Exemple : $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$, $U_n = \frac{1}{n}$

On a $\left\{ \begin{array}{l} (U_n) \text{ décroissante} \\ \lim_{n \to +\infty} U_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\sum (-1)^n \frac{1}{n} \right)$ CV

Ex: Etudier la convergence absolue et la convergence des séries de termes généraux suivantes :

a) $U_n = (-1)^n \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)$, b) $U_n = \sin\left[\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi\right]$.

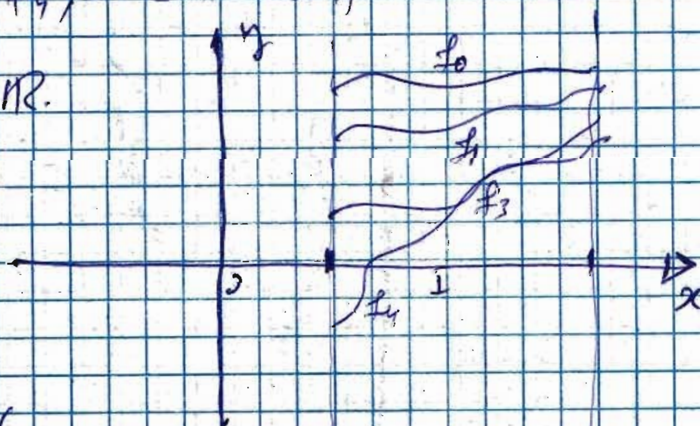
Suites de fonctions

1/

Définition : $\forall n \in \mathbb{N}$: $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

$f_0, f_1, f_2, \dots, f_n,$ .. sont des fonctions.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) \in \mathbb{R}$.



$\mathcal{F}(I, \mathbb{R}) = \{ f : I \longrightarrow \mathbb{R} \}$

$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \}$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \longmapsto f(x) = \sin(x)$ $\quad f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Définition N°1 $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}) = \{ f : I \longrightarrow \mathbb{R} \}$

Une suite de fonctions c'est toute application de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

$U : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

$\quad n \longmapsto U_n(x)$: $U_0(x), U_1(x), \dots, U_n(x)$.

$u_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto u_0(x)$

$u_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto u_1(x)$

$u_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto u_2(x)$

Exemple $u_n(x) = \sin(nx)$

$u_n(x) = e^{nx}$

$u_n(x) = \ln[(n+1)x]$ ... etc

<u>Définition 2</u>: Soit $\{f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}$ une suite de fonctions définies sur I : $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$; $f_n \in F(I, \mathbb{R})$

On dit que $\{f_0, f_1, \dots, f_n, \dots\}$ converge simplement sur I si $\forall x \in I$ $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ existe.

<u>Remarque</u>. $x \in I$ (fixé) $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ devient une suite réelle.

<u>Définition 3</u> : Si $\{f_0, f_1, \dots, f_n, \dots\}$, $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ Converge simplement sur I

On a : $\forall x \in I$: $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ existe, la fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$

$f(x)$ s'appelle limite simple de la suite de fonction $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$. <u>Notation</u> $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{} f$

<u>Exercice</u>: Considérons la suite $\{f_0, f_1, \dots, f_n, \dots\}$ définie par $f_n : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$

a) Montrer que la suite de fonction $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ Converge simplement sur $[0, +\infty[$.

b) Trouver la fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ limite simple de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ c.à.d

$\forall x \in]0,+\infty[\quad f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

$x = 0$: $f_n(0) = 0 \ \forall n$: $\{0, 0, 0, \dots\} \xrightarrow{CV} 0$

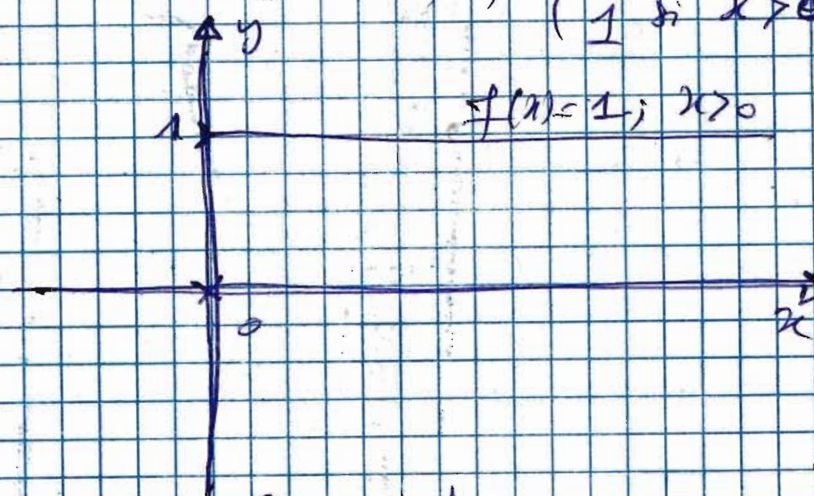
$x \in]0,+\infty[\quad \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{nx}{nx} = 1$.

