CH : Continuité

Déf₁ (Continuité d'une fonction au pt x_0).

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert D avec $x_0 \in D$.

f est dite continue au pt x_0 ssi :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Dans le cas α ne dépend que de ε → continuité uniforme.

Déf₂ : Continuité à droite de x_0

Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle de la forme $[x_0, x_0 + a[$.

f est dite continue à droite du pt x_0 ssi :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x) = f(x_0).$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : 0 < x - x_0 < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Déf₃ : Continuité à gauche de x_0 :

Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle de la forme $]x_0 + a, x_0]$. f est dite continue à gauche de x_0 ssi :

$$\lim_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : 0 < x_0 - x < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Continuité sur un intervalle (théorème) ;

Soit D un intervalle ouvert de la forme $]a, b[$ ou $]-\infty, a[$ ou $]a, +\infty[$. f une fonction définie sur D.

- f dite continue sur l'intervalle D ssi f est continue en x_0, $\forall x_0 \in D$.

Exemple :

f est continue sur $D = [a, b] \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\ f \text{ est continue sur }]a,b[\\ \bullet\ f \text{ est continue à droite de } a \\ \bullet\ f \text{ est continue à gauche de } b \end{cases}$

Remarque : le graphe Γ_f de f (continue sur $[a,b]$) est une ligne qui ne présente pas de coupures. (fig 1).

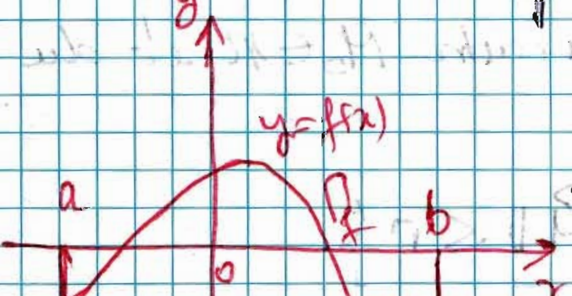
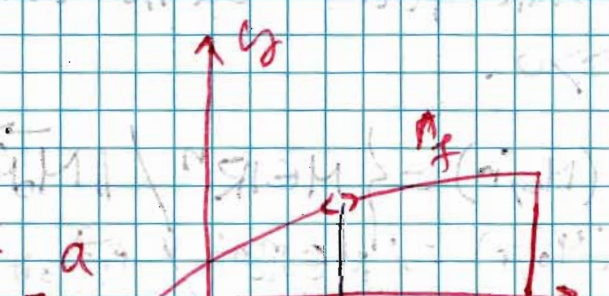
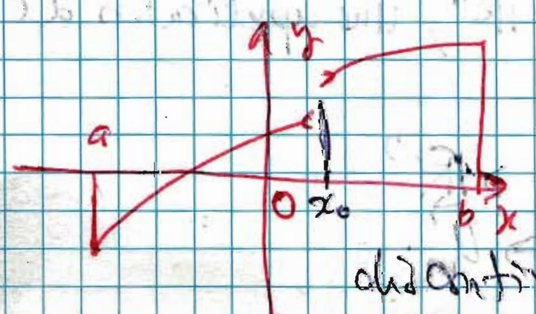
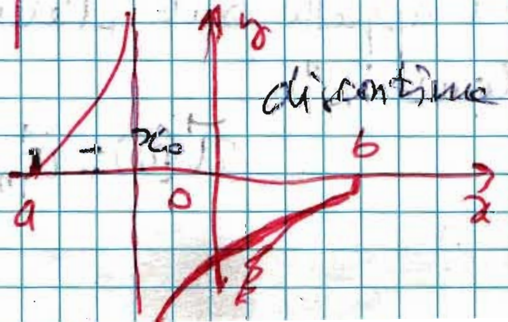


fig.1)







Prolongement par continuité :

Soit $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$, f une fonction n'est pas définie au pt x_0, et continue dans $D - \{x_0\}$.

Si f admet de limite l au pt x_0 c'-à-d

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l .$$

la fonction g définie :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D - \{x_0\} \\ l = \lim_{x \to x_0} f(x) = l \end{cases}$$

est dite prolongement par continuité de f au pt x_0.

théorèmes des fonctions continues :

Thm1 : Soient f, g deux fonctions

Si la limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ et g est continue au pt l Alors,

$$\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = \lim_{x \to x_0} g[f(x)] = g[\lim_{x \to x_0} f(x)] = g(l)$$

Remarque : Ce théorème reste tj valable pour $x \xrightarrow{<} x_0$, $x \xrightarrow{>} x_0$, $x \to \pm\infty$.

