

TP3 – Résolution des équations non linéaires (2)

1- Méthode de Point Fixe

Exemple

Résoudre l'équation $x + e^x + 1 = 0$ par la méthode de point fixe avec $x_0 = -0.5$ avec une précision $\varepsilon = 0.001$.

Solution

L'équation $f(x) = x + e^x + 1 = 0$ peut être mise sous la forme $x = g(x)$ avec $g(x) = -e^x - 1$

Itération	x	$g(x) = -e^x - 1$	$f(x) = x + e^x + 1$
0	-0.5	-1.6065	1.10653
1	-1.6065	-1.2006	0.40595
2	-1.2006	-1.3010	0.10044
3	-1.3010	-1.2722	-0.02876
4	-1.2722	-1.2802	0.00795
5	-1.2802	-1.2780	-0.00222
6	-1.2780	-1.2786	0.00059 < ε

La solution est $x \approx -1.2780$

Algorithme

Données : f, g, x_i, ε

Tan que $|f(x_i)| > \varepsilon$ **faire**

$$x_f = g(x_i)$$

$$x_i = x_f$$

Fin Tanque

Afficher x_f

Travail demandé

Ecrire le programme **Prog2.m** qui résout l'équation $e^{-x} - x = 0$ par la méthode de point fixe avec $x_i = 1$ et $\varepsilon = 0.001$.

2- Méthode de Newton-Raphson

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Exemple 1

Résoudre l'équation $\cos(x) - x^3 = 0$ par la méthode de *Newton-Raphson* avec $x_0 = 0.5$ avec une précision $\varepsilon = 0.001$.

Solution

On recherche la racine de $f(x) = \cos(x) - x^3$. La dérivation donne $f'(x) = -\sin(x) - 3x^2$.

$$x_0 = 0.5 \rightarrow |f(x_0)| = 0.7526 > \varepsilon$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.5 - \frac{\cos(0.5) - 0.5^3}{-\sin(0.5) - 3 \times 0.5^2} \approx 1.1121 \rightarrow |f(x_1)| = 0.9328 > \varepsilon$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.1121 - \frac{\cos(1.1121) - 1.1121^3}{-\sin(1.1121) - 3 \times 1.1121^2} \approx 0.9097 \rightarrow |f(x_2)| = 0.1388 > \varepsilon$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.9097 - \frac{\cos(0.9097) - 0.9097^3}{-\sin(0.9097) - 3 \times 0.9097^2} = 0.8673 \rightarrow |f(x_3)| = 0.0054 > \varepsilon$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 0.8673 - \frac{\cos(0.8673) - 0.8673^3}{-\sin(0.8673) - 3 \times 0.8673^2} = \boxed{0.8655} \rightarrow |f(x_4)| \approx 0.0000 < \varepsilon$$

La solution est $\boxed{x \approx 0.8655}$

Algorithme

Données : f, f', x_i, ε

Tan que $|f(x_i)| > \varepsilon$ **faire**

$$x_f = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$x_i = x_f$$

Fin Tanque

Afficher x_f

Travail demandé

1- Ecrire le programme **Prog3.m** qui résout l'équation $f(x) = e^{-2x} - \cos(x) - 3$ par la méthode de *Newton-Raphson* avec $x_i = -2$ et $\varepsilon = 0.001$.

2- Ecrire le programme **Prog4.m** qui calcul une valeur approximative de la $\sqrt{17}$ par la méthode de *Newton-Raphson*.