ye(1)=y(1);
t=[t0:h:tf];
for i=2:n+1
    k1=h*f(t(i-1),y(i-1));
    y(i)=y(i-1)+h*f(t(i-1)+(h/2),y(i-1)+(k1/2)); //Solution RK2
    ye(i)=exp(-(t(i))^2);               //Solution Exact
end
//Les sorties--------------------------------------------------------
disp ('La solution est :'); disp(y);    //Affichage du résultat
plot(t,y); plot([t0:h:tf],ye,'r') //tracage des courbes
legend('RK2','Solution Exact')
xlabel('x'); ylabel('y');
//-------------------------------------------------------------------
```

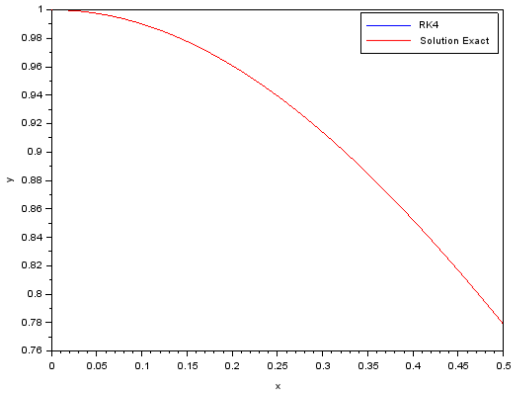
Runge Kutta d'ordre 4

Dans la plupart des cas, la méthode de Runge Kutta la plus utilisée est celle d’ordre 4.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \text{ avec } \begin{cases} k_1 = h \times f(t_i, y_i) \\ k_2 = h \times f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = h \times f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = h \times f(t_i + h, y_i + k_3) \end{cases}$$

Code SCILAB (Runge Kutta d'ordre 4)