Théorème 2 : Soit f et g deux fcts.
Si f est continue en x_0 et g est continue en $y_0 = f(x_0)$ Alors :
$g \circ f$ est continue en x_0 c'à-d :

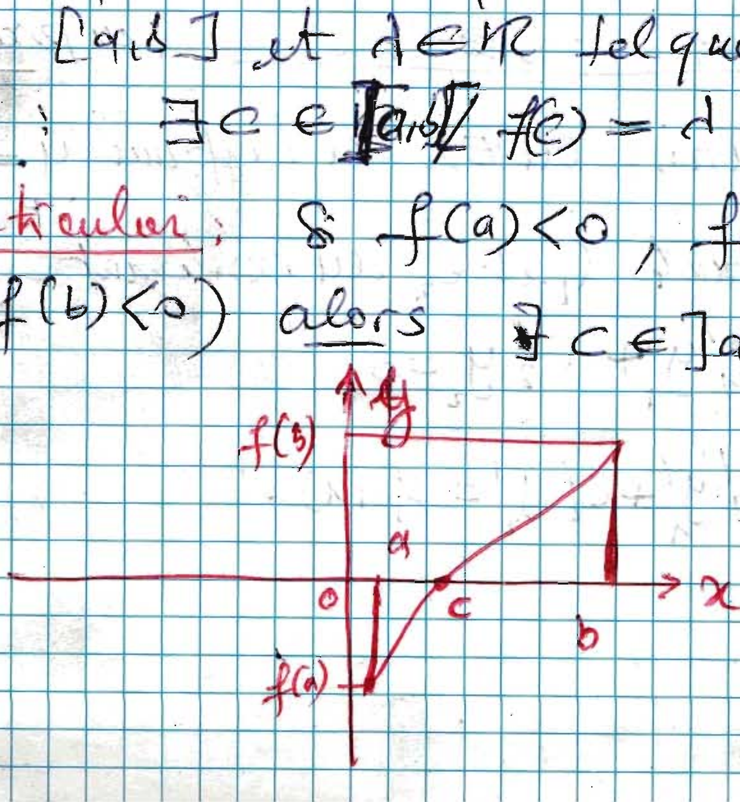
$$\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = g \circ f(x_0) = g[f(x_0)].$$

Théorème 3 : Soient f et g deux fct continues au pt x_0 et $k \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions :

1) $f+g$, $f \times g$, $k f$ sont continues au pt x_0.
2) $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ continues en pt x_0 si $g(x_0) \neq 0$.
3) $|f|$ est continue au pt x_0.

Théorème 4 (thm de la valeur intermédiaire).
Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle fermé $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $f(a) < \lambda < f(b)$
Alors : $\exists c \in [a,b] \,/\, f(c) = \lambda$.

Cas particulier : Si $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ (c'à-d : $f(a) \cdot f(b) < 0$) alors $\exists c \in]a,b[\,/\, f(c) = 0$



Remarque: L'image d'un intervalle par une fonction continue est intervalle.

__En générale__ : $f([a,b]) \neq [f(a), f(b)]$

$f(]a,b[)$ n'est pas tj un intervalle ouvert.

- Si f est croissante sur $[a,b]$ alors

$$f([a,b]) = [f(a), f(b)]$$

- Si f est décroissante sur $[a,b]$.

$$f([a,b]) = [f(b), f(a)]$$

__fonction inverse__ : (fonction __réciproque__)

Déf: Soient D et D' deux partie de $\mathbb{R}$ et f est une fonction définie de D vers $D' = f(D)$

On sait que si f est une application bijective admet une application inverse (réciproque) f^{-1} définie :

$$\forall x \in D, \forall y \in D' : y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

__Graphe d'une fonction réciproque__ :

__théorème__, le graphe Γ_f de f et $\Gamma_{f^{-1}}$ de f^{-1} admet l'axe $(y = x)$ comme axe de symétrie

__théorème 2__ :

Si f une fonction continue et strictement monotone

Sur un intervalle D, f admet une fonction réciproque possédant les propriétés suivantes:

1) f^{-1} définie de $f(D) \longrightarrow D$.

