Etude qualitative du graphe des Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Soient $f : X \longrightarrow Y$ une fonction et le (Γ_f) sa
$x \longmapsto y = f(x)$

courbe (graphe) représentative.

Il est conseillé de décomposer l'étude de f d'après le plan ci-dessous :

1) **Domaine de définition** (et de continuité de f).

2) **Réduction de domaine d'étude** Recherche des symétrie et de périodicités.

3) **Sens de variations** : Etude du signe de (table de variations) $y' = f'(x)$.

4) **tangentes en certains points particuliers de (Γ_f)**.

5) **Etude des points limites**

6) **Etude des branches infinies** :

a) Si quand $x \to x_0$, $f(x) \to \pm\infty$, la courbe (Γ_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = x_0$

b) Si quand $x \to \pm\infty$, $f(x) \to y_0$, (Γ_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y = y_0$.

c) Si quand $x \to \pm\infty$, $f(x) \to \pm\infty$, on calcul la limite "a" du rapport $\frac{f(x)}{x}$ quand $x \to \pm\infty$

c-à-d $\left(\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \ell\right)$.

i) $a = 0$, il y a une branche parabolique de direction asymptotique (Ox).

ii) Si $a = \pm\infty$, il y a une branche parabolique de direction asymptotique (oy)

iii) $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, on a :

* Pour $(f(x) - ax) \longrightarrow \pm\infty$, (Γ_f) admet une branche parabolique de pente a (dans direction de la droite $y = a.x$).

* Pour $(f(x) - ax) \longrightarrow b \in \mathbb{R}$, (Γ_f) admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$

(Dans ce cas on situe la courbe (Γ_f) par rapport à l'asymptote).

7) points d'inflexion (signe $f''(x)$).

8) Tracé du graphe (Γ_f) (approximatif).

Fonctions elementaires et leurs reciproques.

A) fonction logarithmes, exponentielle, Puissances :

1) Fonctions Logarithmes

1) Def :

ce sont toutes les applications derivable $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ verifiant :

a) $f(xy) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$

b) $f'(x) = \frac{k}{x}$ avec $k \neq 0$.

c) $f(1) = 0$

d) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ l'element verifiant $f(a) = 1$.

Logarithme népérien :

Pour $k = 1$, on pose $f(x) = Ln(x)$ et $a = e$

$Ln(x)$ est appelé logarithme népérien de x

On a :
$Ln(x) < 0$ pour $0 < x < 1$

$Ln(x) > 0$ pour $x > 1$

$Ln(1) = 0$.

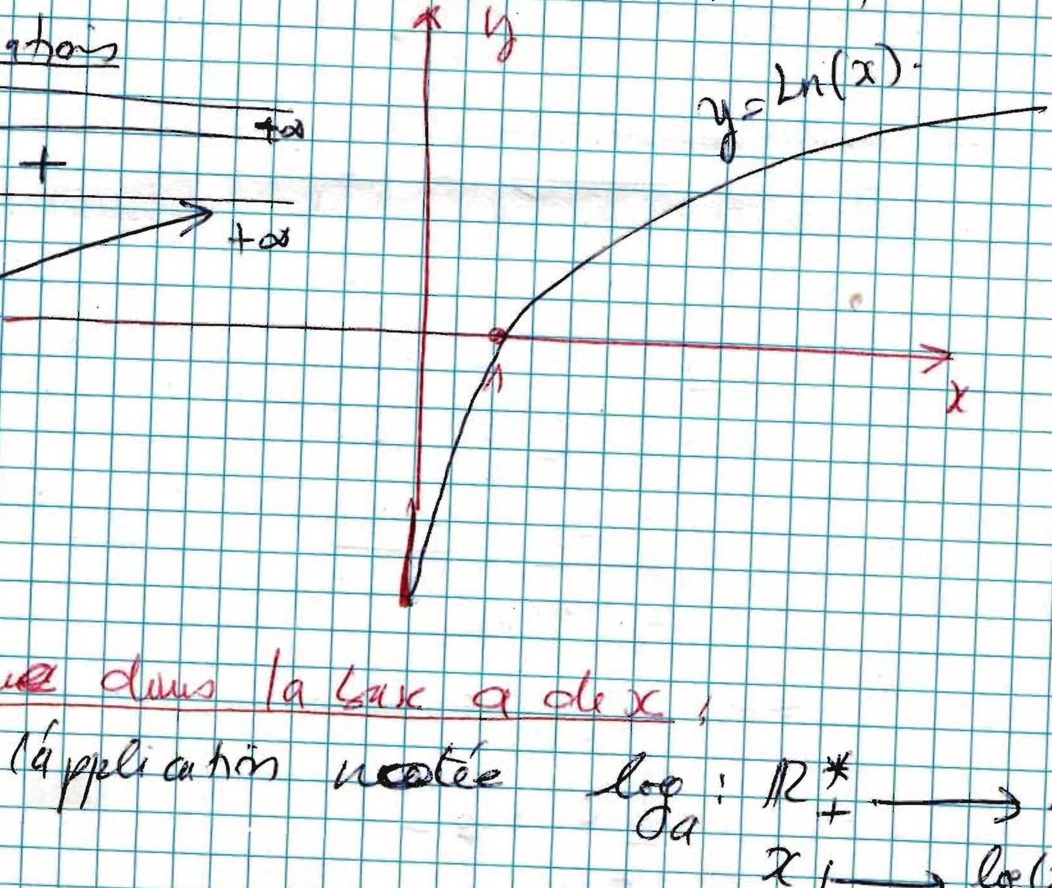
$Ln(a.b) = Ln(a) + Ln(b)$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}_*^+$