Donc $\forall x \in [0,+\infty[\quad \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existe

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{donc.}$$

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f : f(x) : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



Exo N°2 : Considérons la suite de fonctions $\{f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots\}$ définies par

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}, & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qu'on déterminera.

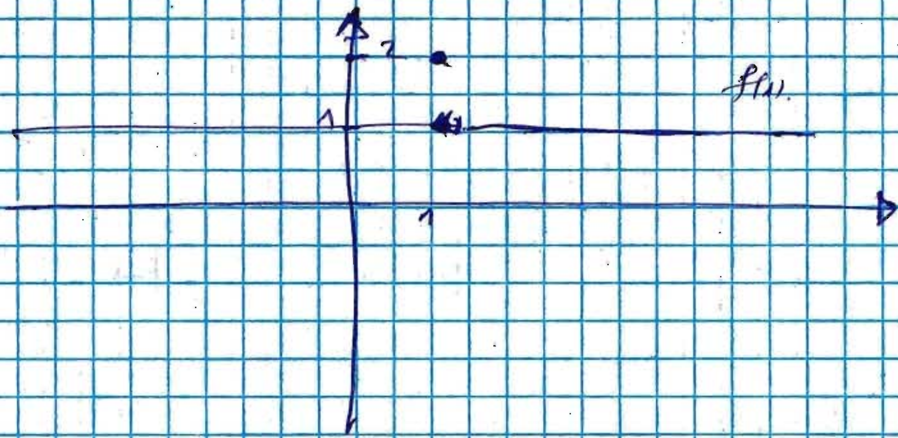
$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$; $f_2(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$, ...

Si $x \neq 1$: $f_n(x) = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Si $x = 1$: $f_n(x) = 2$

$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

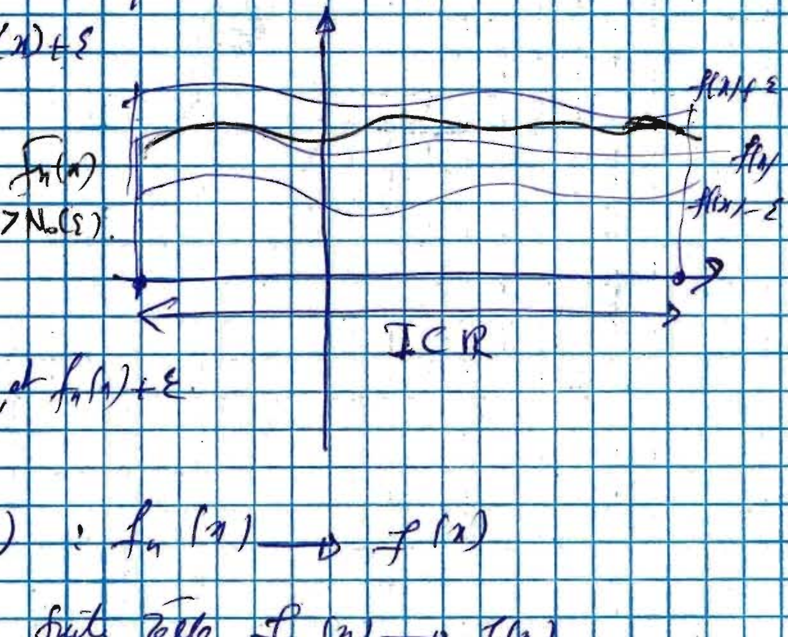


Convergence uniforme :

__Définition__ : Soit $\{f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}$ une suite de fonctions définie sur $I \subset \mathbb{R}$; $f_n : I \to \mathbb{R}$ on dit que $\{f_n\}$ converge uniformément vers $f(x)$ sur I et on note $f_n \underset{I}{\rightrightarrows} f$ si on a : $\forall \varepsilon > 0$; $\exists N_0(\varepsilon)$: $\forall x \in I$. $\forall n$; $n > N_0(\varepsilon)$ alors

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$



A partir du rang $N_0(\varepsilon)$ le fonction $f_n(x)$ sont dans la bande $f_n(x) - \varepsilon$ et $f_n(x) + \varepsilon$ $\forall x \in I$

