Dérivation (Dérivées du 1er ordre)

1- Définition :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ ($I \neq \{x_0\}$), et une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en x_0, s'il existe un nombre réel b tel que :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \neq x_0)}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b$$

b est appelé dérivée de f au point x_0 notée $f'(x_0)$.

→ La fonction f est dérivable dans un intervalle ouvert I quand elle dérivable en tout point x_0 de I

→ la fonction $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto y = f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f.

→ La fonction est dite n'admet de dérivée au point x_0 ssi :

a) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ n'existe pas

b) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$

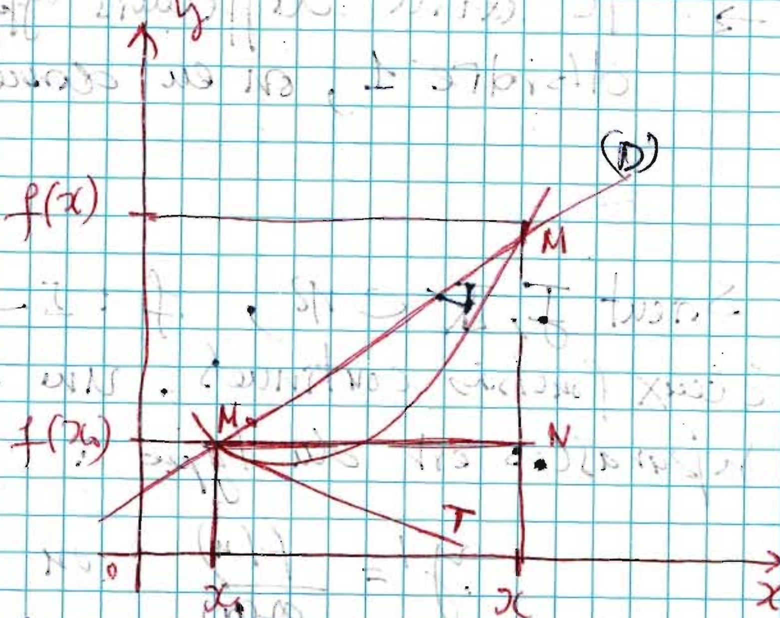
théorème : si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en un point x_0 de I, alors f est continue en ce point.

Interprétation géométrique :

La dérivée de f en x_0 est la pente de la tangente à la courbe représentative Γ_f de f au point M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0))$.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\overline{NM}}{\overline{M_0N}}$$

pente de la droite (D).



cas 1) $x \to x_0 \Rightarrow$ la droite (D) tend vers la tangente de graphe Γ_f au pt M_0. (M_0T)

cas 2) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$, alors Γ_f admet une tangente verticale au point $M_0(x_0, f(x_0))$.

→ L'équation de la droite (M_0T) : $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

Dérivée à droite, Dérivée à gauche :

La fonction f admet en $x_0 \in [x_0, x+a[\subset I$ (resp. $]x_0-a, x_0] \subset I$) une dérivée à droite (resp. à gauche) égale à b_1 (resp. b_2) si :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = b_1 \quad \left(\text{resp. } \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = b_2\right)$$

on note $b_1 = f'_d(x_0)$, $b_2 = f'_g(x_0)$.

Exemple : $f(x) = x\sqrt{x}$, $f(x) = |x|$

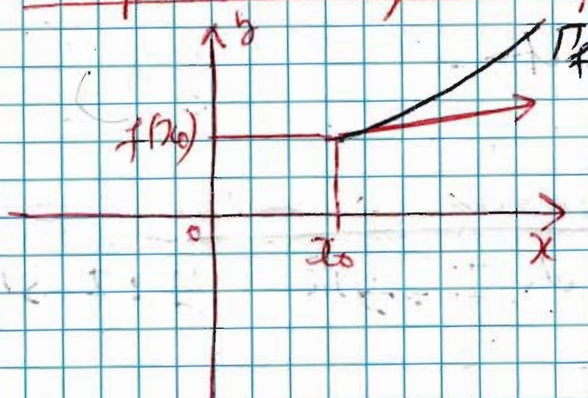
Théorème : f est dérivable au point $x_0 \in I$ ssi

$$\lim_{x \xrightarrow{<} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \xrightarrow{>} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_0$$

(Dérivée à gauche) (Dérivée à droite)

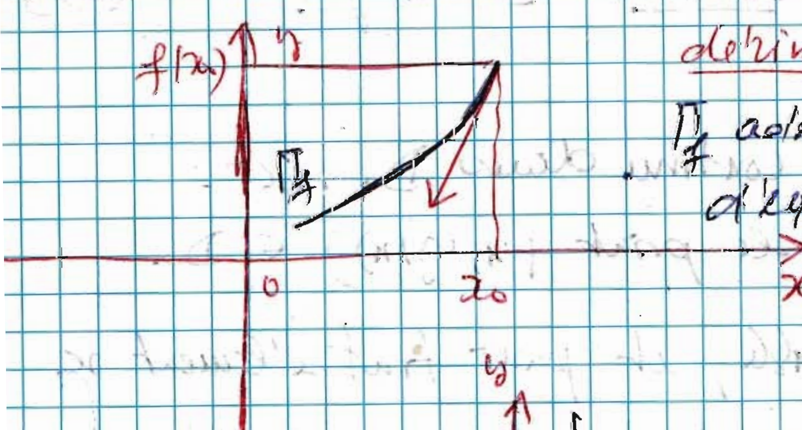
$$f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = l_0.$$

