c) $(\operatorname{Argth})'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ pour $-1 < x < 1$

d) $(\operatorname{argcoth})'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ pour $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

<u>Relation</u>:

a) $\operatorname{Arg sh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) $\operatorname{Arg ch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$, $x \geq 1$

c) $\operatorname{argth}(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$; $-1 < x < 1$

d) $\operatorname{argcoth}(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$; $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Fonctions primitives, Intégrales.

<u>Définition</u>:

Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$, on appelle fonction primitive de f sur I toute fonction admet f comme dérivée.

$$\left\{ \begin{array}{c} g \text{ fonction primitive} \\ \text{de } f \text{ sur } I \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{fonction } g \text{ dérivable sur } I \\ \text{et } \forall x \in I \quad g'(x) = f(x) \end{array} \right\}$$

<u>théorème</u>: (Existence de la fct primitive).

toute fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$, admet au moins une fonction primitive sur I.

<u>Remarque</u>: Soit g la fonction primitive de f sur I <u>alors</u>: la fonction $(x \mapsto g(x) + C,\ C \in \mathbb{R})$ définie sur I est une fonction primitive de f.

$$\boxed{[g(x) + C]' = g'(x) = f(x)}$$

théorème : Soit g la fonction primitive de f sur I alors l'ensemble des fonctions primitives de f sur I est : $\{x \longmapsto g(x) + c,\ c \in \mathbb{R}\}$.

on écrit :

$$\int f(x)\,dx = g(x) + c \Leftrightarrow [g(x)+c]' = g'(x) = f(x).$$

théorème : pour toute fonction continue f sur I admet une unique primitive qui vérifie :

$$x_0 \in I : f(x_0) = k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la fonction primitive :

Propriété : Soit f et g deux fonctions continues sur I.

1) $\int (f+g)(x)\,dx = \int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

2) $\int (\lambda f)(x)\,dx = \int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx,\quad \lambda \in \mathbb{R}$

3) $\int g'(x)\, f'[g(x)]\,dx = f[g(x)] + c = f \circ g(x) + c$

Calcul d'intégrale :

Déf : Soient $a, b \in I \subset \mathbb{R}$. f une fonction continue sur I et g sa fonction primitive sur I. On appelle intégrale de f de a vers b le nombre réel :

$g(b) - g(a)$ et on écrit :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)}$$

Propriété : Soit f une fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$ et $\forall a, b, c \in I$, Alors on a :

1) $$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$ (Formule de Chasles).

avec $a < b < c$

2) $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

2) $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

3) $$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

4) Soit f_1, f_2 deux fonctions continues sur $I \subset \mathbb{R}$ et $a, b \in I$, alors :

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

5) Soit f une fonction continue sur I et $a, b \in I$ avec $a \leq b$.

Si $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

Intégrale indéfinie (primitive) : $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

on écrit simplement $\int f(x)\,dx$.

Quelques procédures de calcul

1) intégrale par par partie :

$\forall x \in I$:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f \Rightarrow f' g = (f \cdot g)' - g' \cdot f.$$

$$\int_a^b f'(x) g(x)\,dx = g(x) \cdot f(x) \Big|_a^b - \int_a^b g'(x) \cdot f(x)\,dx$$

2) Intégration par changement de variable

soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, a et $b \in I$

$u : I \longrightarrow J$ une fonction de classe C^1 et

$f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors.

$$\int_a^b f(u(x))\, u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,dt.$$

3) fonction composée :

$$\int g'(x) f'[g(x)]\,dx = f[g(x)] + C = f \circ g(x) + C$$

Cas particulier :

$$\int g'(x) [g(x)]^q\,dx = \begin{cases} \dfrac{[g(x)]^{q+1}}{q+1} + C, & q \in \mathbb{Q} - \{-1\} \\ \ln|g(x)| + C, & q = -1 \end{cases}$$

Procédés particuliers d'intégration

a) primitives de fractions rationnelles :

On effectue la décomposition en éléments simples la fraction rationnelle. On se ramène à un calcul du type :
$$\int \frac{Ax+B}{(x^2-sx+p)^n}\,dx$$ où $s^2-4p<0$, A et B sont des réels, $n \in \mathbb{N}^*$.

On montre que :

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} \cdot \text{ (intégration par partie)}.$$

$$2(n-1)\,I_n = \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + (2n-3)\,I_{n-1}.$$

b) primitives se ramenant à des primitives de fractions rationnelles.

