Séries de Fourier

4/- Série trigonométriques, série de Fourier associée à une fonction périodique.

Série trigonométriques :

Définition : On appelle série trigonométrique, une série de fonctions $\sum u_n(x)$ avec $u_0(x) = \frac{a_0}{2}$ et $u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$

$$u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots \in \mathbb{R}$.

ou encore $\sum u_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$

Remarque 1 : Si une série trigonométrique CV simplement vers une fonction $f(x)$ alors : f est périodique de période 2π,

c'est à dire qu'on a : $f(x+2\pi) = f(x)$.

Car $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ et $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n (nx).$$

$$f(x+2\pi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\cos(n(x+2\pi)) + b_n \sin(n(x+2\pi))\right).$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx + n2\pi) + b_n \sin(nx + n2\pi).$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = f(x).$$

> La somme d'une série trigonométrique, lorsqu'elle existe, est une fonction périodique de période 2π.

Théorème : Soit $\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$, $n \geq 1$

une série trigonométrique. Or les coefficients :

$a_0, (a_n), (b_n)$ forment : $\left|\frac{a_0}{2}\right| + |a_1| + |b_1| + \dots + |a_n| + |b_n| + \dots$ une serie convergente. c'est à dire :

$$\begin{cases} \frac{a_0}{2} + \sum a_n \text{ est absolument convergente} \\ \text{et } \sum b_n \text{ est aussi absolument convergente} \end{cases}$$

__Alors :__ La serie trigonometrique est normalement donc uniformement conv sur $\mathbb{R}$.

__Preuve :__ $\sum u_n(x)$ est normalement convergente sur I si la serie numerique de terme general $\sup_{x \in I} |u_n(x)|$ est convergente.

$$u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

$$|u_n(x)| \leq |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)|$$

$$\leq |a_n \cos(nx)| + |b_n \sin(nx)|$$

$$\leq |a_n||\cos(nx)| + |b_n||\sin(nx)|$$

$$\leq |a_n| + |b_n|$$

$$\left.\begin{cases} \text{La serie } \sum |a_n| + |b_n| \text{ est CV} \\ \forall n, \forall x \in \mathbb{R} \quad |u_n(x)| \leq |a_n| + |b_n| \end{cases}\right\} \Rightarrow \left(\sum u_n\right) \text{ est normalement convergente.}$$

__Theoreme 2__ : considerons une serie trigonometrique $\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ tels que la serie $\sum |a_n| + |b_n|$ soit convergente, et soit $f(x)$ telle que $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$. Alors

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$ et

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Rappel : si on a une série entière : $\sum a_n x^n = f(x)$, $f \in C^\infty$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Preuve : calcul de a_0 :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \underset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f(x). \text{ Donc}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\,dx.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{a_0}{2}[x]_{-\pi}^{\pi} = \frac{a_0}{2}(2\pi) = a_0\pi.$$

$$a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,dx = a_n\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,dx = b_n\left[\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

finalement on obtient $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = a_0\pi \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}$

→ Série de Fourier associée à une fonction périodique f.

Définition 2 : Soit une fonction f réelle périodique de période 2π, intégrable sur période sur $[-\pi, \pi]$

À la fonction f, on associe la série trigonométrique suivante dite série de Fourier de f :

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \;;\; n \geq 1 \quad \text{avec :}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

~~par construction de la série de Taylor~~

Rappels $f \in C^{\infty}(I_r)$; $I_r =]-r, r[\rightsquigarrow \sum \frac{f^{n}(0)x^n}{n!}$

$$R_n^{f}(\;) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(0)x^n}{n!}$$

Pour construire une série de Fourier ~~associée à f il faut~~

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ périodique de période } 2\pi \\ f \text{ intégrable sur } [-\pi, \pi] \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

avec $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$, $a_n = \cdots$, $b_n = \cdots$

Problème :
$$\left(\begin{array}{l} \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos(nx) + b_n(nx) \\ a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,\; a_n = \cdots,\; b_n = \cdots \end{array}\right) \xrightarrow{?!} f(x)$$

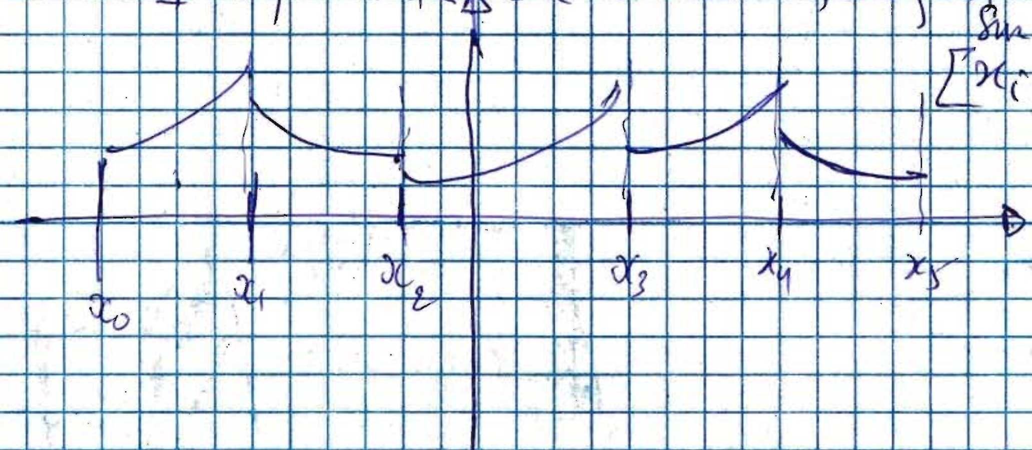
f : périodique de période 2π
intégrable sur $[-\pi, \pi]$.

