Séries Numériques

I. Définitions et Propriétés

1. Introduction et définition :

Définition 1 : - Une série est un cas particulier d'une suite.

- Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Considérons la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$; $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$, On appelle série numérique de terme générale U_n noté $\sum U_n$, le couple (U_n, S_n). S_n s'appelle la somme de la série

$$\sum_{n\geq 0} U_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots \text{ ou } \sum_{n=0}^{+\infty} U_n.$$

Définition 2 : On dit que la série $(\sum U_n)$ est convergente, si la suite (S_n) est convergente. On note $\sum_{n=0} U_n$ sa limite

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}(U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n)$$

On dit que : c'est la somme de la série.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = l \text{ (finie)} \to (\sum U_n) \text{ CV.}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \lim S_n = \nexists \text{ ou } \infty \to (\sum U_n) \text{ Div.}$$

Exemple : $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $a\neq 0$ et de raison q. $U_{n+1} = q\cdot U_n$; $U_0 = a \neq 0$

$$U_n = U_{n-1}\cdot q = U_{n-2}\, q^2 = \dots = U_1\cdot q^{n-1} = U_0\, q^n = aq^n$$

$\boxed{U_n = aq^n}$. Etudier la série $\sum U_n = \sum_{n\geq 0} aq^n$.

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n = aq^0 + aq + aq^2 + \dots + aq^n.$$
$$= a + aq + aq^2 + \dots + aq^n.$$

$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \cdot a$

ⓐ $|q|<1$ $(-1<q<1)$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{a}{1-q}$.

(car $q^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$).

donc $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q} \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} u_n$ C.V. et $\sum\limits_{n\geq 0} u_n = \frac{a}{1-q}$

ⓑ $q>1$ alors $q^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a>0 \\ -\infty & \text{si } a<0 \end{cases}$

$\sum\limits_{n\geq 0} u_n = +\infty$ $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

ⓒ $q=1$: $S_n = a + a + \dots + a = (n+1)a \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

$\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge

ⓓ $q=-1$: $S_n = a - a + a - a + a + \dots + a_n$

$= \begin{cases} a & \text{si } n \text{ est impaire} \\ 0 & \text{si } n \text{ impaire} \end{cases}$

la suite (S_n) n'est pas convergente $\Rightarrow \left(\sum u_n\right)$ div.

ⓔ $q \leq -1$ $\quad q^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \infty \quad \left(\sum u_n\right)$ div

2/ . Condition nécessaire de convergence :

Définition : . Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries. La somme des deux série $\left(\sum u_n\right)$ et $\left(\sum v_n\right)$ est la série dont le terme général est $u_n + v_n$ c'est-à-dire $\sum (u_n + v_n)$

. La multiplication d'un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ par la série $\sum u_n$ est la série dont le terme général λu_n

c'est à dire la série $\sum \lambda u_n$.

Théorème : 1) Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux série convergentes alors la série $\sum u_n + v_n$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

2) La série $\sum \lambda u_n$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Preuve. ①

$$S_n = \underbrace{(u_0 + u_1 + \dots u_n)}_{U_n} + \underbrace{(v_0 + v_1 + \dots + v_n)}_{V_n} = U_n + V_n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + v_n = \lim_{n \to +\infty} (U_n + V_n) = \lim_{n \to +\infty} U_n + \lim_{n \to +\infty} V_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

$$(\lambda S_n) = \lambda u_0 + \lambda u_1 + \dots + \lambda u_n.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lim_{n \to +\infty} \lambda S_n = \lambda \lim_{n \to +\infty} S_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

→ Condition nécessaire de Convergence :

Théorème 2 : Soit $\left(\sum u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ une série convergente alors $\left(\lim_{n \to +\infty} u_n = 0\right)$

$$\left(\sum u_n\right) CV \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = 0. \qquad (P \Rightarrow Q)$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n \neq 0 \Longrightarrow \left(\sum u_n\right) DIV \qquad (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}).$$