```
// Méthode de Runge Kutta d'ordre 4     Par: R.D. Mohammedi
clc,clear;
//Les entrées-----------------------------------------------------
deff('yp=f(t,y)','yp=-2*t*y');          //declaration de la fonction
t0=0;tf=0.5;                            //l'intervalle de la solution
h=0.01;                                 //le pas
y(1)=1;                                 //solution initiale
//-----------------------------------------------------------------
n=(tf-t0)/h;                            //nombre des intervalles
ye(1)=y(1);
t=[t0:h:tf];
for i=2:n+1
    k1=h*f(t(i-1),y(i-1));
    k2=h*f(t(i-1)+(h/2),y(i-1)+(k1/2));
    k3=h*f(t(i-1)+(h/2),y(i-1)+(k2/2));
    k4=h*f(t(i-1)+h,y(i-1)+k3);
    y(i)=y(i-1)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4); //Solution RK4
    ye(i)=exp(-(t(i))^2);               //Solution Exact
end
//Les sorties-----------------------------------------------------
disp ('La solution est :'); disp(y);    //Affichage du résultat
plot(t,y); plot([t0:h:tf],ye,'r') //tracage des courbes
legend('RK4','Solution Exact')
xlabel('x'); ylabel('y');
//-----------------------------------------------------------------
```



Exemple

Résoudre par la méthode Runge Kutta d'ordre 4 :

$$\frac{dy}{dx} = 2xy, \qquad y(0) = 1 \qquad h = 0.1 \qquad x \in [0, 0.5]$$

Solution

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \\ h = 0.1 \\ f(x,y) = 2xy \end{cases}$$

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = \boxed{0.1}$$

$$\begin{cases} k_1 = h.f(x_0, y_0) = 0.1.f(0,1) = 0.1 \times (2 \times 0 \times 1) = 0 \\ k_2 = h.f\left(x_0 + \dfrac{h}{2}, y_0 + \dfrac{k_1}{2}\right) = 0.1.f(0.05, 1) = 0.1 \times (2 \times 0.05 \times 1) = 0.01 \\ k_3 = h.f\left(x_0 + \dfrac{h}{2}, y_0 + \dfrac{k_2}{2}\right) = 0.1.f(0.05, 1.005) = 0.1 \times (2 \times 0.05 \times 1.005) = 0.01005 \\ k_4 = h.f(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.1.f(0.1, 1.01005) = 0.1 \times (2 \times 0.1 \times 1.01005) = 0.020201 \end{cases}$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(0 + 0.02 + 0.02010 + 0.020201) = \boxed{1.01005}$$, Et ainsi de suite :

$itération$	x_n	y_n
0	0	1
1	0.1	1.01005
2	0.2	1.04081
3	0.3	1.09417
4	0.4	1.17351
5	0.5	1.28403

Chapitre 6: Résolution des systèmes d'équations linéaires

6.1 Introduction

Dans la pratique, l'ingénieur se trouve souvent confronté à des problèmes dont la résolution passe par celle d'un système d'équations qui modélise les divers éléments considérés. Par exemple, la détermination des courants et tensions dans des réseaux électriques passe par la résolution d'un système d'équations linéaires ou non linéaires.

Dans ce chapitre, nous allons aborder deux principales méthodes de résolution des systèmes linéaires. De façon générale, la résolution d'un système d'équations linéaires consiste à trouver un vecteur $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{bmatrix}$ solution du système d'équation suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

On peut utiliser la notation matricielle, qui est beaucoup plus pratique et surtout plus compacte. On écrit alors le système précédent sous la forme :

$$Ax = b$$

où A est la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

et $b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \end{bmatrix}$. Bien entendu, la matrice A et le vecteur b sont connus. Il reste à déterminer le vecteur x.

6.2 Méthodes Directs

6.2.1 Méthode de Gauss

Cette méthode est basée sur la transformation du système linéaire $Ax=b$ en un système équivalent $A'x=b'$ tel que la matrice A' est une matrice triangulaire supérieure.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x3 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{b} \qquad Ax=b$$

Itération 0

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + a_{13}^{(0)}x_3 = b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)}x_1 + a_{22}^{(0)}x_2 + a_{23}^{(0)}x_3 = b_2^{(0)} \\ a_{31}^{(0)}x_1 + a_{32}^{(0)}x_2 + a_{33}^{(0)}x_3 = b_3^{(0)} \end{cases} \qquad (1)$$

