b) Montrer que $f_n \rightrightarrows f$ sur $[a, b]$.

c) Calculer $\lim_{n \to \infty} \left( \int_0^1 f_n(t)\,dt \right)$ et $\int_0^1 f(t)\,dt$

d) Que peut on conclure ?

18/ Exercice N° 8 : Considérons la suite de fonctions $\{f_1, \ldots, f_n\}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ ; $n = 1, 2, \ldots$

a) Montrer que $f_n \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f$ ; $f$ à déterminer.

b) Etudier la convergence simple de la suite $\{f_n'\}$ vers $f'$

c) Conclure.

---

## Séries de Fonctions _ Séries entières.

### 1/ Convergence simple, uniforme et Normale des séries de Fonctions.

Définition 1 : Soit $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions, soit $I$ (intervalle q/c), $U_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ; on appelle série de fonction de général $U_n$, la ~~série~~ suite $\{S_n\}_{n \geq 0}$ ou $S : \longrightarrow \mathbb{R}$.

$\forall x \in I$ : $S(x) = U_0(x) + U_1(x) + \ldots + U_n(x)$.

On note $\{S_n\}$ ou $\left(\sum U_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, $\{S_n\}$ la suite des sommes partielles,

$$\sum_{n \geq 0} U_n(x) = U_0(x) + U_1(x) + \ldots + U_n + \ldots = \lim_{n \to +\infty} S_n.$$

a) On dit que $\sum_n U$ converge simplement sur $I$, vers $S$ si : $\forall x \in I$ : $\{S_n(x)\}$ converge simplement vers $S(x)$.

b) On dit que $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $S$ si $\{S_n\}$ converge uniformément sur $I$ vers $S$

c'est à dire : $\sup_{x\in I}\left|S_n(x) - S(x)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ou encore : $\sup_{x\in I}\left|u_0(x) + u_1(x) + \dots + u_n(x) - S(x)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

c) $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite normalement convergente si la série numérique $\sum \alpha_n$ ; $\alpha_n = \sup_{x\in I}|u_n(x)|$ est convergente.

$\rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ : $\sup\{|u_n(x)|,\ x\in I\}$ est nombre réel (numérique).

<u>Théorème 1</u> : Soit $\{u_n\}_{n\geq 0}$, $u_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

a) Si $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement (sur $I$) alors elle converge converge uniformément sur $I$ et par conséquent $\left(\sum u_n\right)$ CV aussi simplement.

$$\boxed{\text{CONV normale} \Longrightarrow \text{Convergence uniforme} \Longrightarrow \text{CV simple}}$$

<u>Définition 2</u> : Soit $\{u_n\}$ : $u_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On appelle domaine de convergence de la série $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ l'ensemble $D \subseteq I$ ; $D = \{x\in I \,;\ \sum u(x) \text{ converge}\}$.

Si $\forall x\in I$ : la série $\left(\sum u_n(x)\right)_n$ CV $\Rightarrow$ $D = I$

Exemple : $\left(\sum a_n x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (séries entières)

$S_n(x) = U_0(x) + U_1(x) + \dots + U_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

$\{S_n(x)\} = \{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n\}_{n=0,1,2\dots}$

$S_0(x) = a_0$

$S_1(x) = a_0 + a_1 x$

$S_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$\vdots$

$S_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$.

On dit que la série entière $\left(\sum a_n x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est simplement convergente sur $I$ si $\{S_n(x)\}$ est CV sur $I$.

$\mathcal{D}$ : domaine de convergence de $\left(\sum a_n x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

c'est à dire $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R},\ a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n\}$ est CV.

Notation : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) = S(x) = \lim S_n(x)$ : fonction pour tout $x \in \mathcal{D}$.

$\left(\sum U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une série

Exemple : On considère la série $\left(\sum U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par.

$U_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ : $U_n(x) = x^n$

$\sum U_n = \sum x^n = \sum a_n x^n$ $(a_n = 1)$ $\forall n$.

a) Trouver le domaine de convergence de $\sum_{n\geq 0} x^n$

b) Vers quelle fonction la série $\sum x^n$ converge t-elle simplement sur $\mathcal{D}$.

c) A-t-on la convergence uniforme de $\sum x^n$ sur $D$.

Solution : ⓐ $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; \sum x^n \text{ convergente}\}$

$\sum u_n(x) = \sum x^n$ CV $\Leftrightarrow \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ conv.

Calculons $S_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + \dots + u_n(x)$ ; $u_n(x) = x^n$

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} / 1 + x + x^2 + x^n \text{ CV}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / \lim_{n \to \infty} (1 + x^2 + x^4) \text{ existe}\}.$$

$$\sum_{n \geq 0} u_n(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x), \quad S_n(x) = 1 + x + x^2 + x^n.$$

$S_n(x)$ : somme de $(n+1)$ $u_n(x)$ : suite géométrique

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = x^0 \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

a) Si $|x| < 1$ ; $(-1 < x < 1)$ $\quad x^{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \Rightarrow S_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{1-x}$

b) $|x| > 1$ alors $\quad x^{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = \nexists$$

c) Si $x = 1$ $\quad S_n(x) = 1 + 1 + \dots + 1 = (n+1) \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$.

d) Si $x = -1$ $\quad S_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impaire} \end{cases}$

donc $\{S_n\}$ div.