$f_n \xrightarrow[I]{} f$ (convergence simple) : $f_n(x) \to f(x)$

Pour tout x fixé $\{f_n(x)\}$ suite telle $f_n(x) \to f(x)$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in I, \exists N_0(\varepsilon, x)$, $n > N_0(\varepsilon, x)$ alors $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

(Convergence simple)

LB $f_n \underset{I}{\rightrightarrows} f \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_0(\varepsilon) : \forall x \in I, \forall n > N_0(\varepsilon)$ alors

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

<u>Théorème</u> : Soit $\{f_0, f_1, \dots, f_n, \dots\}$; $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$, Alors

$$f_n \underset{I}{\rightrightarrows} f \text{ ssi : } \sup_{x \in I} \{|f_n(x) - f(x)|\} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

<u>Remarque</u> :

n fixé : $U_n = \sup_{x \in I} \{|f_n(x) - f(x)|\}$

$f_n \underset{I}{\rightrightarrows} f$ ssi la suite $U_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

<u>Cas particulier</u> : Si $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues pour tout n.

alors $\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)|$ ($f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$)

$$f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f \iff \max_{x \in [a,b]} \{|f_n(x) - f(x)|\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Exo : Considérons la suite de fonctions $\{f_0, f_1, \dots, f_n, \dots\}$ définie par $f_n : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + nx}$.

a) on sait que $f_n \longrightarrow f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

b) Montrer que $\{f_n\}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0, +\infty[$

c) on considère la même suite $\{f_n\}$; $f_n : [\frac{1}{2}, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

Montrer que $f_n \rightrightarrows f$ sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

d) $f_n \not\rightrightarrows f$ sur $[0,+\infty[$

Démontrons que $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} \{|f_n(x) - f(x)|\} \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

pour n fixé $\forall n$. Calculons $f_n(x) - f(x)$.

$$f_n(x) - f(x) = \begin{cases} \frac{nx}{1+nx} - 1 & \text{si } x > 0 \\ \frac{nx}{1+nx} - 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{1+nx} & \text{si } x > 0 \\ \frac{nx}{1+nx} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} \frac{1}{1+nx} & \text{si } x > 0 \\ \frac{nx}{1+nx} & \text{si } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1+nx} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Calculons $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)|$:

Posons $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} \frac{1}{1+nx} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

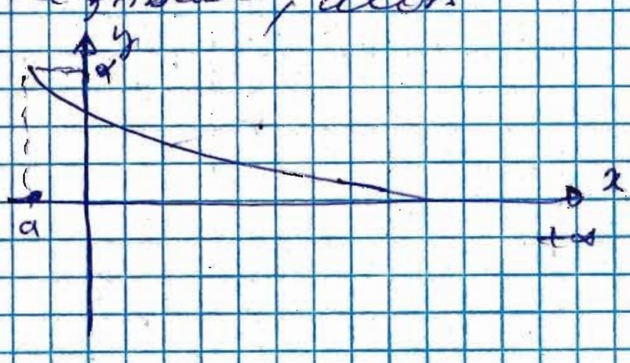
$$g_n'(x) = \frac{-n}{(1+nx)^2} < 0.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]0,+\infty[$: $g_n'(x) < 0 \Rightarrow g_n(x) \searrow$.

Théorème (1ère année)

$g : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ fonction décroissante, alors

$$\sup_{x\in[a,b[} g(x) = \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} g(x) = \alpha$$



$$\sup_{x\in[0,+\infty[} g_n(x) = \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)-f(x)| = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{1+nx} = 1$$

$$\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)-f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$ par conséquent

$$\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)-f(x)| \not\longrightarrow 0$$ donc

$$f_n \not\rightrightarrows f \text{ sur } [0,+\infty[.$$

c) $$\sup_{x\in[\frac{1}{2},+\infty[} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[\frac{1}{2},+\infty[} \left(\frac{1}{1+nx}\right), \quad \frac{1}{1+nx} \downarrow \text{ sur } [\tfrac{1}{2},+\infty[$$

Donc $$\sup_{x\in[\frac{1}{2},+\infty[} \left(\frac{1}{1+nx}\right) = \lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x<\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{1+nx}\right) = \frac{1}{1+\frac{n}{2}}.$$

$$\sup_{x\in[\frac{1}{2},+\infty[} |f_n(x)-f(x)| = \frac{1}{1+\frac{n}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$ donc

$$f_n \underset{[\frac{1}{2},+\infty[}{\rightrightarrows} f.$$ (L'ensemble de définition est important)

On peut montrer $f_n \rightrightarrows f$ sur $[\alpha, +\infty[$; $\alpha > 0$.

<u>4/</u> : Suite de fonctions continues, suite de fonctions dérivables, suite de fonction intégrables.