Quelles sont les conditions suffisantes sur f pour avoir
$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \longrightarrow f(x)$$
avec $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$, $a_n = \cdots$
$b_n = \cdots$

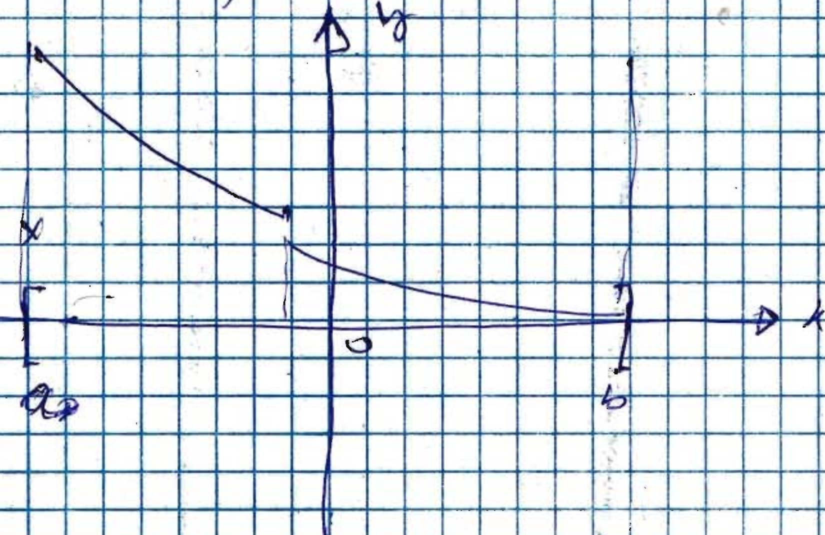
Condition suffisante pour qu'une fonction soit développable en série de Fourier :

Définition 3 : (Fonction monotone par morceaux).

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est monotone par morceaux sur I si on peut décomposer I en n parties : $I = \{x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$ tq f est monotone sur chaque subdivision $[x_i, x_{i+1}]$

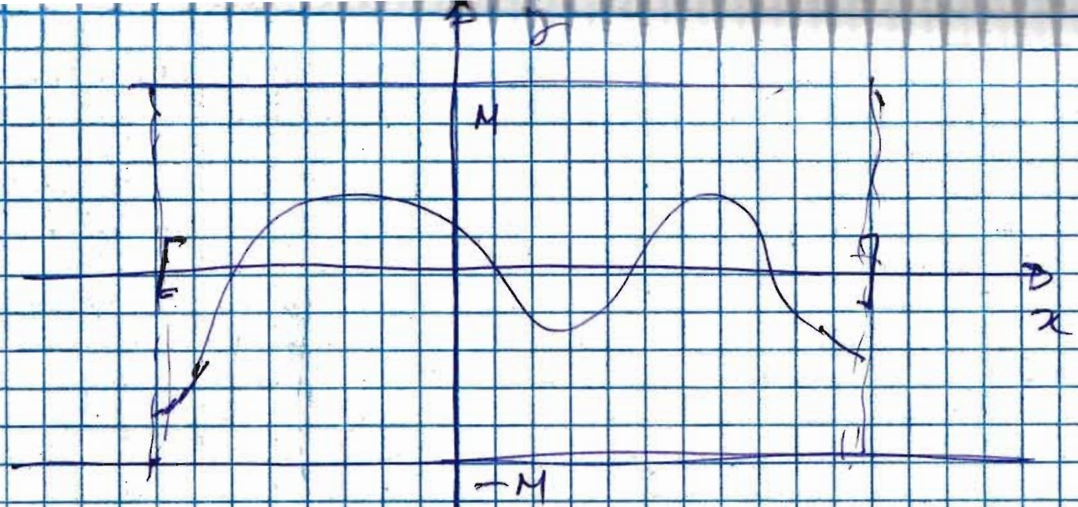


Remarque : Si f est monotone sur I, alors f est monotone par morceaux



Définition 4 : $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ f est dite bornée sur I s'il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ tq :

$\forall x \in I$ on a $|f(x)| \leq M \Leftrightarrow (\forall x \in I : -M \leq f(x) \leq M)$



Théorème 3 (une condition suffisante) pour que f soit dev en série de Fourier

Soit f une fonction périodique de période 2π telle que f est monotone par morceaux et bornée sur $[-\pi, \pi]$. Alors la série de Fourier associée à f converge simplement en tout point $x \in [-\pi, \pi]$ de plus :

i) Si f est continue au pt x_0, alors

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos(nx_0) + b_n \sin(nx_0) = f(x_0)$$

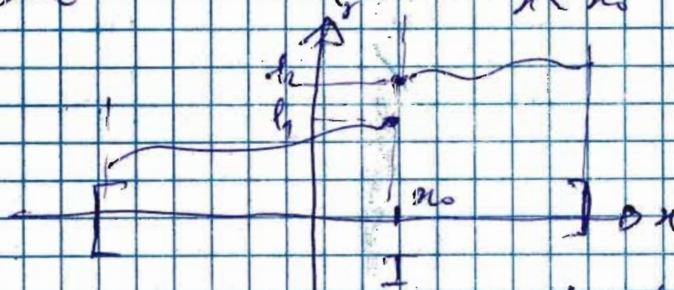
ii) Si f est discontinue au point x_0 alors :

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos(nx_0) + b_n \sin(nx_0) = f_+(x_0) + f_-(x_0).$$

avec $f_+(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$; $f_-(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$.

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ existe $= l_2$

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ existe $= l_1$



Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période 2π, telle que $\forall x \in [-\pi, \pi]$: $f(x) = x$

a) tracer le graphe de f

b) Montrer que f est monotone par morceaux et bornée sur $[-\pi, \pi]$.