Itération 1

$L_2 \leftarrow L_2 - \left(a_{21}^{(0)} / a_{11}^{(0)}\right) \times L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - \left(a_{31}^{(0)} / a_{11}^{(0)}\right) \times L_1$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + a_{13}^{(0)}x_3 = b_1^{(0)} \\ \qquad\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = b_3^{(1)} \end{cases} \qquad (2)$$

Avec :

$$a_{mn}^{(1)} = a_{mn}^{(0)} - \left(a_{m1}^{(0)} / a_{11}^{(0)}\right) a_{1n}^{(0)}$$

$$b_m^{(1)} = b_m^{(0)} - \left(a_{m1}^{(0)} / a_{11}^{(0)}\right) b_1^{(0)} \qquad pour\ m,n = 2,3 \qquad (3)$$

Itération 2

$L_3 \leftarrow L_3 - \left(a_{32}^{(1)} / a_{22}^{(1)}\right) \times L_2$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + a_{13}^{(0)}x_3 = b_1^{(0)} \\ \qquad\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 = b_3^{(2)} \end{cases} \qquad (4)$$

Avec :

$$a_{mn}^{(2)} = a_{mn}^{(1)} - \left(a_{m2}^{(1)} / a_{22}^{(1)}\right) a_{2n}^{(1)}$$

$$b_m^{(2)} = b_m^{(1)} - \left(a_{m2}^{(1)} / a_{22}^{(1)}\right) b_2^{(1)} \qquad pour\ m,n = 3 \qquad (5)$$

En Généralisant l'équation (3) et (5) à *l'itération k avec N équations*

$$a_{mn}^{(k)} = a_{mn}^{(k-1)} - \left(a_{mk}^{(k-1)} \big/ a_{kk}^{(k-1)}\right) a_{kn}^{(k-1)} \quad pour \quad m,n = k+1, k+2, \ldots, N$$
$$b_{m}^{(k)} = b_{m}^{(k-1)} - \left(a_{mk}^{(k-1)} \big/ a_{kk}^{(k-1)}\right) b_{k}^{(k-1)} \quad pour \quad m = k+1, k+2, \ldots, N$$

(6)

Équation (4)

$$\Leftrightarrow \quad x_3 = b_3^{(2)} \big/ a_{33}^{(2)} \qquad (7)$$
$$\Leftrightarrow \quad x_2 = \left(b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)} x_3\right) \big/ a_{22}^{(1)} \qquad (8)$$
$$\Leftrightarrow \quad x_1 = \left(b_1^{(0)} - \sum_{n=2}^{3} a_{1n}^{(0)} x_n\right) \Bigg/ a_{11}^{(0)} \qquad (9)$$

En Généralisant les équations (7), (8) et (9)

$$x_m = \left(b_m^{(m-1)} - \sum_{j=m+1}^{N} a_{mj}^{(m-1)} x_j\right) \Bigg/ a_{mm}^{(m-1)} \quad m = n, n-1 \ \ldots \ 1 \qquad (10)$$

<u>*Algorithme*</u>

Données : A, *b*

$n \leftarrow$ *Taille du vecteur b*

Pour $k \leftarrow 1$ ***à*** $(n-1)$

  Pour $m \leftarrow (k+1)$ ***à*** n

    Pour $j \leftarrow (k+1)$ ***à*** n

$$\left.\begin{array}{l} A(m,j) = A(m,j) - \left(\dfrac{A(m,k)}{A(k,k)}\right) \times A(k,j) \\ \textbf{\textit{Fin Pour}} \\ b(m) = b(m) - \left(\dfrac{A(m,k)}{A(k,k)}\right) \times b(k) \end{array}\right\} \textit{Équation}$$

  Fin Pour

Fin Pour

Pour $m \leftarrow n$ ***à*** 1

  $somme = 0$

  pour $j \leftarrow (m+1)$ ***à*** n

    $somme = somme + A(m,j) \times x(j)$

  Fin Pour

  $x(m) = \dfrac{b(m) - somme}{A(m,m)} \quad \longleftarrow \quad$ *Équation 10*

Fin Pour

Afficher *x*

Exemple

Soit à résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

1^ère^ étape :

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & -1 & \vdots & 5 \\ 4 & 4 & -3 & \vdots & 3 \\ -2 & 3 & -1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 = L_3 - (-2/2)\times L_1]{L_2 = L_2 - (4/2)\times L_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & \vdots & 5 \\ 0 & -2 & -1 & \vdots & -7 \\ 0 & 6 & -2 & \vdots & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^{(1)} \;\vdots b^{(1)}\right) \to \left(A^{(2)} \;\vdots b^{(2)}\right)$$

2^ème^ étape :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & \vdots & 5 \\ 0 & \boxed{-2} & -1 & \vdots & -7 \\ 0 & 6 & -2 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 - (6/-2)\times L_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & \vdots & 5 \\ 0 & -2 & -1 & \vdots & -7 \\ 0 & 0 & -5 & \vdots & -15 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^{(2)} \;\vdots b^{(2)}\right) \to \left(A^{(3)} \;\vdots b^{(3)}\right)$$

Donc :

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 5 \\ \qquad -2x_2 - x_3 = -7 \\ \qquad\qquad -5x_3 = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Code SCILAB :