<u>Théorème</u> : Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions définie sur I et continues sur I, $\forall n$, $f_n : I \to \mathbb{R}$ continues sur I. On suppose que $f_n \rightrightarrows f$, Alors f est continue sur I.

<u>Remarque</u>: $f_n \to f$ (simplement) n'implique pas que f continue même si f_n continues sur I.

Exercice : considérons la suite de fonctions (f_n) définie par $[0,2]$:

$$f_n : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f_n(x) = \begin{cases} n x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ -n x^2 + 2n & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{2}{n}, 2] \end{cases}$$

a) Montrer que f_n est continue dans $[0,2]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

b) Montrer que f_n est convergente simplement vers f sur $[0,2]$

c) Montrer que f_n ne converge pas uniformément vers f.

d) Montrer que f n'est pas continue dans $[0,2]$.

4) Suite de fonction intégrables :

Théorème 7 : Soit $\{f_0, f_1, \dots, f_n, \dots\}$, $f_n\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tellequ $\forall n \in \mathbb{N}$: f_n est intégrable sur $[a,b]$ c'à-d.

$\int_a^b f_n(t)\,dt$ existe, et $\{f_n\}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f. Alors f est aussi intégrable sur $[a,b]$ et on a :

$$\lim_{n \to \infty} \left(\int_a^b f_n(t)\,dt \right) = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \lim f_n(t)\,dt.$$

Théorème 8 : Suite dérivables

Soit $\{f_0, f_1, \dots, f_n, \dots\}$, $f_n [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tellequ

a) f_n est dérivable sur $[a,b]$ et f_n' est continue sur $[a,b]$. pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) $f_n' \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} g$

c) Il existe $x_0 \in [a,b]$ telle que $\{f_n(x_0)\}$ ~~soit~~ soit convergente / alors $\{f_n\}$ convergente uniformément vers une

une fonction f telle que f est dérivable et f' continue

sur $[a,b]$ et $f' = g$ c'à-d :

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} \left(f_n'\right).$$

- Conséquence (explication)

$$\begin{cases} a_1)\ f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f \\ a_2)\ f_n \text{ est dérivable sur } [a,b] \text{ et } f_n' \text{ est continue sur } [a,b] \\ a_3)\ f_n'(x) \rightrightarrows g(x)\ ;\ f_n \to f \text{ (en un seul point } x_0\text{)}. \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$f_n \rightrightarrows f$ et f' $\exists$ et f' continue sur $[a,b]$

et $\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to+\infty} (f_n')$.

$f_n' \rightrightarrows f'$; $(f' = g)$.

donc : $\boxed{\dfrac{d}{dt}\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) = \lim\left(\dfrac{d}{dt} f_n\right)}$

condition ⓐ, ⓑ, ⓒ soit vérifiés

$$\boxed{\int_a^b \lim f_n(t)\,dt = \lim \int_a^b f_n(t)\,dt \qquad f_n \rightrightarrows f}$$

Exercice n°5 : Soit $\{f_n\}_{n\geq 1}$ la suite de fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \in \left]0, \frac{1}{n}\right[\\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

a) Montrer que $\{f_n\}$ converge simplement vers une fonction f.

b) Montrer que $f_n \rightrightarrows f$ sur $[a, b]$.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\int_0^1 f_n(t)\, dt \right)$ et $\int_0^1 f(t)\, dt$

d) Que peut on conclure ?

L8/ Exercice N°5 : Considérons la suite de fonctions $\{f_1, \ldots, f_n\}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$; $n = 1, 2, \ldots$

a) Montrer que $f_n \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f$; f à déterminer.

b) Etudier la convergence simple de la suite $\{f_n'\}$ vers f'

c) conclure.

Séries de Fonctions _ Séries entières

1/ Convergence simple, uniforme et Normale des séries de Fonctions.

Définition 1 : Soit $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions, soit I (intervalle qlq), $U_n : I \to \mathbb{R}$, on appelle série de fonction de général U_n, la ~~série~~ suite $\{S_n\}_{n \geq 0}$ où $S : \to \mathbb{R}$.

$\forall x \in I$; $S(x) = U_0(x) + U_1(x) + \ldots + U_n(x)$.

On note $\{S_n\}$ ou $\left(\sum U_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, $\{S_n\}$ la suite des sommes partielles,

$$\sum_{n \geq 0} U_n(x) = U_0(x) + U_1(x) + \ldots + U_n + \ldots = \lim_{n \to +\infty} S_n .$$

a) On dit que $\sum\limits_n U$ converge simplement sur I, vers S si : $\forall x \in I$: $\{S_n(x)\}$ converge simplement vers $S(x)$.