$Ln\left(\frac{a}{b}\right) = Ln(a) - Ln(b)$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}_*^+$

$Ln(a^q) = q\, Ln(a)$, $\forall q \in \mathbb{Q}$, $\forall a \in \mathbb{R}_*^+$

tableau de variations

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



Logarithme dans la base a de x :

c'est l'application notée $\log_a : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \log_a(x) = \frac{Ln(x)}{Ln(a)}$

avec $a \in \mathbb{R}_*^+ - \{1\}$.

Propriété : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y).$$

si $a = 10$ on retrouve logarithme décimal.

Fonctions exponentielles :

Déf : Etant donné un nombre réel a strictement positif $(a>0)$. On appelle fonction exponentielle de base a, l'application :

$$g_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$
$$x \longmapsto g_a(x) = a^x.$$

qui vérifie : *) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\forall a>0$

**) $a^1 = a$

Remarque :

a) pour $a \neq 1$: $g_a = (\log_a)^{-1}$: fonction réciproque de $\log_a$.

b) pour $a = e$ l'application : $g_e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est
$x \longmapsto e^x$

appelée exponentielle naturelle. (C'est l'application inverse de l'application ~~$\log$~~ $\ln$).

Propriété : $g_e(x) = e^x \Leftrightarrow g_e'(x) = e^x$.

$$\begin{cases} g_a(x) = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x(\ln a)} \\ g_a'(x) = (\ln a) \cdot e^{x(\ln a)} = (\ln a) \cdot a^x \end{cases}$$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^{-n} e^x = +\infty$.

* ~~lim~~ $\lim\limits_{x \to 0} x^n \operatorname{Log}(x) = 0$.

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

Fonctions Hyperboliques.

On définit pour tout $x \in \mathbb{R}$ les fonctions :

Sinus hyperbolique $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

cosinus hyperbolique $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

tangente hyperbolique : $th(x) = \dfrac{sh(x)}{ch(x)} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on définit :

cotangente hyperbolique $coth(x) = \dfrac{1}{th(x)}$.

Remarque : ① $ch(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

② $sh(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Relations :

1) $ch(x) + sh(x) = e^{x}$
2) $ch(x) - sh(x) = e^{-x}$
3) $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$
4) $ch(x+y) = ch(x).ch(y) + sh(x)\,sh(y)$
5) $ch(2x) = ch^2(x) + sh^2(x) = 1 + 2\,sh^2(x) = ch^2(x) - 1$
6) $sh(x+y) = sh(x)\,ch(y) + sh(y)\,ch(x)$
7) $sh(2x) = 2\,sh(x)\,ch(x)$.

* Tableaux de variations et graphe :

1) Sinus hyperbolique

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = sh(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$.

a) $D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

b) $f(-x) = sh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -sh(x) = -f(x)$

la fonction "sh" est une fonction impaire

réduction d'intervalle d'étude $[0, +\infty[$.

c) points de limite.

. $f(0) = sh(0) = \dfrac{e^{0} - e^{0}}{2} = \dfrac{1-1}{2} = 0$.

. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} sh(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \dfrac{+\infty - 0}{2}$
$= +\infty$.

d) table de variation:

$f'(x) = sh'(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} > 0$ f est croissante $\forall x \in [0, +\infty[$

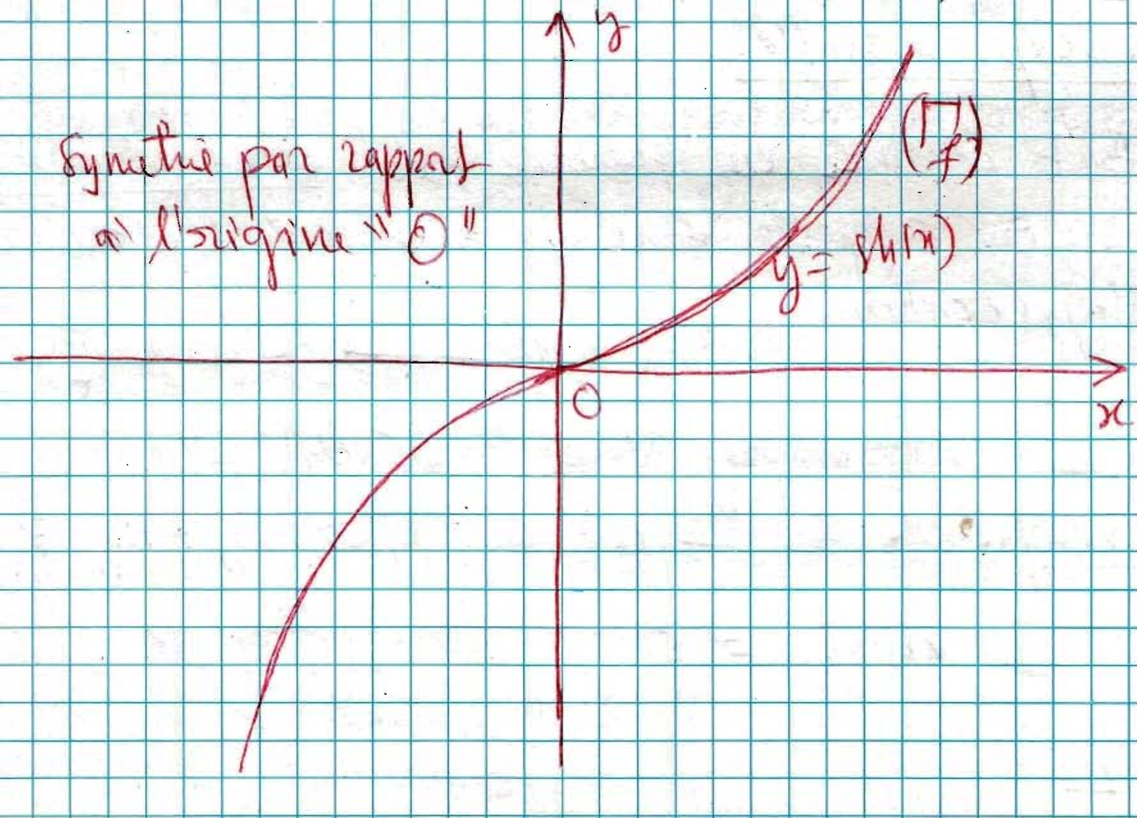
x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{sh(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{e^{x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x}\right)$

$= \frac{1}{2}(+\infty - 0) = +\infty.$

le graphe (Γ_f) admet une branche parabolique de direction (Oy) au $V(+\infty)$.

- $f''(x) = ch'(x) = sh(x) \geq$ ... $\forall x \in [0, +\infty[$ f est donc convexe sur $[0, +\infty[$



2) Cosinus hyperbolique :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto ch(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}.$$

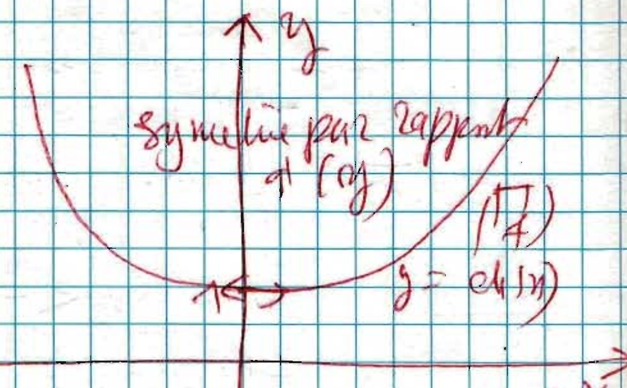
a) Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}$.

b) $f(-x) = \frac{e^{-x}+e^{+x}}{2} = f(x)$ (f pair) reduction du domaine ~~d'étude~~ d'étude $[0, +\infty[$.

c) points de limite : $f(0) = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

tableau de variations : $f'(x) = sh(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	1 $\nearrow$	$+\infty$



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +} \frac{1}{2}\left(\frac{e^x}{x} + \frac{e^{-x}}{x}\right) = +\infty$$

le graphe (Γ_f) admet une branche parabolique dans le sens de (oy) au $V(+\infty)$.

c) tangente hyperbolique :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}.$$

a) Domaine de définition : $\forall x \in \mathbb{R} \quad ch(x) \neq 0$.

