1. Eléments de la théorie des ensembles.

1.1 Ensemble, opérations élémentaire.

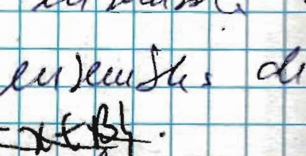
Déf : Un ensemble est une collection d'objets ra
d'après une propriété commune.

Exemples : - L'ensemble des points sur une droite
- L'ensemble des nombres entiers.

- Un ensemble est constitué d'éléments.
l'élément x appartenant à l'ensemble E se note $x \in E$; la négation de cette relation s'écrit $x \notin E$.

Parties d'un ensemble :

- Un ensemble A dont tous les éléments appartiennent à un ensemble E est appelé partie ou sous-de E. On écrit $A \subset E$ ou $E \supset A$; la négation $A \subset E$ s'écrit $A \not\subset E$.
- L'ensemble vide, noté $\emptyset$ (partie ne contenant aucun élément)
- $\mathcal{P}(E)$: l'ensemble des parties de E : ensemble d éléments ~~de E~~ sont tous les sous-ensembles de
- ~~$A\cup B=\{x\in E / x\in A \text{ ou } x\in B\}$, $A\cap B=\{x\in E / x\in A \text{ et } x\in B\}$~~.
- l'ensemble complémentaire d'une partie A de C_E^A ou $\bar{A}$: l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.



$$C_E^A = \{x \in E \,/\, x \notin A\}.$$

- $A - B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \setminus B$

• $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

Rappel de logique :

Une proposition P est fausse si son contraire (ou sa négation), notée $\overline{P}$, est vraie.

• tableaux de vérité :

Soient A, B des propositions. La définition des propositions $\overline{A}$, (A ou B), (A et B), ($A \Rightarrow B$) est résumée dans les tableaux de vérité ci-dessous.

A	$\overline{A}$
V	F
F	V

A	B	A ou B	A et B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	F	F	V	V

Si A et B sont deux propositions, on a alors :

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{A} \text{ ou } B)$$
$$\overline{(A \text{ ou } B)} \Leftrightarrow (\overline{A} \text{ et } \overline{B})$$
$$\overline{(A \text{ et } B)} \Leftrightarrow (\overline{A} \text{ ou } \overline{B})$$
$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{A} \Rightarrow \overline{B})$$
$$\overline{(A \Rightarrow B)} \Leftrightarrow (A \text{ et } \overline{B})$$

• Une relation ou proposition A qui dépend de l'élément x s'écrit $A(x)$.

* On écrit $\exists x : A(x)$ pour exprimer que la relation $A(x)$ est vraie pour au moins un x de E.
* On écrit $\forall x : A(x)$: si $A(x)$ est vérifiée pour tous éléments x de E.

* Pour établir la négation d'une proposition, on remplace les signes $\subset$, $\in$, $=$, et, ou, non situés immédiatement ~~d~~ derrière un quantificateur par $\not\subset$, $\notin$, $\neq$, ou, et, et inversement, on remplace $\exists$ par $\forall$, $\forall$ par $\exists$ et la conclusion sa négation.

Ainsi :
$$\overline{\forall x\ P(x)} \Leftrightarrow \exists x\ \overline{P(x)}$$
$$\overline{\exists x\ P(x)} \Leftrightarrow \forall x\ \overline{P(x)}.$$

Exemple :
$$\overline{A \subset B \Leftrightarrow \forall a\ (a \in A \Rightarrow a \in B)}$$
$$\Updownarrow$$
$$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists a\ (a \in A \text{ et } a \notin B).$$

négation
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$
$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \eta > 0 : |x - x_0| < \varepsilon \text{ et } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

$$\overline{\exists x \in E \quad A(x)} \Leftrightarrow \forall x \in E : \overline{A(x)}.$$

Opérations sur les ensembles :

Soient A et B sont deux sous-ensemble de E.

- $A \subset B \Leftrightarrow \forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B$
- $A = B \Leftrightarrow (A \subset B)$ et $(B \subset A)$.
- $C_E^A = \overline{A} = \{x \in E \,/\, x \notin A\}$.
- $A \cup B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
- $A \cap B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ et } x \in B\}$.

- $A - B = A \setminus B = \{ x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B \} = A \cap C_E^B$
  Différence
- $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.
  différence symétrique
- $A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A$ (commutativité)
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ (associativité)
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$
- $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C = A \Delta B \Delta C$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ distributivité
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cup A = A \quad ; \quad A \cap A = A$.
- $C_E^{(A \cap B)} = C_E^A \cup C_E^B$.
- $C_E^{(A \cup B)} = C_E^A \cap C_E^B$
- $A \cap C_E^A = \emptyset \quad ; \quad A \cup C_E^A = E$.
- $C_E^{(C_E^A)} = A$.
- $A \subset B \Leftrightarrow C_E^A \supset C_E^B$.

Les ensemble $\emptyset$ et E sont que pour toute partie A :

- $\emptyset \subset A \subset E$
- $\emptyset \cap A = \emptyset \quad ; \quad \emptyset \cup A = A$.
- $E \cap A = A \quad ; \quad E \cup A = E$.

