Fonctions Numériques d'une variable réelle : ~~I) Limites~~.

Notions générals

I-) Généralités :

Définition d'une fonction numériques : f est dite une fonction numérique ssi l'ensemble d'arrivée st l'ensemble de nombres réels

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = f(x)$$

Définition d'une fonction numérique d'une variable réelle : f est dite fonction ~~fonction~~ numérique d'une variable réelle ssi l'ensemble de départ est une partie de $\mathbb{R}$ et l'ensemble d'arrivée st l'ensemble $\mathbb{R}$.

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et } E \subset \mathbb{R}.$$
$$x \longmapsto y = f(x)$$

Ensemble de définition d'une fonction d'une variable réelle.

Est une partie de $\mathbb{R}$ qui possède une image par cette fonction.

$$f : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = f(x)$$

$$D_f = D(f) = \{x \in E \;/\; y = f(x)\}.$$

5) Opérations sur les ensembles :

Soient f et g deux fonctions de variable réelle de domaines de définition D_f et D_g.

- addition de deux fonction f et g est définie par :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g .$$

- Multiplication de deux fonction f et g est définie par :

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g .$$

- Division de deux fonction f et g est définie par :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{ x \in D_f \cap D_g \; ; \; g(x) \neq 0 \} .$$

- composition de deux fonctions f et g est la fonction $g \circ f$ définie : $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$.

$$D_{g \circ f} = \{ x \in D_f \, , \, f(x) \in D_g \} .$$

II- variation d'une fonction sur un intervalle I

Soit f une fonction définie par l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

$$f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = f(x).$$

- f est dite une fonction croissante sur I ssi

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

- f est dite une fonction ~~croissante~~ strictement croissante sur I ssi

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- f est dite une fonction décroissante sur I ssi

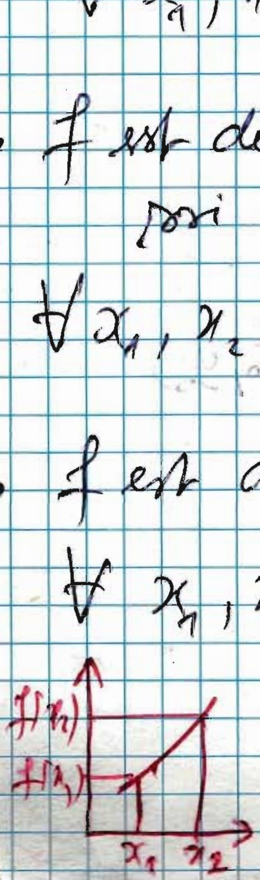
$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

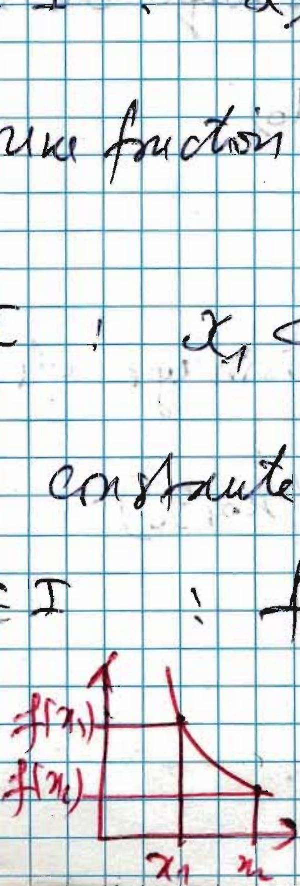
- f est dite une fonction strictement décroissante sur I ssi

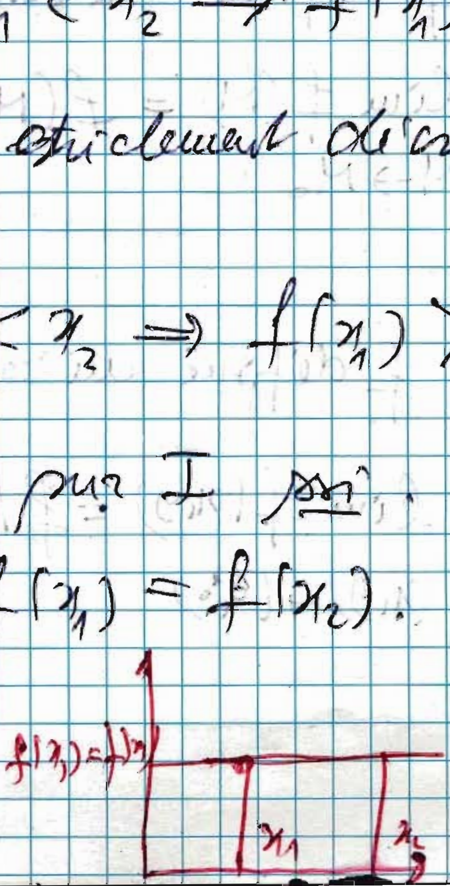
$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

