Définition 2 : Séries alternées : On appelle série alternée toute série de la forme $\sum(-1)^n u_n$ où (u_n) est de signe constant c'est à dire ($u_n \geq 0$ ou $u_n \leq 0$, $\forall n$).

Exemple : $\sum(-1)^n \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots$

$\sum(-1)^n u_n$ série alternée

$(-1)^n u_n = u_n v_n$; $v_n = (-1)^n$.

Théorème : Soit $\sum(-1)^n u_n$ une série alternée. Si

a) (u_n) est monotone et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

alors $\sum(-1)^n u_n$ est convergente.

Preuve :

b) $\left.\begin{matrix}\{u_n\} \text{ monotone} \\ u_n \to 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}(v_n) \text{ monotone} \\ (v_n) \text{ bornée}\end{matrix}\right\}$ (v_n) est à variation bornée

c) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

a) $v_n = (-1)^n$; $S_n = v_1 + \dots + v_n$

$S_n = -1 + 1 - 1 + \dots$

$S_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ paire} \\ -1 & \text{si } n \text{ impaire}\end{cases}$

$\Downarrow$

$|S_n| \leq 1$ donc la suite (S_n) est bornée

(a), (b) et (c) $\xrightarrow[\text{d'Abel}]{\text{règle}}$ $\sum(-1)^n u_n$ CV.

Résumé : $\left.\begin{matrix}(u_n) \text{ croissante ou décroissante} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\sum(-1)^n u_n\right)$ CV.

Exemple : $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$, $u_n = \frac{1}{n}$

On a $\left\{\begin{array}{l} (U_n) \text{ décroissante} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\sum (-1)^n \frac{1}{n}\right)$ CV

Ex 4 : Etudier la convergence absolue et la convergence des séries de termes généraux suivantes :

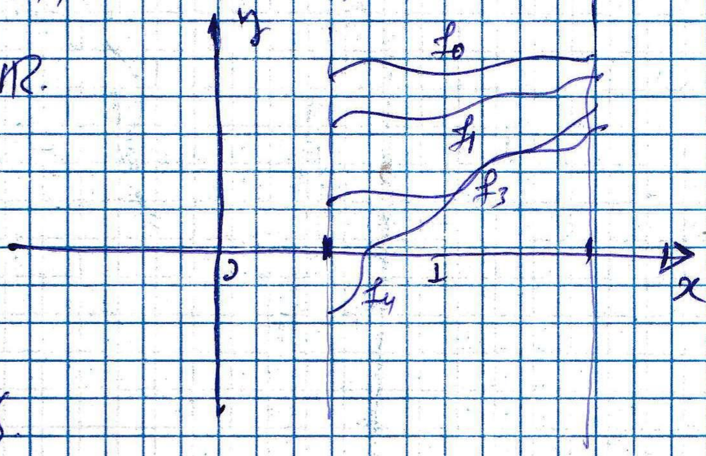
a) $U_n = (-1)^n \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)$; b) $U_n = \sin\left[\left(n+\frac{1}{n}\right)\pi\right]$.

Suites de fonctions

1/ Définition : $\forall n \in \mathbb{N}$: $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

$f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$, sont des fonctions.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) \in \mathbb{R}$.



$F(I, \mathbb{R}) = \{ f : I \longrightarrow \mathbb{R} \}$

$F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \}$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) = \sin(x)$ $\quad f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Définition N°1 $F(I, \mathbb{R}) = \{ f : I \longrightarrow \mathbb{R} \}$

Une suite de fonctions c'est toute application de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans $F(I, \mathbb{R})$.

$U : \mathbb{N} \longrightarrow F(I, \mathbb{R})$.
$n \longmapsto U_n(x)$: $U_0(x), U_1(x), \dots, U_n(x)$.