```
// La méthode d'élimination de Gauss        Par: R.D. Mohammedi
clc,clear;
//Les entrées-----------------------------------------------
A=[2 3 -1;4 4 -3;-2 3 -1];              //la matrice A  (Ax=b)
b=[5;3;1];                              //le vecteur b
//----------------------------------------------------------
n=length(b);                            //nombre des inconus

 for k=1:n-1
     for m=k+1:n
        for j=k+1:n
            A(m,j) = A(m,j) - (A(m,k)/A(k,k)) *A(k,j);
        end
        b(m) = b(m) - (A(m,k)/A(k,k)) *b(k);
     end
 end

 for m=n:-1:1
   somme=0;
   for j=m+1:n
      somme=somme+A(m,j)*x(j);
   end
   x(m) = (b(m)-somme)/A(m,m);
 end

//Les sorties-----------------------------------------------
disp ('La solution est :'); disp(x);    //Affichage du résultat
//----------------------------------------------------------
```

6.2.2 Méthode de Gauss-Jordan (méthode du pivot de Gauss)

On peut faire encore plus simple, si on continu dans la même stratégie pour construire un autre triangle de zéro au-dessus de la diagonale. Mieux encore, si on s'arrange pour que la diagonale ne comporte que des 1. La solution sera immédiate.

Exemple
Soit à résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

1ère étape :

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & -1 & \vdots & 5 \\ 4 & 4 & -3 & \vdots & 3 \\ -2 & 3 & -1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 = L_1 / (2) \\ L_2 = L_2 - (4) \times L_1 \\ L_3 = L_3 - (-2) \times L_1 \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & \vdots & 5/2 \\ 0 & -2 & -1 & \vdots & -7 \\ 0 & 6 & -2 & \vdots & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^{(1)} \;\vdots b^{(1)}\right) \rightarrow \left(A^{(2)} \;\vdots b^{(2)}\right)$$

2ème étape :

$a_{22}^{(2)} = -2 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & \vdots & 5/2 \\ 0 & \boxed{-2} & -1 & \vdots & -7 \\ 0 & 6 & -2 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 = L_2/(-2) \\ L_1 = L_1 - (3/2)\times L_2 \\ L_3 = L_3 - (6)\times L_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/4 & \vdots & -11/4 \\ 0 & 1 & 1/2 & \vdots & 7/2 \\ 0 & 0 & -5 & \vdots & -15 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^{(2)} \;\vdots b^{(2)}\right) \rightarrow \left(A^{(3)} \;\vdots b^{(3)}\right)$$

3ème étape :

$a_{33}^{(2)} = -5 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/4 & \vdots & -11/4 \\ 0 & 1 & 1/2 & \vdots & 7/2 \\ 0 & 0 & \boxed{-5} & \vdots & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 = L_3/(-5) \\ L_1 = L_1 - (-5/4)\times L_3 \\ L_2 = L_2 - (1/2)\times L_3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^{(2)} \;\vdots b^{(2)}\right) \rightarrow \left(A^{(3)} \;\vdots b^{(3)}\right)$$

Donc :

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

6.2.3 Décomposition LU

La décomposition LU est une méthode de décomposition d'une matrice comme produit d'une matrice triangulaire inférieure L (comme *lower*, inférieure en anglais) formée de 1 sur la diagonale et une matrice triangulaire supérieure U (comme *upper*, supérieure). Cette décomposition est utilisée en analyse numérique pour résoudre des systèmes d'équations linéaires.

Exemple

Soit à résoudre le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 3 \\ 2x_1 + 8x_2 + 14x_3 = 6 \end{cases}$$

Peut être mis sous forme matricielle $Ax = b$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \\ 2 & 8 & 14 \end{bmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}}_{b}$$

On procède à la décomposition de LU de A comme suit :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \times \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \\ 2 & 8 & 14 \end{bmatrix}}_{A}$$

1ère étape : On multiplie la ligne 1 de L par U on obtient :

$$\begin{cases} u_{11} = 1 \\ u_{12} = 1 \\ u_{13} = 2 \end{cases} \Rightarrow A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}}_{U}$$

2ème étape : On multiplie la ligne 2 de L par U on obtient :

$$\begin{cases} l_{21} = 1 \\ l_{21} + u_{22} = 5 \\ 2l_{21} + u_{23} = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_{21} = 1 \\ u_{22} = 4 \\ u_{23} = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}}_{U}$$

3ème étape : On multiplie la ligne 3 de L par U on obtient :

$$\begin{cases} l_{31} = 2 \\ l_{31} + 4l_{32} = 8 \\ 2l_{31} + 6l_{32} + u_{33} = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_{31} = 2 \\ u_{32} = 3/2 \\ u_{33} = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U}}$$

