Comparaison de deux fonctions au voisinage d'un point (développement limité)

Définition : ~~(Développement limité)~~

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de $x=0$, sauf peut être en "0". On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe des nombres réels $a_0, a_1, \dots, a_n$, et une fonction ε tels que pour tout élément x non nul d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$\text{et} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^n + \dots + a_n x^n.$$

Remarque : *) La fonction polynomiale $x \longmapsto P_n(x)$ est appelée partie régulière du développement limité.

P_n est unique.

*) On peut écrire $o(x^n)$ au lieu de $x^n \varepsilon(x)$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x + \dots + a_n x^n + o(x^n) \quad \text{et}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0.$$

*) On peut définir le développement limité d'ordre n d'une fonction f au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en faisant un changement de variables pour se ramener à l'origine 0.

a) On pose ~~$X = x_0$~~ $X = x - x_0$ et on obtient

$$f(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + \dots + b_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \varepsilon(x-x_0)$$

$$\text{et } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x-x_0) = 0$$

ou

$$f(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + \dots + b(x-x_0)^n + o(x-x_0)^n$$

$$\text{et } \lim_{x \to x_0} \frac{o[(x-x_0)^n]}{(x-x_0)^n} = 0.$$

b) Si $x_0 = \pm\infty$ on pose $X = \frac{1}{x}$; ou on aura

$$f(x) = b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{et } \lim_{x \to \pm\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

ou

$$f(x) = b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \text{ et}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{o\left(\frac{1}{x^n}\right)}{\left(\frac{1}{x^n}\right)} = 0.$$

Théorème : soit f une fonction admettant un développement limité au voisinage de 0.

1) Si f est paire, la partie régulière P_n est polyn. pair

2) " " " impair, " " " " " , impair

obtention des développement limités à l'aide de la formule de Taylor-Young

théorème 1 : Soit I un intervalle (ouvert) de $\mathbb{R}$ contenant "0" et f une fonction définie dans I à valeur dans $\mathbb{R}$, de classe C^{n-1} dans I et admettant une dérivée d'ordre n en $x=0$. Alors f admet un développement limité (D.L) d'ordre n au voisinage de "0" et

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

ou

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + o(x^n)$$

et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0$.

~~cette formule aussi aussi appelée D.L de Maclaurin~~.

Remarque :

1) le D.L au $V(x_0)$ $x_0 \neq 0$ appelée D.L de Taylor

2) le " " $V(0)$ " " de Maclaurin

Developpement limité d'une fraction rationnelle :

Etant données deux fonctions polynomiale, A et B avec $B(0) \neq 0$; la division d'ordre n suivant les puissances croissante de A par B nous donne

$A = BQ + x^{n+1} \cdot R$ avec $d^{\circ} Q \leq n$.

Il en résulte $\dfrac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + x^{n+1} \dfrac{R(x)}{B(x)}$

$$\varepsilon(x) = x \frac{R(x)}{B(x)} \quad , \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Théorème 2 (Dérivation et intégration des D.L)

Soit f une fonction définie et dérivable dans un intervalle ouvert I contenant 0. Si f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ au voisinage de 0 :

$f'(x) = P_1(x) + x^{n-1} \varepsilon_1(x)$ <u>alors</u> f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, dont la partie régulière P_2 est la primitive de la partie régulière de f'

$$f(x) = P_2(x) + x^n \varepsilon_2(x)$$

$$P_2(x) = \int P_1(x)\, dx \qquad \text{avec } f(0) = P_2(0).$$

Remarque 1 : Le théorème réciproque n'existe pas.
La fonction f possède un développement limité ne signifie pas que f' existe.

Remarque 2 : Si f et f' existent, possèdent des D.L d'ordre n et $(n-1)$ respectifs, alors :

$$f(x) = P_2(x) + x^n \varepsilon_2(x) \Leftrightarrow f'(x) = P_2'(x) + x^{n-1} \varepsilon_1(x)$$

Opérations sur les développements limités :

Si deux fonctions f et g, définies dans voisinage de $x=0$ (sauf peut être 0), admettent chacune un D.L d'ordre n au $V(0)$ de parties régulière respectives A et B. Alors : $f+g$; $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$ (si $B(0)\neq 0$) admettent chacune un développement limité d'ordre n au $V(0)$.

En outre si $f(x) = A(x) + x^n \varepsilon_1(x)$ et $g(x) = B(x) + x^n \varepsilon_2(x)$

a) Somme :

$$(f+g)(x) = A(x) + B(x) + x^n \varepsilon_3(x).$$

b) Produit :

$$(f\cdot g)(x) = C(x) + x^n \varepsilon_4(x)$$

La partie régulièr C du produit de f par g s'obtient en ne conservant dans le produit des parties régulières de A et B que les termes de degré inférieure ou égal à n.

c) Quotient : On montre que :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_5(x)$$

où Q est le ~~division~~ quotient dans la division suivant les puissances croissantes de A par B à l'ordre n

avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_4(x) = \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_5(x) = 0$

Développement limité d'une fonction composée

Théorème :

Si $f(x) = A(x) + o(x^n)$ si $g(x) = B(x) + o(x^n)$
avec $B(0) = 0$.

alors : $(f \circ g)(x) = (A \circ B)(x) + o(x^n)$

où dans $(A \circ B)(x)$ on ne garde que les termes de degré $\leq n$.

Fonctions équivalents.

Soient X une partie de $\mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) un point adhérent à X et deux fonctions f et g définies dans X. On dit que f est équivalent à g au voisinage de a s'il existe une fonction φ et un intervalle ouvert I contenant a tel que :

$$f(x) = g(x)\,\varphi(x) \quad x \in I \cap X \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} \varphi(x) = 1$$

On écrit $f \sim g$ en a.

Propriétés

a) $f \sim g$ et $h \sim k$ en $a \Rightarrow \begin{cases} fh \sim gk \\ \dfrac{f}{h} \sim \dfrac{g}{k} \end{cases}$

b) $\left(f \sim g \text{ en } a \text{ et } \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell\right) \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

c) Si $f \sim g$ et $h \sim k$ en $\not\Rightarrow$ $f + h \sim g + k$.