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; \sum x^n \text{ CV}\} = ]-1, 1[.$$

$$\left(\sum x^n\right) \xrightarrow[x \in ]-1,1[]{CV} \frac{1}{1-x} \quad \text{on écrit} \quad \sum_{\substack{n=0 \\ x \in ]-1,1[}}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

b) Etude de la convergence uniforme dans $D$, $D = ]-1,1[$

On fixe $n$ : $\sup_{x \in ]-1,1[} |S_n(x) - S(x)|$, $S(x) = \frac{1}{1-x}$.

$$S_n(x) - S(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x} = -\frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

$$= -\frac{x}{x}\left(\frac{x^n}{1/x - 1}\right) = -\frac{x^n}{1/x - 1}$$

~~posons $g(x) = \sup_{x \in ]-1,1[} |S_n(x) - S(x)| = |-$~~

posons $g(x) = |S_n(x) - S(x)| = \left|-\frac{x^n}{1/x - 1}\right| = \frac{|x^n|}{1/x - 1}$.

posons $g(x) = \frac{x^n}{1/x - 1}$ $\quad g : ]-1,1[ \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$g(x) \xrightarrow[\substack{x \to 1 \\ x < 1}]{} +\infty \Rightarrow g \text{ n'est pas majorée.}$$

$$\forall n : \sup_{]-1,1[} |S_n(x) - S(x)| = \infty \Rightarrow \lim_n \sup_{x \in ]-1,1[} |S_n(x) - S(x)| \underset{n \to \infty}{\not\longrightarrow} 0$$

Donc $\sum x^n$ ne converge pas uniformément vers $S(x) = \frac{1}{1-x}$ dans $]-1,1[$.

→ Conv normale ⇒ Conv uniforme

Conv non uniforme ⇒ Conv non (normale)

⇒ $\sum x^n$ ne converge pas normalement vers $S(x)$,

$S(x) = \frac{1}{1-x}$ dans $]-1, 1[$.

<u>Problème</u> : Y a-t-il convergence uniforme de $\sum x^n$ vers $S(x) = \frac{1}{1-x}$ sur $]-\delta, +\delta[$, $\delta < 1$

**3/ : Propriétés des sommes de séries de fonctions.**

<u>Problème</u> : $\sum u_n$ , $u_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ : $(\sum u_n) \rightrightarrows S$

a) Si $u_n$ continues sur $[a,b]$ : $S$ est-elle continue sur $[a,b]$

b) Si $u_n$ est intégrable sur $[a,b]$ : $S$ est-elle intégrable sur $[a,b]$

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n\geq 0} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx.$$

c) $u_n$ dérivable sur $[a,b]$ : $S$ est dérivable :

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n').$$

a, b sont vraies (la convergence uniforme est suffisante)

c n'est pas vrai ( " " " n'est pas suffisante).

<u>Théorème</u> : Soit $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $u_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, une série de fonctions telle que $(\sum u_n) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} S$. Si toutes les fonctions $u_n$ sont continues sur $[a,b]$ <u>alors</u> la somme $S$ de la série est continue sur $[a,b]$.

<u>Preuve</u> : $(\sum u_n) \rightrightarrows S$ : $\{S_n\}$ : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$\{S_n\} \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} S$

$\{S_n\} \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} S$ ; $U_n$ continues $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Big\} \Rightarrow$ $|S_n| \rightrightarrows |S|$ ; $S_n$ est continue sur $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$ est continue sur $[a,b]$.

**Théorème :** Soit $(\sum U_n)$ : $U_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable.

Si $\sum U_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} S$, **alors** $S$ est intégrable sur $[a,b]$

et on a : $$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \Big(\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)\Big)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b U_n(x)\,dx.$$

**Preuve :** $U_n : [a,b] \to \mathbb{R}$

$U_n$ intégrable $\Rightarrow$ $S_n = U_0 + \dots + U_n$ : intégrable sur $[a,b]$.

$$\sum U_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} S \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \{S_n\} \rightrightarrows S$$

$\{S_n\} \rightrightarrows S$ ; $\int_a^b S_n(t)\,dt \;\exists$ $\Big\} \Rightarrow$ $S$ est intégrable sur $[a,b]$

et $$\int_a^b \Big(\lim_{n \to \infty} S_n(t)\Big)\,dt = \lim_{n \to \infty} \Big(\int_a^b S_n(t)\,dt\Big).$$

$$\int_a^b S(t)\,dt = \lim_{n \to \infty} \Big(\int_a^b \sum_{k=0}^{n} U_k(t)\Big)\,dt$$

$$= \lim_{n \to \infty} \underbrace{\Big(\sum_{k=0}^{n} \int_a^b U_k(t)\Big)\,dt}_{\text{commutativité intégral}}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b U_k(t)\,dt.$$

$$\int_a^b S(t)\,dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\int_a^b U_n(t)\,dt\Big)$$

Théorème : Soit $(\sum u_n)$ une série de fonctions $u_n : [a,b] \to \mathbb{R}$

telle que pour tout $n$ $u_n$ dérivable sur $[a,b]$.

et $u'_n$ est continue sur $[a,b]$. On suppose de plus

que : ⓐ $\sum u_n$ est convergente en au moins en $x_0 \in [a,b]$

ⓑ $\sum u'_n$ est uniformément convergente sur $[a,b]$

Alors : 1) La série $(\sum u_n)$ est uniformément convergente sur $[a,b]$ vers une fonction $S(x)$.

2) La fonction $S(x)$ est dérivable sur $[a,b]$ et on a : $S' = \left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)' = \sum_{n\geq 0} u'_n$.

Résumé ①: $\sum u_n$ : $u_n [a,b] \to \mathbb{R}$ continues

et $\sum u_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} S$

Alors

1) $S$ est continue sur $[a,b]$.

2) $\displaystyle\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b u_n(t)\, dt\right)$

Résumé ②: 1) $\sum u_n$ : $u_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable et $u'_n$ continue sur $[a,b]$.

2) $\sum u'_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} S$ Alors :

ⓐ $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a,b]$

ⓑ $\left(\sum_{n\geq 0} u_n(x)\right)' = \sum_{n\geq 0} u'_n(x)$