

TP2 – Résolution des équations non linéaires (1)

Méthode de Dichotomie (Bisection)

Le principe de la méthode de dichotomie, encore appelée méthode de bisection, est basé sur le théorème de la valeur intermédiaire. La méthode est décrite comme suit : soit, $f : [a \ b] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue sur l'intervalle $[a \ b]$. Si $f(a) \times f(b) < 0 \rightarrow$ il existe donc au moins une racine de $f(x)$ appartenant à l'intervalle $[a \ b]$.

Les différentes étapes de la méthode peuvent être résumées comme suit :

1. Choisir un intervalle $[a \ b]$ tel que $f(a) \times f(b) < 0$.
2. Calculer la valeur de la fonction en $x_m = \frac{a+b}{2}$.
3. On choisit un nouvel intervalle $[a \ x_m]$ ou $[x_m \ b]$ en respectant la condition du (1). On est alors assuré de toujours encadrer la racine.
4. Si $f(a) \times f(x_m) < 0$ Remplacer la valeur de b par la valeur de x_m Sinon Remplacer la valeur de a par la valeur de x_m .
5. Répéter les étapes 2 et 3 jusqu'à l'obtention de la précision désirée, c'est à dire jusqu'à ce que $|f(x_m)| < \varepsilon$, avec ε étant la précision désirée.

Remarque Le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir un résultat donné avec une erreur ε à partir d'un intervalle initial $[a \ b]$ est : $r \approx \frac{\log|b-a| - \log \varepsilon}{\log(2)}$

Algorithmme

Données : f, a, b, ε

$$x_m = \frac{a+b}{2}$$

Tan que $|f(x_m)| > \varepsilon$ **faire**

Si $f(a) \times f(x_m) < 0$ **alors**

$$b = x_m$$

Sinon

$$a = x_m$$

FinSi

$$x_m = \frac{a+b}{2}$$

Fin Tanque

Afficher x_m

Exemple

Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 4x - 10$ possède une racine dans l'intervalle $[1 \ 2]$ et approximer la racine par la méthode de dichotomie avec une précision $\varepsilon = 0.001$.

Solution

$f(1) = -5$ et $f(2) = 2$. Puisque f est une fonction continue et que $f(1) \times f(2) < 0$, le théorème de valeur intermédiaire démontre que f possède au moins une racine dans l'intervalle $[1 \ 2]$.

Le nombre d'itérations : $r \approx \frac{\ln|1-2| - \ln 0.001}{\ln 2} \rightarrow r \approx 10$

Itération	a	b	x_m	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_m)$
0	1	2	1.5	-5	2	-1.75
1	1.5	2	1.75	-1.75	1.5	0.0625
2	1.5	1.75	1.625	-1.75	0.0625	-0.859375
3	1.625	1.75	1.6875	-0.859375	0.0625	-0.402344
4	1.6875	1.75	1.71875	-0.402344	0.0625	-0.170898
5	1.71875	1.75	1.734375	-0.170898	0.0625	-0.054443
6	1.734375	1.75	1.742188	-0.054443	0.0625	0.003971
7	1.734375	1.742188	1.738282	-0.054443	0.003971	-0.025248
8	1.738282	1.742188	1.740235	-0.025248	0.003971	-0.010642
9	1.740235	1.742188	1.741212	-0.010642	0.003971	-0.003333
10	1.741212	1.742188	1.741700	-0.003333	0.003971	0.000319 < ε

La solution est $x \approx 1.741700$

Travail demandé

Ecrire le programme **Prog1.m** qui résout l'équation $f(x) = e^{-2x} - \cos(x) - 3$ dans l'intervalle $[-2, +2]$ par la méthode de **Dichotomie** et tracer la courbe de la fonction sur cet intervalle.