Le système $Ax = b$ peut s'écrire comme suit :

$$\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U}}_{A} \times \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}}_{b}$$

La multiplication de la matrice U par le vecteur x donne un vecteur y :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}}_{b}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \times \underbrace{\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U} \times \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} \right)}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}}_{b}$$

Et on résout l'équation :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}}_{b} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U} \times \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boxed{\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

6.3 Méthodes itératives

6.3.1 Méthode de Jacobi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 - \left(a_{12}x_2 + a_{13}x_3\right) \\ a_{22}x_2 = b_2 - \left(a_{21}x_1 + a_{23}x_3\right) \\ a_{33}x_3 = b_3 - \left(a_{31}x_1 + a_{32}x_2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left[b_1 - \left(a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)}\right)\right] \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left[b_2 - \left(a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)}\right)\right] \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\left[b_3 - \left(a_{31}x_1^{(k)} + a_{32}x_2^{(k)}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots.. \end{cases}$$

Exemple

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} 26x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 12.6 \\ 3x_1 + 27x_2 + x_3 = -14.3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 17x_3 = 6 \end{cases}$$

Faire 5 itérations par la méthode de *Jacobi* en utilisant la solution initiale suivante pour approximer la solution du système donné : $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$

Solution

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{26}\left[12.6 - \left(2x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)}\right)\right] \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{27}\left[-14.3 - \left(3x_1^{(k)} + x_3^{(k)}\right)\right] \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{17}\left[6 - \left(2x_1^{(k)} + 3x_2^{(k)}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots.. \end{cases}$$

1ère itération

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{1}{26}\left[12.6 - \left(2x_2^{(0)} + 2x_3^{(0)}\right)\right] = \dfrac{1}{26}\left[12.6 - \left(2\times0 + 2\times0\right)\right] = 0.48462 \\ x_2^{(1)} = \dfrac{1}{27}\left[-14.3 - \left(3x_1^{(0)} + x_3^{(0)}\right)\right] = \dfrac{1}{27}\left[-14.3 - \left(3\times0 + 0\right)\right] = -0.52963 \\ x_3^{(1)} = \dfrac{1}{17}\left[6 - \left(2x_1^{(0)} + 3x_2^{(0)}\right)\right] = \dfrac{1}{17}\left[6 - \left(2\times0 + 3\times0\right)\right] = 0.35294 \end{cases}$$

2ème itération

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \dfrac{1}{26}\left[\ 12.6-\left(2x_2^{(1)}+2x_3^{(1)}\right)\right] = \dfrac{1}{26}\left[\ 12.6-\left(2\times(-0.52963)+2\times 0.35294\right)\right] = 0.49821 \\ x_2^{(2)} = \dfrac{1}{27}\left[-14.3-\left(3x_1^{(1)}+x_3^{(1)}\right)\right] = \dfrac{1}{27}\left[-14.3-\left(3\times 0.48462+0.35294\right)\right] = -0.59655 \\ x_3^{(2)} = \dfrac{1}{17}\left[6-\left(2x_1^{(1)}+3x_2^{(1)}\right)\right] = \dfrac{1}{17}\left[6-\left(2\times 0.48462+3\times(-0.52963)\right)\right] = 0.38939 \end{cases}$$

3ème itération

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \dfrac{1}{26}\left[\ 12.6-\left(2x_2^{(2)}+2x_3^{(2)}\right)\right] = \dfrac{1}{26}\left[\ 12.6-\left(2\times(-0.59655)+2\times 0.38939\right)\right] = 0.50006 \\ x_2^{(3)} = \dfrac{1}{27}\left[-14.3-\left(3x_1^{(2)}+x_3^{(2)}\right)\right] = \dfrac{1}{27}\left[-14.3-\left(3\times 0.49821+0.38939\right)\right] = -0.59941 \\ x_3^{(3)} = \dfrac{1}{17}\left[6-\left(2x_1^{(2)}+3x_2^{(2)}\right)\right] = \dfrac{1}{17}\left[6-\left(2\times 0.49821+3\times(-0.59655)\right)\right] = 0.39960 \end{cases}$$

4ème itération