Preuve : $\left(\sum u_n\right) CV \Leftrightarrow (S_n)_{n \in \mathbb{N}}\ CV$; $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$\left.\begin{cases} S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ S_{n-1} = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} \end{cases}\right\} \Rightarrow S_n - S_{n-1} = u_n.$$

$$\lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1}.$$

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ est la même suite CV vers la même limite l.

$$\lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = l - l = 0 = \lim_{n\to+\infty} U_n$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$$

<u>Remarque</u>: ① $(P) \Rightarrow (Q)$ alors $\overline{(P)} \Rightarrow \overline{(Q)}$

(P) : $(\sum U_n)$ C.V

(Q) : $U_n \to 0$

$\lim_{n\to+\infty} U_n \neq 0 \Rightarrow (\sum U_n)$ DiV.

$(\sum U_n)$ DiV c'est $\begin{cases} \sum_{n\geq 0} U_n = +\infty \\ \text{ou} \\ \text{n'est pas limite} \end{cases}$

<u>Contre exemple</u>. trouver une serie $(\sum U_n)$ telleque $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$ et la serie $(\sum U_n)$ div

Exemple : La serie $\sum \frac{1}{n}$; $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et on montre que la serie $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$ div.

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

3) <u>Les series à termes positifs</u> :

Theoreme 3. Soient $(\sum U_n)$ et $(\sum V_n)$ deux series à termes positifs. Supposons que $\forall n$. $U_n \leq V_n$ alors.

Si $(\sum V_n)$ CV $\Rightarrow (\sum U_n)$ CV.

Preuve : Notons $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec

$$R_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n \quad \text{et} \quad S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$$

On a $R_n \leq S_n$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0} V_n = l$ fini

donc $S_n \leq l \Rightarrow R_n \leq l \quad \forall n\in\mathbb{N}$

c'est-à-dire que la suite $\{R_n\}$ est majorée

(ou)

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} V_n = l \Rightarrow \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ Conv} \Rightarrow (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists M : \forall n : S_n \leq M.$$

Donc $R_n \leq M \Rightarrow \{R_n\}$ est majorée.

- Montrons que la suite $\{R_n\}$ est croissante : $R_{n+1} = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n+1}$

$$R_{n+1} = \underbrace{(U_0 + U_1 + \cdots + U_n)}_{R_n} + U_{n+1} = R_n + U_{n+1}.$$

$R_{n+1} - R_n = U_{n+1} \geq 0$ (série à termes positifs).

donc $(R_n)_n$ est une suite croissante.

Théorème 4 : Soient $(\sum U_n)$ et $(\sum V_n)$ deux séries à termes positifs. Supposons que $\forall n\in\mathbb{N} : U_n \geq V_n$. Alors si $(\sum V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Div alors $(\sum U_n)$ Div.

Preuve : Notons $\{R_n\}$ et $\{S_n\}$: $R_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

$S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$.

On a $\{S_n\}$ croissante $S_{n+1} = (V_0 + \cdots + V_n) + V_{n+1} = S_n + V_{n+1}$

$S_{n+1} - S_n = V_{n+1} \geq 0 \Rightarrow S_{n+1} \geq S_n$.

$(\sum V_n)$ Div $\Rightarrow S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $R_n \geq S_n$ donc on aussi

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} U_n = +\infty \Rightarrow (\sum U_n) \text{ Div}.$$

Exemple 1 : Etudier la nature de la serie $\sum U_n$, $U_n = \frac{1}{n^n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

$U_n = \frac{1}{n^n}$ est une serie à termes positifs

$R_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{n^n}$

On a $n \geq 2 \Rightarrow n^n \geq 2^n \Rightarrow \frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Posons que $\sum V_n = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et on a $U_n \leq V_n$, $n \geq 2$

On a $\begin{cases} \frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n} \\ \sum \frac{1}{2^n} \text{ CV} \end{cases} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ CV.