Interprétation géométrique :



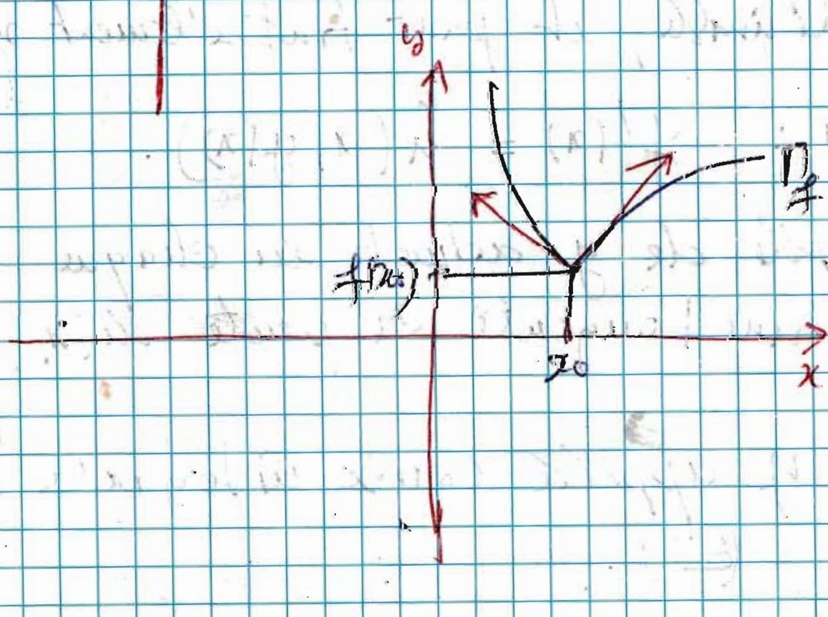
dérivée à droite

Γ_f admet une demi-tangente d'équation $\begin{cases} y = f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x \geq x_0. \end{cases}$



dérivée à gauche

Γ_f admet une demi-tangente d'équation $\begin{cases} y = f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x \leq x_0. \end{cases}$



point d'angle.

Calcul des dérivées :

Etant donné un intervalle I et deux fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en point x_0 de I alors :

1) $f+g$ est dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

2) af est dérivable en x_0 et $(af)'(x_0) = a\, f'(x_0)$

3) $f.g$ est dérivable en x_0 et $(f.g)'(x_0) = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0)$

4) si de plus $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0

et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0).g(x_0) - f(x_0).g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

Dérivée d'une fonction composée :

Soient $f : I \longrightarrow I'$ et $g : I' \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un pt de I si f est dérivable en x_0 et si g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)] . f'(x_0).$$

Dérivée d'une fonction réciproque :

Soient une fonction bijective $f : I \longrightarrow J$, x_0 un élément de I et $y_0 = f(x_0)$ l'élément de J. On suppose que f est dérivable en x_0, et que $f'(x_0)$ est non nul et que f^{-1} est continue en $y_0 = f(x_0)$. Alors :

f^{-1} est dérivable en y_0 et :

$\cancel{[f^{-1}(y_0)]'} =$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y_0)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(y_0)]}$$

Théorème fondamentaux

1) Théorème de Rolle :

Soient a et b deux reéls telsque $a < b$. Si f une fonction continue dans l'intervalle fermée $[a,b]$, dérivable dans l'intervalle ouvert $]a,b[$ et si $f(a) = f(b)$ alors il existe au moins un élément $c \in]a,b[$ telque $f'(c) = 0$.

2) Sens de variations des fonctions numérique

Soit f une fonction continue sur $I = [a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ où, $a = \inf(I)$, $b = \sup(I)$. Alors

1) f est croissante dans I ssi $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a,b[$
2) f " strictement croissante dans I ssi $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]a,b[$
3) f " " décroissante " I ssi $f'(x) < 0 \quad \forall x \in]a,b[$
4) f " décroissante dans I ssi $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]a,b[$
5) f est constante dans I <u>ssi</u> $f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a,b[$

3) Théorème des accroissements finis :

a) théorème : ~~Soit~~ a et b deux reéls $a < b$, si f est fonction continue dans $[a,b]$, dérivable dans $]a,b[$. Alors Il existe un élément $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$.

b) autre forme du théorème d'accroissements finis :

Soit $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$ et f une fonction définie et continue dans I, dérivable dans I sauf peut-être en "a". Alors pour tout h verifiant : $a + h \in I$ il existe $\theta \in]0,1[$ / $f(a+h) - f(a) = h f'(a + \theta h)$

c) Théorème des accroissements finis généralisé :

Soient a et b des réels ($a<b$), et f et g des fcts numériques (définies et continues) dans $[a,b]$, dérivables dans $]a,b[$.

Si $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$, alors il existe un élément $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Dérivées d'ordre supérieur

Fonction dérivée d'ordre n :

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable dans I. Si la fonction dérivée $f' : I \to \mathbb{R}$ est dérivable dans I.

On note $f'' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction dérivée de f' :

$$f'' = (f')'$$

En général, si n un entier naturel dans $\mathbb{R}$ alors

$f^{(n)} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction vérifiant :

1) $f^{(0)} = f$

2) $f^{(p+1)} = (f^{p})'$ pour $p = 0, \dots, n-1$

L'application $f^{(n)}$ est appelée fonction dérivable d'ordre n de f.

2) Fonction de classe C^n : On dit que f est de classe C^n, si f admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre n.

On dit également que f est n fois continuement dérivable.