Suites Numerique

I) Generalité : $\mathbb{K}$: designe l'un des corps $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$

- Définition : On appelle une suite d'élément de $\mathbb{K}$ une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$.

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$n \longmapsto u(n) = u_n$$

On designe une suite, en écrivant ses termes successifs $u_0, u_1, u_2, \ldots$ dans l'ordre, ou sous forme $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n), ou en donnant son terme general $u_n \in \mathbb{K}$.

* Suites recurrentes : Etant donnée une fonction numérique f, on peut définir une suite (u_n) en se donnant le premier terme u_0 et la relation de recurrence $u_n = f(u_{n-1})$ pour tout entier n non nul.

* On montre dans l'ensemble des suite numerique que :

$$u_n + v_n = v_n + u_n$$
$$u_n \cdot v_n = v_n \cdot u_n$$

Remarque : $(u_n) = (v_n) \Longleftrightarrow u_n = v_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

II) Quelque carteres des suites

1- Suite monotones : une suite (u_n) est croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq u_{n+1}$

$\Leftrightarrow \quad m < n \Rightarrow u_m \leq u_n$

Elle est strictement croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n < u_{n+1} \Leftrightarrow m < n \Rightarrow u_m < u_n$.

* Une suite (u_n) est décroissante (resp. strictement décroissante) si si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq u_{n+1}$ (pour tout entier $m < n \Rightarrow u_m > u_n$).

* On dit qu'une suite (u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.

* Une suite (u_n) est stationnaire ou constante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_{n+1}$.

2- Suites bornées :

- Une suite (u_n) est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- Une suite (u_n) est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- Une suite est bornée si elle à la fois majorée et minorée, c.à.d s'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tel que $m \leq u_n \leq M$.

→ On montre également que la suite (u_n) est bornée s'il existe un réel M positif non nul tel que $|u_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

III- Nature d'une suite :

Une suite (u_n) d'éléments de $\mathbb{R}$ est convergente s'il existe un élément l de $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

on dit que la suite (U_n) tend vers l, ou converge vers l, on écrit :

$$(U_n) \longrightarrow l \neq \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{n \to +\infty} U_n = l \neq \infty .$$

→ toute suite convergente a une ~~suite~~ limite unique.

* Limites infinies :

$\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty \iff \forall A > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N},$
$n \geq m \rightarrow U_n > A .$

$\lim_{n \to +\infty} U_n = -\infty \iff \forall A < 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}$
$n \geq m \Rightarrow U_n < A .$

*** Suite de Cauchy :** Une suite (U_n) est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 :$$
$$(p \geq N \text{ et } q \geq N) \Rightarrow |U_p - U_q| < \varepsilon .$$

*** Suites adjacentes :**
Deux suites $(U_n), (V_n)$ sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et la différence $(U_n) - (V_n)$ tend vers 0 (quand $n \to +\infty$).
Deux suites adjacentes sont convergentes $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} V_n = l$

Théorèmes Fondamentaux :

proposition 1 :

(U_n) une suite de nombres réels et
$E = \{ U_n \in \mathbb{R} , n \in \mathbb{N} \}$. Alors :

a) (U_n) croissante majorée $\Rightarrow$ (U_n) converge vers la limite $l = M = \sup(E)$.

b) (U_n) décroissante minorée $\Rightarrow$ (U_n) converge vers la limite $l = m = \inf(E)$.

2- propriétés fondamentales :

(1) Si une suite est convergente alors elle est bornée.

(2) La suite (U_n) tend vers $l \in \mathbb{R} \Rightarrow (|U_n|)$ tend vers $|l|$.

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = l \rightarrow \lim_{n \to +\infty} |U_n| = |l|.$$

La réciproque est fausse. Exemple $U_n = (-1)^n$

$-1, 1$ 2 valeurs d'adhérence.

(3) Soient (U_n) et (V_n) deux suites convergentes de limites respectives l et $l' \in \mathbb{R}$ alors :

$$\lim_{n \to +\infty} (V_n) = l' \quad , \quad \lim_{n \to +\infty} (U_n) = l$$

a) $\lim_{n \to +\infty} (U_n + V_n) = l + l'$

b) $\lim_{n \to +\infty} (U_n . V_n) = l . l'$

c) $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{U_n}{V_n}\right) = \frac{l}{l'}$ si $l' \neq 0$.

(4) $\begin{cases} (U_n) \text{ converge vers } l \\ (V_n) \text{ converge vers } l' \end{cases}$ (réels)

s'il existe ~~n~~ N tel que $n \geq N$ et $U_n < V_n \} \Rightarrow l \leq l'$

(γ) (u_n), (v_n) convergeant vers la même limite ℓ et (w_n) une suite.

Si il $\exists$ un entier N / $n \geq N$: $u_n \leq w_n \leq v_n$ alors la suite (w_n) converge vers ℓ.

(δ) Toute suite de Cauchy est bornée.

3) Sous-suites, suites extraites ou suites partielles :

Etant données une suite (u_n) et une application strictement croissante

$$s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$k \longmapsto s(k)$$

la suite (v_k) définie $v_k = u_{s(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ est appelée sous-suite ou suite extraite de la suite (u_n).

Exemple : La suite (v_{2k}) est une sous suite de (u_n).

. La sous-suite (v_k) peut être notée (v_k) : $v_k = u_{n_k}$ au lieu $u_{s(k)}$.