Exemple 2 Etudier la nature de serie $\sum U_n$, $U_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n = 1, 2, \dots$

On $U_n \geq 0$; $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

On a $n \geq 2$: $\sqrt{n} \leq n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$.

$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} \\ \left(\sum \frac{1}{n}\right) \text{ DIV} \end{cases} \Longrightarrow \left(\sum \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ DIV.

Théorème 5 (Règle de d'Alembert) : (Serie) à termes positifs.

Soit $\left(\sum U_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ une serie à termes positifs telle que la limite suivante existe : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l \in \mathbb{R}$ (finie)

On a : 1) $l < 1$ alors $\left(\sum U_n\right)$ CV

2) $l > 1$ alors $\left(\sum U_n\right)$ DIV

3) $l = 1$ On ne peut pas conclure. Il faut faire une etude plus poussé.

Théorème 6 (Règle de Cauchy) :

Soit $(\sum u_n)$ une série à termes positifs telle que la limite suivante existe : $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ (finie).

On a 1) $l < 1$ alors $(\sum u_n)$ converge.

2) $l > 1$ alors $(\sum u_n)$ DiV.

3) $l = 1$ on ne peut pas conclure.

Exemple 1 : Etudier la nature de série $\sum \frac{n}{n+1}$ où $u_n = \frac{n}{n+1}$

$$u_n = \frac{n}{n+1}, \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} \times \frac{n+1}{n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

donc $l = 1$

(on ne peut pas conclure).

Donc pour répondre à cette question il faut procéder autrement.

On a $u_n = \frac{n}{n+1}$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

On $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1 \neq 0 \Rightarrow \left(\sum \frac{n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ DiV.

Exemple 2 : Etudier la nature de la série $\left(\sum \frac{1}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, $u_n = \frac{1}{n!}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{(n+1)!} \times n! = \frac{n!}{n!\,(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \left(\sum \frac{1}{n!}\right) CV.$$

Exemple 3 : Étudier la nature de série $\sum \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; $u_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

$$u_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{2n+1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2} < 1$$

$$\Downarrow$$

$$\sum \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \text{ CV.}$$

L4 :

Définition : Soient $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries à termes positifs. On dit que $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ sont de même nature, s'ils sont convergents les deux à la fois ou divergentes les deux à la fois.

Théorème 3 : $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries à termes positifs

a) s'il existe deux constantes $a > 0$ et $b > 0$ et un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall n \geq n_0$: $a \leq \frac{u_n}{v_n} \leq b$ alors les deux séries $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ sont deux même nature.

b) Si la limite suivante $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \neq 0$ (existe), alors les deux séries $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ sont de même nature.

Preuve : a) $1) \Rightarrow u_n \leq b\, v_n$ si $(\sum v_n)$ CV $\Rightarrow (\sum b\, v_n)$ CV $\Rightarrow (\sum u_n)$ CV.

si $(\sum u_n)$ CV $1) \Rightarrow a\, v_n \leq u_n \Rightarrow (\sum a\, v_n)$ CV $\Rightarrow (\sum v_n)$ CV.

(3) on a $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \neq 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, n \geq n_0 : a \leq \frac{u_n}{v_n} < b$

$a = l - \varepsilon, \; b = l + \varepsilon$

$$l - \varepsilon \leq \frac{u_n}{v_n} \leq l + \varepsilon.$$

prenons $\varepsilon = \frac{l}{2}$; $\exists n_0$; $n \geq n_0$ $l - \frac{l}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq l + \frac{l}{2}$

$$n \geq n_0 \quad \frac{l}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3l}{2}$$

Il suffit de prendre $a = \frac{l}{2}$, $b = \frac{3l}{2}$.

$\Downarrow$

$(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ sont de même nature

Théorème 4 : Soit $(\sum u_n)$ une série à termes positifs.