Soit f une fraction rationnelle d'une variable x.

1) $\int f(e^x)\,dx$. On pose $t=e^x$.

2) $\int f(\cos x, \sin x)\,dx$. On pose $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$.

On obtient $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

3) $\int f(tg\,x)\,dx$ on pose $t = tg\,x$.

4) $\int f(x, \sqrt{x^2+1})\,dx$. On pose $t = \text{argsh}(x)$.

pour se ramener au calcul de $\int f(sh\,t, ch\,t)\,dt$ qui

6) $\int \cotg(x)\,dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx = \ln|\sin(x)| + C$.

7) $[\ln(x)]' = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

8) $[e^x]' = e^x \Leftrightarrow \int e^x\,dx = e^x + C$

9) $ch'(x) = sh(x) \Leftrightarrow \int sh(x)\,dx = ch(x) + C$

10) $sh'(x) = ch(x) \Leftrightarrow \int ch(x)\,dx = sh(x) + C$

11) $\int th(x)\,dx = \int \frac{sh(x)}{ch(x)}\,dx = \ln|ch(x)| + C$

12) $\int coth(x)\,dx = \int \frac{ch(x)}{sh(x)}\,dx = \ln|sh(x)| + C$.

13) $[Arcos(x)]' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad x \in]-1,1[$

$\Updownarrow$

$$\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = + Arcos(x) + C, \quad x \in]-1,1[.$$

14) $[Arsin(x)]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in]-1,1[$

$\Updownarrow$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = Arsin(x) + C \; ; \; x \in]-1,1[.$$

15) $\left[\operatorname{Arctg}(x)\right]' = \dfrac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow \displaystyle\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arctg}(x) + C, \ \forall x \in \mathbb{R}$

16) $\left[\operatorname{Arccotg}(x)\right]' = \dfrac{-1}{1+x^2} \Leftrightarrow \displaystyle\int \dfrac{-dx}{1+x^2} = \operatorname{Arccotg}(x) + C, \ \forall x \in \mathbb{R}.$

17) $\left[\operatorname{Argch}(x)\right]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \ ; \ x > 1$

$$\Updownarrow$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Argch}(x) + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C \quad (x > 1)$$

18) $\left[\operatorname{Arg.sh}(x)\right]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \ ; \ x \in \mathbb{R}.$

$$\Updownarrow$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Arg sh}(x) + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C, \ x \in \mathbb{R}.$$

19) $\left[\operatorname{Arg th}(x)\right]' = \dfrac{1}{1-x^2} \ ; \ x \in \left]-1, 1\right[.$

$$\Updownarrow$$

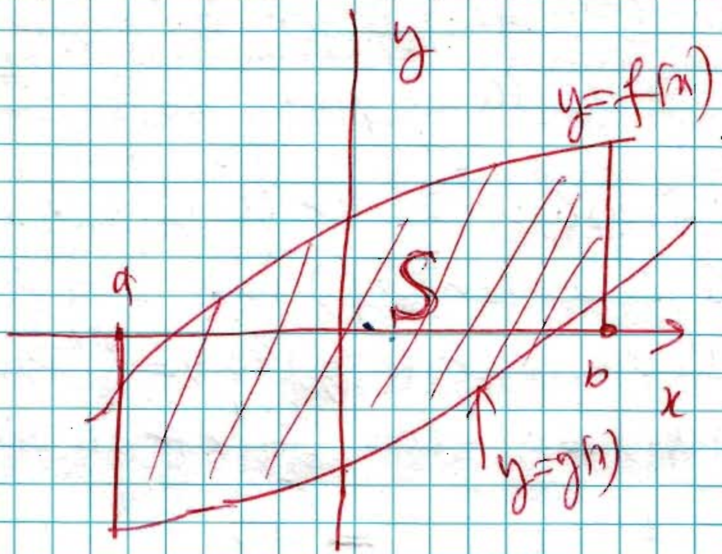
$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Arg th}(x) + C = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + C, \ x \in \left]-1,1\right[$$

20) $\left[\operatorname{Arg coth}(x)\right]' = \dfrac{1}{1-x^2} \ ; \ x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$

$$\Updownarrow$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Arg coth}(x) + C = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + C \ ; \ x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$$

Application : Calcul de surface



$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \geq 0 \,.$$ (par unité de surface

$\|\vec{\imath}\| \cdot \|\vec{\jmath}\|$.