Donc $D_f = \mathbb{R}$.

c) $f(-x) = th(-x) = \dfrac{sh(-x)}{ch(-x)} = \dfrac{-sh(x)}{ch(x)} = -\dfrac{sh(x)}{ch(x)} = -th(x) = -f(x)$.

f est ~~pa~~ impaire $\to$ réduction de domaine de définition $[0, +\infty[$

d) points de limite :

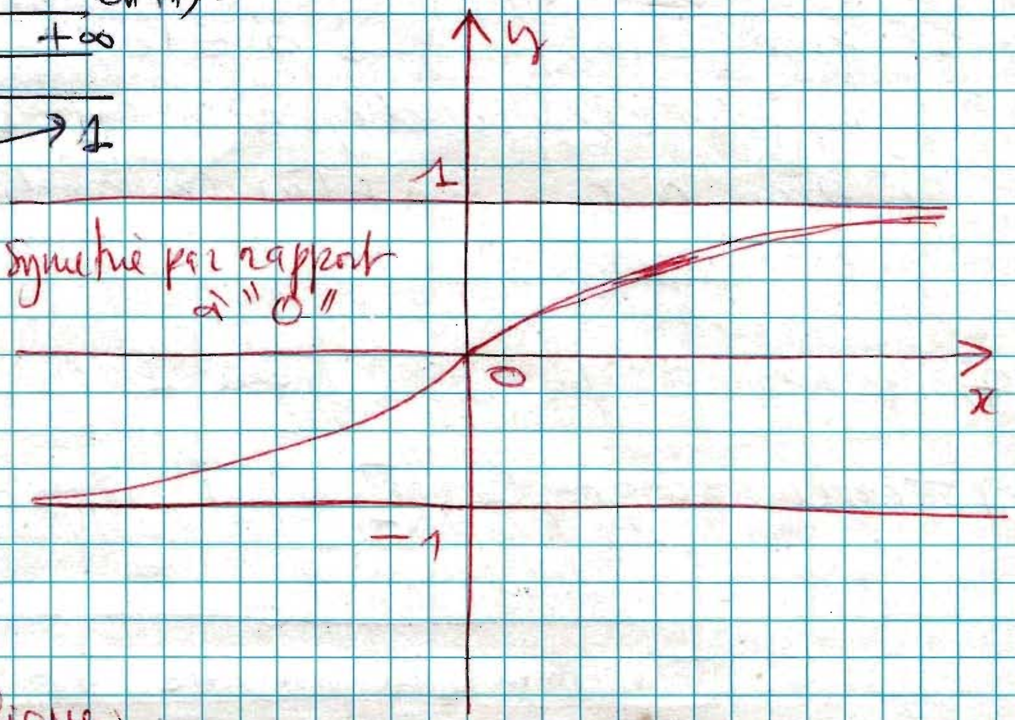
- $f(0) = \dfrac{sh(0)}{ch(0)} = \dfrac{0}{1} = 0$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} th(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1$

cela implique que (Γ_f) admet une asymptote horizontale $y=1$. au $V(+\infty)$.

e) tableau de variations

$$f'(x) = th'(x) = \frac{1}{ch^2(x)} > 0 \quad . \text{(f croissante)}$$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1



Cotangente hyperbolique:

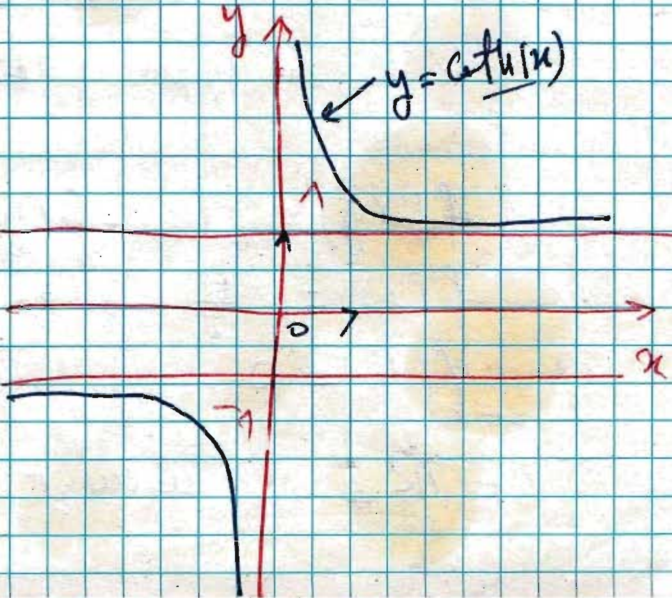
$$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto coth(x) = \frac{ch(x)}{sh(x)} \quad . \text{"f est impaire"}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{sh^2(x)} = 1 - coth^2(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