~~Supposons~~ Considérons la série de Riemann :

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$, $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$; $\alpha \in \mathbb{R}$; alors on a :

1) si $\alpha > 1$; alors la série $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)$ est convergente

2) si $\alpha \leq 1$; alors la série $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)$ est divergente

Théorème 5 : Soit $(\sum u_n)$ une série à termes positifs que

$u_n \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{k}{n^\alpha}$; k est une constante positive alors

on a : a) si $\alpha > 1$, la série $(\sum u_n)$ CV.

b) si $\alpha \leq 1$, la série $(\sum u_n)$ DIV.

Exemple : $\sum \frac{1}{n^2 + n + 1}$; $u_n = \frac{1}{n^2 + n + 1}$.

$$\frac{\frac{1}{n^2 + n + 1}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2 + n + 1} = \frac{n^2}{n^2}\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

On $\lim \frac{U_n}{V_n} = 1$; $V_n = \frac{1}{n^2}$ donc $U_n \sim V_n = \frac{1}{n^2}$

Comme $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)$ CV $\Rightarrow \left(\sum \frac{1}{n^2+n+1}\right)$ CV

4) Comparaison d'une serie à terme positife avec une integrale

Théorème : Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et décroissante.

Considérons la serie : $\left(\sum U_n\right)$ avec $U_n = f(n)$
$n = 0, 1, \ldots$
(ou $n \geq n_0$).

Notons $\varphi(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x) : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.

alors on a :

a) si $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \varphi(\alpha)$ existe (finie), alors la serie $\left(\sum U_n\right)$ CV

b) si $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \varphi(\alpha)$ n'existe pas, alors la serie $\left(\sum U_n\right)$ DIV.

Exemple ① Etudier la nature $\sum U_n$, $U_n = \frac{1}{n}$.

$$f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x}$$
} positive, décroissante continue.

$$\varphi(\alpha) = \int_1^{\alpha} f(x)\,dx = \int_1^{\alpha} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{\alpha} = \ln(\alpha) - \ln(1)$$

$$= \ln(\alpha) - 0 = \ln(\alpha)$$

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \varphi(\alpha) = \lim_{\alpha \to +\infty} \ln(\alpha) = +\infty \Rightarrow \sum U_n = \sum \frac{1}{n} \text{ DIV.}$$

Donc la serie $\left(\sum \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ DIV.

Exemple : Etudier la nature de la serie $\sum \frac{1}{n^\lambda}$; $\lambda \in \mathbb{R}$

Solution : - Si $\lambda = 1$, $u_n = \frac{1}{n}$: $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$ Div.

- Si $\lambda \neq 1$, $f(x) = \frac{1}{x^\lambda} = x^{-\lambda} = e^{-\lambda \ln(x)}$; $x > 0$

$$\varphi(\alpha) = \int_{\beta \neq 0}^{\alpha} e^{-\lambda \ln(x)} : [\beta, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad \beta \neq 0$$

$f'(x) = -\frac{\lambda}{x} e^{-\lambda \ln(x)}$, si $\lambda > 0$, $x > 0$; $f'(x) < 0$

donc f est décroissante sur $[\beta, +\infty[$

$$\varphi(\alpha) = \int_1^\alpha x^{-\lambda} dx = \left[\frac{1}{-\lambda+1} x^{-\lambda+1}\right]_1^\alpha = \frac{1}{-\lambda+1} \alpha^{-\lambda+1} - \frac{1}{-\lambda+1}$$

$$= \frac{1}{-\lambda+1}\left[\alpha^{-\lambda+1} - 1\right].$$

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \varphi(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda > 1 \Rightarrow \left(\sum u_n\right) \text{ CV.} \\ \infty & \text{si } \lambda < 1 \Rightarrow \left(\sum u_n\right) \text{ Div} \end{cases}$$

__nature__ $\sum \frac{1}{n^\lambda}$ $\begin{cases} \text{CV} & \text{si } \lambda > 1 \\ \text{DIV} & \text{si } \lambda < 1 \end{cases}$

L6// Exercices L7

① a) $u_n = \ln \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ $(n \geq 1)$, b) $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$, $n \geq 0$

c) $u_n = \frac{3^n}{7^{n-2}}$, $n \geq 2$.