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = \dfrac{1}{26}\left[\ 12.6-\left(2x_2^{(3)}+2x_3^{(3)}\right)\right] = \dfrac{1}{26}\left[\ 12.6-\left(2\times(-0.59941)+2\times 0.39960\right)\right] = 0.50000 \\ x_2^{(4)} = \dfrac{1}{27}\left[-14.3-\left(3x_1^{(3)}+x_3^{(3)}\right)\right] = \dfrac{1}{27}\left[-14.3-\left(3\times 0.50006+0.39960\right)\right] = -0.59999 \\ x_3^{(4)} = \dfrac{1}{17}\left[6-\left(2x_1^{(3)}+3x_2^{(3)}\right)\right] = \dfrac{1}{17}\left[6-\left(2\times 0.50006+3\times(-0.59941)\right)\right] = 0.39989 \end{cases}$$

6.3.2 Méthode de Gauss-Seidel

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 - \left(a_{12}x_2 + a_{13}x_3\right) \\ a_{22}x_2 = b_2 - \left(a_{21}x_1 + a_{23}x_3\right) \\ a_{33}x_3 = b_3 - \left(a_{31}x_1 + a_{32}x_2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left[b_1 - \left(a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)}\right)\right] \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left[b_2 - \left(a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)}\right)\right] \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\left[b_3 - \left(a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots.. \end{cases}$$

Exemple

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} 45x_1 + \ \ 2x_2 + \ \ 3x_3 = \ 58 \\ -3x_1 + 22x_2 + \ \ 2x_3 = \ 47 \\ \ \ 5x_1 + \ \ \ \ x_2 + 20x_3 = \ 67 \end{cases}$$

Faire 5 itérations par la méthode de *Gauss-Seidel* en utilisant la solution initiale suivante pour approximer la solution du système donné : $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$

Solution

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{45}\left[58 - \left(2x_2^{(k)} + 3x_3^{(k)}\right)\right] \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{22}\left[47 - \left(-3x_1^{(k+1)} + 2x_3^{(k)}\right)\right] \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{20}\left[67 - \left(5x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots.. \end{cases}$$

1ère itération

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{1}{45}\left[58 - \left(2x_2^{(0)} + 3x_3^{(0)}\right)\right] = \dfrac{1}{45}\left[58 - (2\times 0 + 3\times 0)\right] = 1.28889 \\ x_2^{(1)} = \dfrac{1}{22}\left[47 - \left(-3x_1^{(1)} + 2x_3^{(0)}\right)\right] = \dfrac{1}{22}\left[47 - (-3\times 1.28889 + 2\times 0)\right] = 2.31212 \\ x_3^{(1)} = \dfrac{1}{20}\left[67 - \left(5x_1^{(1)} + x_2^{(1)}\right)\right] = \dfrac{1}{20}\left[67 - (5\times 1.28889 + 2.31212)\right] = 2.91217 \end{cases}$$

2ème itération

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \dfrac{1}{45}\left[58 - \left(2x_2^{(1)} + 3x_3^{(1)}\right)\right] = \dfrac{1}{45}\left[58 - (2\times 2.31212 + 3\times 2.91217)\right] = 0.99198 \\ x_2^{(2)} = \dfrac{1}{22}\left[47 - \left(-3x_1^{(2)} + 2x_3^{(1)}\right)\right] = \dfrac{1}{22}\left[47 - (-3\times 0.99198 + 2\times 2.91217)\right] = 2.00689 \\ x_3^{(2)} = \dfrac{1}{20}\left[67 - \left(5x_1^{(2)} + x_2^{(2)}\right)\right] = \dfrac{1}{20}\left[67 - (5\times 0.99198 + 2.00689)\right] = 3.00166 \end{cases}$$

3ème itération

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \dfrac{1}{45}\left[58 - \left(2x_2^{(2)} + 3x_3^{(2)}\right)\right] = \dfrac{1}{45}\left[58 - (2\times 2.00689 + 3\times 3.00166)\right] = 0.99958 \\ x_2^{(3)} = \dfrac{1}{22}\left[47 - \left(-3x_1^{(3)} + 2x_3^{(2)}\right)\right] = \dfrac{1}{22}\left[47 - (-3\times 0.99958 + 2\times 3.00166)\right] = 1.99979 \\ x_3^{(3)} = \dfrac{1}{20}\left[67 - \left(5x_1^{(3)} + x_2^{(3)}\right)\right] = \dfrac{1}{20}\left[67 - (5\times 0.99958 + 1.99979)\right] = 3.00012 \end{cases}$$

4^ème^ itération

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = \frac{1}{45}\left[58-\left(2x_2^{(3)}+3x_3^{(3)}\right)\right] & = \frac{1}{45}\left[58-(2\times 1.99979+3\times 3.00012)\right] & = 1.00000 \\ x_2^{(4)} = \frac{1}{22}\left[47-\left(-3x_1^{(4)}+2x_3^{(3)}\right)\right] & = \frac{1}{22}\left[47-(-3\times 1.00000+2\times 3.00012)\right] & = 1.99999 \\ x_3^{(4)} = \frac{1}{20}\left[67-\left(5x_1^{(4)}+x_2^{(4)}\right)\right] & = \frac{1}{20}\left[67-(5\times 1.00000+1.99999)\right] & = 3.00000 \end{cases}$$

6.4 Critère d'arrêt

Pour arrêter les itérations on pourra utiliser le critère suivant basé sur la variation de la solution entre deux itérations successives :

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \leq \varepsilon,$$

avec ε seuil d'erreur fixé par l'utilisateur.

6.5 Condition de convergence

On démontre que si A est une matrice à diagonale strictement dominante (condition suffisante), la méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel sont convergentes.

Code SCILAB : (Méthode de Jacobi)

