Equations differentielles.

1) Equations differentielles d'ordre 1 :

une équation differentielle d'ordre 1 résolue par rapport à y' (de variable x) (c-à-d $y' = \frac{dy}{dx}$) est donnée de l'equation $y' = h(x, y)$ où h est une fonction définie

$$h : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

<u>Exple</u> : $y' = 2x + y$ ... etc.

2) Solution de l'équation differentielle $y' = h(x, y)$ — (E)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ et ~~y une fonction de I → IR~~ $y : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

$y = y(x)$ est appelée <u>Solution ou intégrale</u> de (E),

<u>Si</u> :

1) le graphe de y est continu dans $D \subset \mathbb{R}^2$.
c-à-d : $\forall x \in I$ le point $(x, y(x)) \in D$.

2) $y = y(x)$ est dérivable, et pour tout élement x ~~de~~ de I, on a : $y'(x) = h(x, y(x))$.

c'à-d : le graphe de y admet en chaque point $(x, y(x))$ une tangente de pente $h(x, y(x))$

→ le graphe de y appelée courbe intégrale de (E).

→ Il existe différents types d'équations différentielles d'ordre 1, on en donnera 4.

1) Equation différentielle à variables séparables (ou séparées)

Soient $I, K \subset \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. une équation diff à variables séparables est du type :

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \quad \text{ou} \quad y' g(y) = f(x) \quad (E)$$

Méthode Solution : $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} g(y) = f(x) \Rightarrow dy\, g(y) = f(x)\, dx.$$

$$\Rightarrow g(y)\, dy = f(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int g(y)\, dy = \int f(x)\, dx + C}$$

2) Equation différentielle homogène en x et y :

C'est une équation du type $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ où f est continue dans $J \subset \mathbb{R}$.

Méthode de résolution : Pour résoudre l'équation (E) :

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ on introduit la fonction auxiliaire

$x \longmapsto t = \frac{y}{x}$, on a $y = tx$ et $y' = t'x + t$

On reporte y et y' dans (E) et on obtient l'équation à variables séparées $t' = \frac{f(t) - t}{x}$ ... (E')

$$\frac{t'}{f(t)-t} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dt/du}{f(t)-t} = \frac{1}{x}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{dt}{f(t)-t} = \int \frac{du}{x} + C}.$$

3) Equation différentielle linéaire d'ordre 1

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, $a : J \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On considère les équations :

$y' + a(x)\, y = f(x)$: (E) équation différentielle avec second membre

$y' + a(x)\, y = 0$: (E_0) Equation sans second membre associée à (E) ou (linéaire homogène).

a) Résolution de l'équation sans second membre :

- On remarque que $y = 0$ est solution de (E).
- Si $y \neq 0$ alors. $(E) \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -a(x) \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int a(x)dx$

$$\Rightarrow \ln|y| = -A(x) + L, \; L \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y = C e^{-A(x)}, \; C \in \mathbb{R}^*$$

pour ne pas oublier la solution $y = 0$, la solution :

$$\boxed{y_H(x) = y(x)\, C e^{-A(x)}, \; C \in \mathbb{R}}$$

b) Résolution de l'équation avec second membre

Méthode de la variation de la constante

* On cherche une solution particulière de la forme :

$$y_p(x) = y(x) = C\, e^{-A(x)}$$ solution de l'équation (E).

finalement : la solution de (E) est

$$\boxed{y_G(x) = y_H(x) + y_p(x)}$$

4) Equation différentielle de Bernoulli

Soient $a : J \longrightarrow \mathbb{R}$, $b : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $k \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$. L'équation diff du type :

$$y' + a(x)\, y = b(x)\, y^k \quad (E)$$

est dite de Bernoulli.

→ ~~Ensu~~ En multipliant l'équation (E) par y^{-k}, on obtient :

$$y^{-k} \cdot y' + a(x)\, y^{1-k} = b(x)$$, on pose

$z = y^{1-k}$, pour trouver finalement l'équation linéaire de fonction inconnue z.

$$\boxed{\frac{z'}{1-k} + a(x)\, z = b(x)}$$

Exemples:

- $y'(x^2-1)-2yx=0$ → variables séparées
- $(2x+y)\,dx-(4x-y)\,dy=0$ équation homogène en x et y $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$
- $y'+2xy=2xe^{-x^2}$. linéaire d'ordre 1.
- $xy'+y=y^2\ln(x)$ → $y'+a(x)y=y^k b(x)$ bernoulli $z=y^{1-k}$

II) Equation différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Soient a et b deux nombre réel et $f: J \to \mathbb{R}$ une fonction définie et continue dans un intervalle J de $\mathbb{R}$.

L'équation : $y''+ay'+by=f(x)$: (E) est dite équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, avec second membre.

$y''+ay+by=0$ ... $(E_0)=(H)$ équation différentielle sans second membre ou homogène associé à (E).

$r^2+ar+b=0$ ... (C) équation caractéristique de (E)

Résolution de l'équation sans second membre

1) 1er cas : (C) admet deux racines réelles distincts r_1 et r_2, les solutions de $(E_0)=(H)$ sont définies dans $\mathbb{R}$ par :

$$y_H=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x},$$ où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles arbitraires.

2) Cas où : (C) admet une racine double réelle r, les solutions de (E_0) sont définies par :

$$y_H = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_2 x}$$ où C_1 et C_2 sont deux constantes arbitraires.

3) Cas où : (C) admet deux racines complexes conjuguées deux à deux. $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$. où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Les solutions de (E_0) sont définies dans $\mathbb{R}$ par :

$$y_H = e^{\alpha x}\left[C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right].$$ où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles arbitraires.

Résolution de l'équation avec second membre (E) :

Thm : Soit $y_p : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution particulière de (E)
pour qu'une fonction $y_G : I \longrightarrow \mathbb{R}$ soit solution de (E), il nécessaire et suffisant qu'il existe une fonction $y_H : I \longrightarrow \mathbb{R}$ solution de $(E_0) = (H)$ telle que :

$$\boxed{y_G = y_H + y_p}$$

Cas particuliers :

Si le second membre est de la forme $f(x) = P(x)e^{mx}$ où P est un polynome et où m est un scalaire, alors l'équation (E) possède une unique solution particulière de la forme :

* $y_p(x) = Q(x)e^{mx}$, avec $\deg Q = \deg P$, si m n'est pas racine de l'équation caractéristique (C).

* $y_p(x) = xQ(x)e^{mx}$, avec $\deg Q = \deg P$, si m est solution simple de (C)

* $y_p(x) = x^2 Q(x)e^{mx}$, avec $\deg Q = \deg P$, si m est solution double de (C).

Principe de superposition de solution.

On obtient une solution particulière de l'équation
$y'' + ay' + by = f_1(x) + f_2(x)$ en additionnant une solution particulière de $y'' + ay' + by = f_1(x)$ et une solution particulière de $y'' + ay' + by = f_2(x)$.

Méthode de la variation des constante. (en premier lieu)

On cherche les solutions de (E) de la forme $y_p = C_1 y_1 + C_2 y_2$
on calcul les constante C_1 et C_2 en résolvant le système :

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \end{cases}$$