Question : étudier la nature de la serie $\sum u_n$ pour les trois cas ⓐ et ⓑ et ⓒ.

L8// Exercice n°2 Etudier la nature des series $\sum u_n$ suivantes

a) $u_n = \frac{3^n + n^4}{5^n - 3^n}$; b) $u_n = \frac{ch(2n)}{ch(3n)}$; c) $u_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$.

Note : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$

$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $n \sim n$

$$\begin{cases} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \\ n \sim n \end{cases} \Rightarrow n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim n \frac{1}{n} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} n\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = 1.$$

Donc $\lim_{n \to +\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$; En général

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right) = e^a}.$$

E9 : Etudier la nature des séries dont le terme général U_n est donné ci-dessous.

(Aide : Essayer de montrer que U_n est équivalent à une série Riemann $\frac{1}{n^\alpha}$.

a) $U_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$, b) $U_n = \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} - 1$

c) $U_n = n^{-1-\frac{2}{n}}$; d) $U_n = n^2 a^{\sqrt{n}}$ $(a>0)$.

E10 : En utilisant la règle de Cauchy ou de d'Alembert, trouver la nature des séries de terme général U_n suivantes :

a) $U_n = \frac{n!}{a^n}$ $(a>0)$, b) $U_n = \frac{n!}{2^n}$; c) $U_n = \frac{a^n}{n^a}$ $(a>0)$.

d) $U_n = \left(a+\frac{1}{n}\right)^n$ $(a>0)$, e) $U_n = \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}$, $a>0$

f) $U_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n^2}$ $(x \in \mathbb{R})$; g) $U_n = \left(\frac{\sin^2(n)}{n}\right)^n$.

E11 : Etudier la nature des séries $(\sum U_n)$ suivantes :

a) $U_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; b) $U_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$; c) $U_n = \frac{n^2}{n^3+1}$

d) $U_n = \frac{1}{(\ln(n))^n}$; e) $U_n = \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$; f) $U_n = \frac{1}{\ln(n^2+n+1)}$

g) $u_n = \frac{n^2}{(1+a)^n}$ $\left(-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}\right)$; h) $u_n = \frac{1+2+\dots+n}{1^2+2^2+\dots+n^2}$

i) $u_n = \frac{a^n+1}{a^{2n}+1}$ $(a>0)$; j) $u_n = 2^{-\sqrt{n}}$.

II/ Séries à termes quelconques :

– Séries absolument convergentes :

Définition : Soit $\left(\sum u_n\right)$ une série t.q u_n est de signe quelconque. On dit que la série $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente si la série à termes positifs $\left(\sum |u_n|\right)_n$ est CV

$$\sum u_n \xrightarrow[\text{on construit}]{} \sum |u_n| \begin{cases} \nearrow \text{CV} , & \left(\sum u_n\right) \text{ absolument CV} \\ \searrow \text{DIV} & \left(\sum u_n\right) \text{ absolument div.} \end{cases}$$

Théorème : Soit $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une série à termes quelconques. Si $\left(\sum u_n\right)$ absolument convergente alors $\left(\sum u_n\right)$ est convergente. La réciproque est fausse.

$$\left(\sum |u_n|\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ CV} \Rightarrow \left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ CV.}$$

$$\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ CV} \not\Rightarrow \left(\sum |u_n|\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ CV.}$$

Corollaire 1 : $\left(\sum |u_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CV $\Rightarrow$ $\left(\sum u_n\right)$ CV. $(P \Rightarrow Q)$

$$\Downarrow$$

Si $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ div $\Rightarrow$ $\left(\sum |u_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ div. $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$.

Exemple : $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{n} = -\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n}$

On montre que cette série est CV et $\sum |u_n| = \sum \frac{1}{n}$ est une série divergente.