2) f^{-1} continue et strictement monotone sur D et admet les même variations (table de variation) que f.

fonction circulaire réciproque

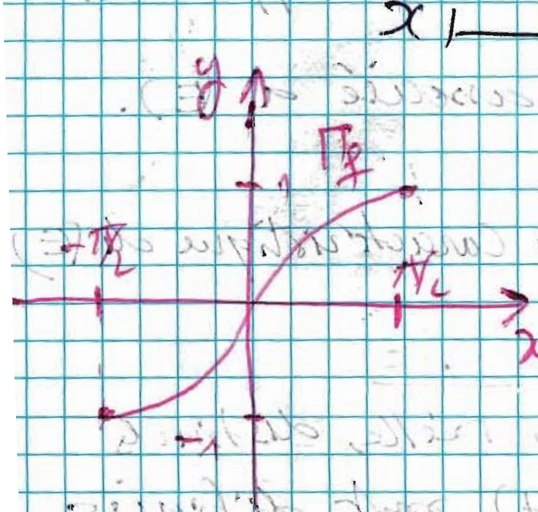
1) • $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$

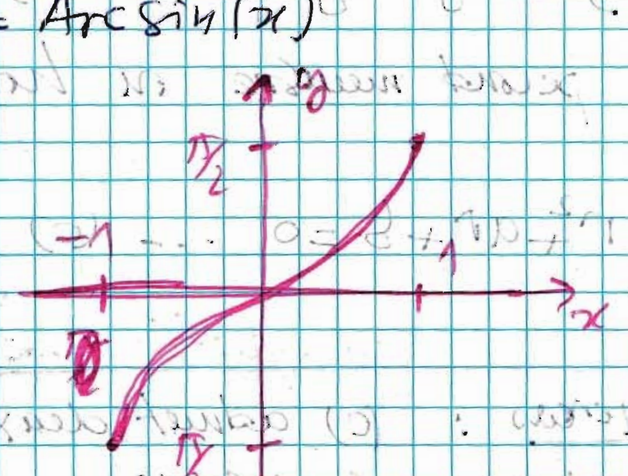
$\quad x \longmapsto \sin(x)$

f est continue, strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$, donc bijective.

$f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\quad x \longmapsto y = \mathrm{Arcsin}(x)$





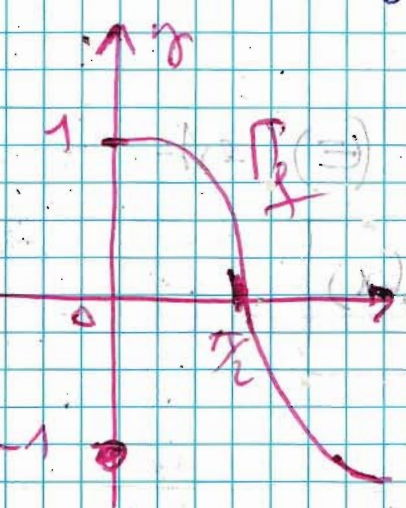
) $f : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$

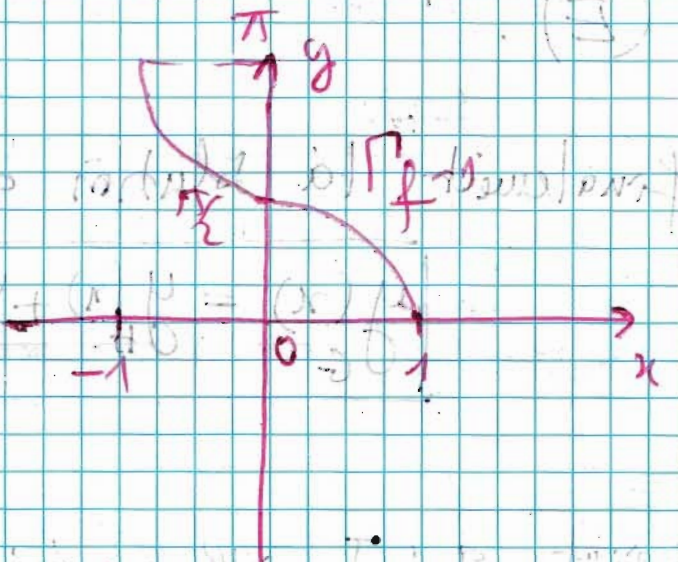
$x \longmapsto y = \cos(x)$

$\Downarrow$ $\begin{cases} \text{continue} \\ \text{strictement décroissante sur } [0,\pi]. \longrightarrow f^{-1} \end{cases}$

$f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$

$x \longmapsto y = \text{Arcos}(x)$





3) $f :]-\pi/2, \pi/2[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto y = tg(x)$

$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow]-\pi/2, \pi/2[$

$x \longmapsto y = \text{Arctg}(x)$