- f est dite constante sur I ssi.

$$\forall x_1, x_2 \in I : f(x_1) = f(x_2).$$







• Graphe d'une fonction. $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

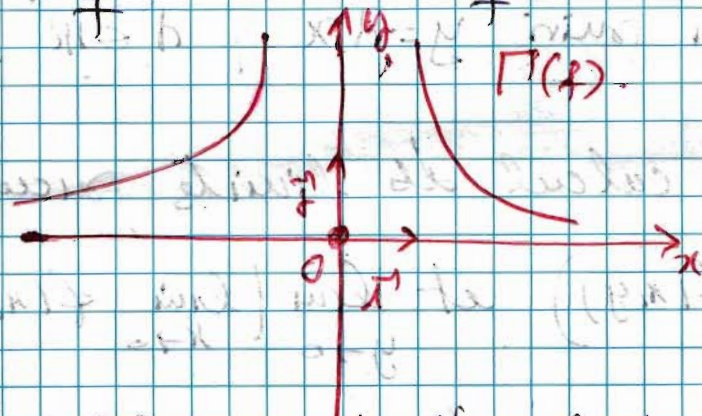
$$\Gamma(f) = \{ (x, y = f(x)) \in \mathbb{R}^2 / x \in I \}.$$

• **fonctions paire :**

Soit f une fonction définie de $E \subset \mathbb{R}$.

f est dite fonction paire ssi.

$$\forall x \in D_f : -x \in D_f \text{ et } f(-x) = f(x)$$



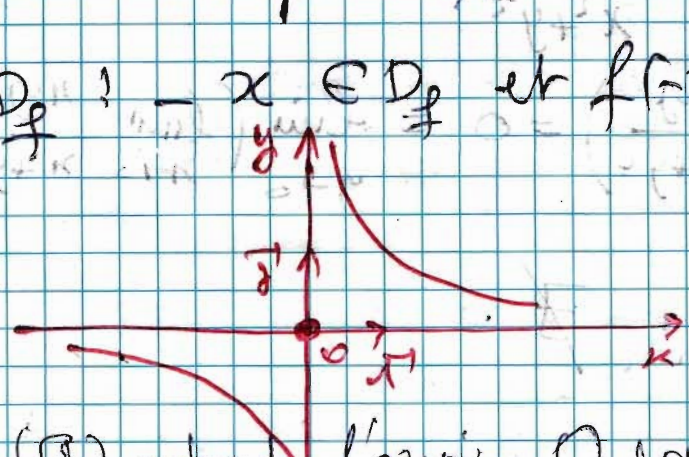
Son graphe (Γ) admet l'axe (yy') comme axe de symetrie

• **fonctions impaire :**

Soit f une fonction définie de $E \subset \mathbb{R}$.

f est dite fonction impaire ssi.

$$\forall x \in D_f : -x \in D_f \text{ et } f(-x) = -f(x).$$



Son graphe (Γ) admet l'origine O comme centre de symetrie

• fonction périodique :

Soit f une fonction $f : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

f est dite périodique ssi : s'il exist $T \in \mathbb{R}$.

$$\forall x \in D_f : x+T \in D \text{ et } x-T \in D \text{ et }$$
$$f(x+T) = f(x)$$

T appelée : période de la fonction f.

Exemple $\quad f(x) = \sin x$

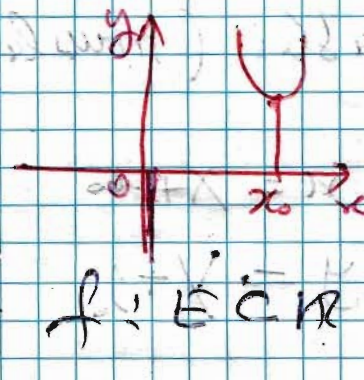
$\quad f(x) = \sin x = \sin(x + 2\pi) \qquad T = 2\pi$

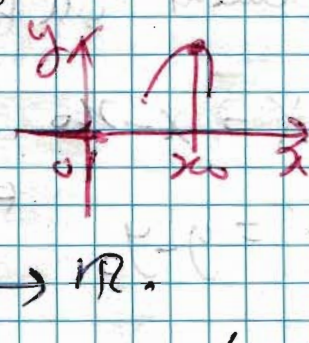
• Extremums (minimums, maximums) :

Minimum : soit $f : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

x_0 est dite minimum de la fonction f s'il existe un intervalle I ouvert telque :

$$x_0 \in D_f \subset I \text{ et } \forall x \in D_f : f(x_0) \leq f(x)$$





Maximum : soit $f : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

x_0 est dite maximum de la fonction f s'il exite un intervalle I ouvert tel que.

$$x_0 \in D_f \subset I \text{ et } \forall x \in D_f \; f(x) \leq f(x_0)$$