```
// La méthode de Jacobi                Par R.D. Mohammedi
clc,clear;
//Les entrées-------------------------------------------
A=[45 2 3;-3 22 2;5 1 20];             //la matrice A (Ax=b)
b=[58;47;67];                          //le vecteur b
epsilon=0.001;                         //la précision désirée
x0=[0 0 0];                            //la solution initiale
//-----------------------------------------------------
n=length(b);                           //nombre des inconus
erreur=100;err=[];
iter_max=100; itr=0;
x1=x0;
while (erreur>epsilon)&& itr<iter_max
    x0=x1;
    for i=1:n
        somme=0
        for j=1:n
            if j~=i
               somme=somme+A(i,j)*x0(j);
            end
        end
        x1(i)=(1/A(i,i))*(b(i)-somme);
     end
erreur=norm(x1-x0);err=[err erreur];itr=itr+1;
end
//Les sorties-------------------------------------------
disp('la solution est:'); disp(x1);
disp('le nombre des itérations est:');disp(itr);
plot([1:length(err)],err);          //Courbe de convergence
xlabel('itération');ylabel('erreur');title('Méthode Jacobi')
//-----------------------------------------------------
```

Résultat

```
la solution est:

   0.9999881    1.9999988    2.999975

le nombre des itérations est:

   6.
```

Code SCILAB : (Méthode de Gauss-Seidel)