f décroissante sur $\mathbb{R}^*$

tableau de variations:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	1



Fonctions hyperboliques réciproques :

a) Argument sinus hyperbolique : " Arg sh "

Déf : La fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = sh(x)$ est continue et strictement croissante, donc bijective. Elle admet une fonction réciproque f^{-1} appelée argument sinus hyperbolique : continue et strictement croissante dans $\mathbb{R}$.

$$f^{-1} = \arg sh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f^{-1}(x) = Arg sh(x).$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : y = Arg sh(x) \Longleftrightarrow \forall y \in \mathbb{R},\ x = sh(y)$$

Remarque : $sh \circ \arg sh(x) = \arg sh \circ sh(x) = x$

c'-à-dire : $sh(\arg sh(x)) = \arg ch(ch(x)) = x$

b) argument cosinus hyperbolique : " Arg ch "

Déf : soit f de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$ définie par $f(x) = ch(x)$ est continue, strictement croissante, donc bijective. sa fonction réciproque f^{-1} est appelée argument cosinus hyperbolique ; elle est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

$$f^{-1} = \arg ch : [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$$
$$x \longmapsto Arg ch(x)$$

- $x \geq 1,\ y = Arg ch(x) \Leftrightarrow y \geq 0,\ x = ch\, y$

c) argument tangente hyperbolique :

Déf : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow]-1, 1[$ telle que $f(x) = th(x)$ est continue et strictement croissante. sa fonction réciproque notée $f^{-1}(x) = \operatorname{Argth}(x)$ est appelée argument tangente hyperbolique : continue et strictement croissante sur $]-1, +1[$ dans $\mathbb{R}$.

$$\cancel{f^{-1} = \operatorname{argth} : [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[}$$

$$\begin{aligned} f^{-1} :]-1, 1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f^{-1}(x) = \operatorname{argth}(x). \end{aligned}$$

$f^{-1} = \operatorname{argth}$

$$-1 \leq x \leq 1, \ y = \operatorname{argth}(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{th} y, \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

d) argument cotangente hyperbolique :

Déf : Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$$x \longmapsto \coth(x)$$

est continue, strictement décroissante. Elle admet une fonction réciproque :

$$\begin{aligned} f^{-1} = \operatorname{argcoth} :]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R}^* \\ x &\longmapsto f^{-1}(x) = \operatorname{argcoth}(x) \end{aligned}$$

strictement décroissante, continue. Elle est appelée argument cotangente hyperbolique.

$$\forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[, \ y = \operatorname{argcoth}(x) \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^*, \ x = \coth(y)$$

Remarque :

1) $(\operatorname{arg sh})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \ x \in \mathbb{R}.$

2) $(\operatorname{arg ch})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \ x > 1$

c) $(\operatorname{Argth})'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ pour $-1 < x < 1$,

d) $(\operatorname{argcoth})'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ pour $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

Relation :

a) $\operatorname{Arg\,sh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) $\operatorname{Arg\,ch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$, $x \geq 1$

c) $\operatorname{argth}(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$; $-1 < x < 1$

d) $\operatorname{argcoth}(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$; $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Fonctions primitives, Intégrales.

Définition :

Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$, on appelle fonction primitive de f sur I toute fonction admet f comme dérivée.

$$\left\{ \begin{array}{c} g \text{ fonction primitive} \\ \text{de } f \text{ sur } I \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{fonction } g \text{ dérivable sur } I \\ \text{et } \forall x \in I \quad g'(x) = f(x) \end{array} \right\}$$

théorème : (existence de la fct primitive).

toute fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$, admet au moins une fonction primitive sur I.

Remarque : Soit g la fonction primitive de f sur I alors : la fonction $(x \longmapsto g(x) + c,\ c \in \mathbb{R})$ définie sur I est une fonction primitive de f.

$$\boxed{[g(x) + c]' = g'(x) = f(x)}$$