- $A \neq B$: $(\exists x \in A, x \notin B)$ ou $(\exists x \in B, x \notin A)$ distinc
  distinctes
- $A \cap B = \emptyset$ $(\forall x \in A, x \notin B)$ et $(\forall x \in B, x \notin A)$
  disjoints

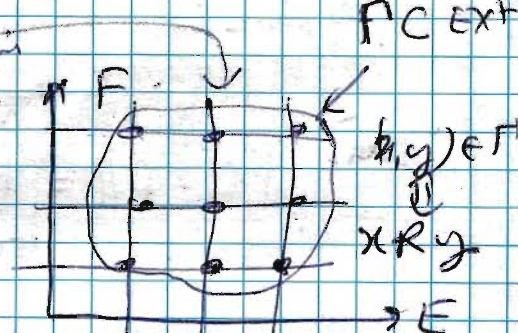
Produit cartésien :

Soient A et B deux ensemble de E, le produit cartésien de A et B est l'ensemble qu'on note $A \times B$ définie comme suit :

$$A \times B = \{ (x,y) \in E^2 \ / \ x \in A \text{ et } x \in B \}.$$

Application :

Si E=F on définit une relation sur E



– Relation –

Soit E et F deux ensemble.

Definir une relation binaire R entre les ensembles E et F c'est se donner une partie ~~de graphe~~.

$\Gamma \subset E \times F$.

Definition : Soit R une relation dans E, (*) on dira que R est reflexive ssi :

$$\forall x \in E \ ; \ x R x \Leftrightarrow \Delta = \{ (x,x), x \in E \} \subset \Gamma$$

(**) On dira R est Symetique ssi :

$$\forall x \in E, \forall y \in E \ ; \ x R y \Rightarrow y R x.$$

$$\Updownarrow$$

$$(x,y) \in \Gamma \Longrightarrow (y,x) \in \Gamma$$

(***) : On dira que R est transitive ssi :

$$\forall x, \forall y, \forall z \in E \ \left\{ \begin{array}{l} x R y \\ y R z \end{array} \right. \Rightarrow x R z$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) \in \Gamma \\ (y,z) \in \Gamma \end{cases} \Rightarrow (x,z) \in \Gamma$.

Definition relation d'equivalence : On dira que $\mathcal{R}$ une relation d'equivalence ssi : $\mathcal{R}$ reflexive, symetrique et transitive.

- classe d'equivalence :

Si $a \in E$, on definit la classe de a qu'on notera $\dot{a} = \{ x \in E,\ x \mathcal{R} a \}$.

→ l'ensemble de toutes les classes d'equivalence sera noté $E/\mathcal{R}$

theoreme : Les classes d'equivalence realisent une partition de E

i) E = reunion de toutes les classes d'equivalence.

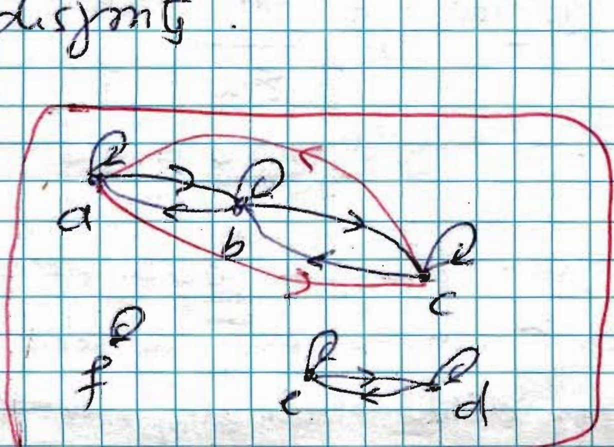
ii) deux classes d'equivalence sont disjoints.

Exemple :

$C_a = \dot{a} \{a, b, c\}$

$C_f = \dot{f} = \{f\}$.

$C_d = \dot{d} = \{d, e\}$.



Définition d'une relation d'ordre :

Soit $\mathcal{R}$ une relation dans E.

On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre dans E ssi :

$\mathcal{R}$ est reflexive : $\forall x \in E : x \mathcal{R} x$.

$\mathcal{R}$ antisymetrique : $\forall x, y \in E \ x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y$.

$\mathcal{R}$ transitive : $\forall x, y, z \in E : \begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \Rightarrow x \mathcal{R} z$.

Ordre total, ordre partiel :

Si $x \mathcal{R} y$ ou $y \mathcal{R} x$, on dit que x et y sont comparables $\Rightarrow (E, \mathcal{R})$ est d'ordre total.

Exemple : $(\mathcal{P}(E), \subset)$ n'est pas d'ordre total

$(\mathbb{Z}, \leq)$ est d'ordre total.

* Si $(E, \mathcal{R})$ n'est pas d'ordre total on dit que $(E, \mathcal{R})$ d'ordre partiel.

Elements remarquables : (Majorants, minorant)

~~Soit $(E, \mathcal{R})$ une relation d'ordre et $A \subset E$.~~

~~Soit $M \in E$. on dit que M~~

$(\mathbb{R}, \leq)$ est une relation d'ordre. (totale).

Soit $I \subset \mathbb{R}$, soit $M, m \in I$, on dit que

* On dira que M est le plus grand element de I si

$$\begin{cases} M \in I \\ \forall x \in I,\ x \leq M. \end{cases}$$

→ On dit que M est majorant de I si $\forall x \in I,\ x \leq M$, $M \in \mathbb{R}$

→ M est dit borne superieure de I notée $\sup(I)$ s'elle est le plus petit des majorants

* On dira que m est le plus petit element de I si

$$\begin{cases} m \in I \\ \forall x \in I,\ m \leq x. \end{cases}$$

→ On dit que m est minorant de I si $\forall x \in I,\ m \leq x$, $m \in \mathbb{R}$.

→ m est dit la borne inferieure de I notée $\inf(I)$ s'il est plus grand ~~minorant~~ des minorants.

<u>Exemple</u>: $I = [0, 3[$

On a I est majoré par 3, 6, 7 ..

3 est le plus petit majorants → $\sup(I) = 3$.