```
// La méthode de Gauss-Seidel            Par R.D. Mohammedi
clc,clear;
//Les entrées----------------------------------------------
A=[45 2 3;-3 22 2;5 1 20];            //la matrice A (Ax=b)
b=[58;47;67];                         //le vecteur b
epsilon=0.001;                        //la précision désirée
x0=[0 0 0];                           //la solution initiale
//---------------------------------------------------------
n=length(b);                          //nombre des inconus
erreur=100;err=[];
iter_max=100; itr=0;
x1=x0;
while (erreur>epsilon) && itr<iter_max
    x0=x1;
    for i=1:n
        somme=0
        for j=1:n
            if j~=i
                somme=somme+A(i,j)*x1(j);
            end
        end
        x1(i)=(1/A(i,i))*(b(i)-somme);
    end
erreur=norm(x1-x0);err=[err erreur];itr=itr+1;
end
//Les sorties----------------------------------------------
disp('la solution est:'); disp(x1);
disp('le nombre des itérations est:');disp(itr);
plot([1:length(err)],err);            //Courbe de convergence
xlabel('itération');ylabel('erreur');title('Méthode Gauss-Seidel')
//---------------------------------------------------------
```

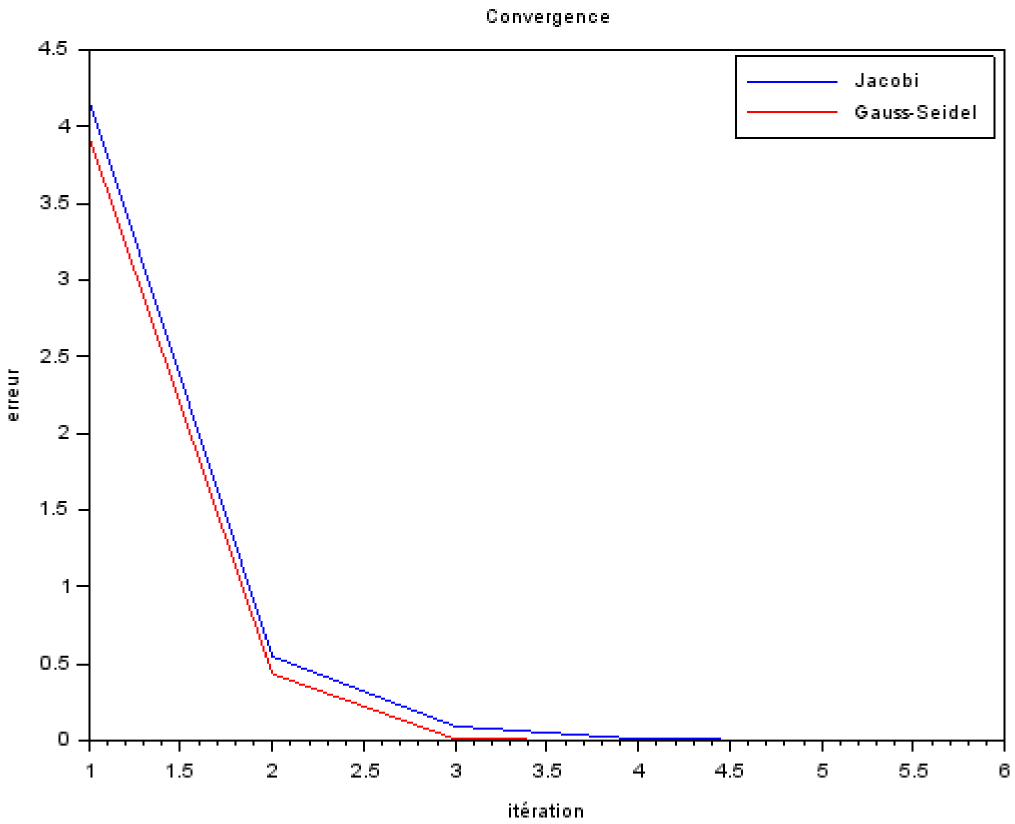
Résultat

```
la solution est:

  1.0000016   1.9999898   3.0000001

le nombre des itérations est:

  4.
```


Convergence
Jacobi
Gauss-Seidel
erreur
itération
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6

Bibliographie

[1] R. L. Burden and J. D. Faires, "Numerical analysis. 2001," *Brooks/Cole, USA*, 2001.

[2] J.-P. Chancelier, F. Delebecque, C. Gomez, M. Goursat, R. Nikoukhah, and S. Steer, *Introduction à SCILAB*: Springer Science & Business Media, 2007.

[3] S. Chapra and R. Canale, "Numerical Methods for Engineers. 2010," ed: McGraw-Hill, 2006.

[4] A. Fortin, *Analyse numérique pour ingénieurs*: Presses inter Polytechnique, 2011.

[5] R. J. Hosking, J. C. Turner, and D. C. Joyce, *First steps in numerical analysis*: Hodder and Stoughton, 1979.

[6] J. KIUSALAAS, "Numerical Methods in Engineering whit MATLAB," ed: Cambridge University Press. Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York, 2005.

[7] M. Lakrib, "Cours d'analyse numérique," 2017.

[8] J. H. Mathews and K. D. Fink, *Numerical methods using MATLAB* vol. 4: Pearson London, UK:, 2004.

[9] S. S. Sastry, *Introductory methods of numerical analysis*: PHI Learning Pvt. Ltd., 2012.

[10] P. Thangaraj, *Computer-Oriented Numerical Methods*: PHI Learning Pvt. Ltd., 2008.