Fonction à plusieurs variables

Norme sur $\mathbb{R}^n$.

Définition : On appelle norme N sur $\mathbb{R}^n$ une application

$$N : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$\vec{v} \longmapsto N(\vec{v}),$$ notée $N(\vec{v}) = \|\vec{v}\|$, telle que

1) $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\vec{v}\| \geq 0$, et $\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$
2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$; $\|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$.
3) $\forall \vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$: $\|\vec{v} + \vec{u}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{u}\|$. (inégalité triangulaire)

$(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ est dit espace vectoriel normé (E.V.N)

Exemple de normes :

$\vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Norme 1 : $N_1(\vec{v}) = \|\vec{v}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

Norme 2 : $N_2(\vec{v}) = \|\vec{v}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{2} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Norme m : $N_m(\vec{v}) = \|\vec{v}\|_m = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^m\right)^{\frac{1}{m}}$, $(m \in \mathbb{N}^*)$

Norme ∞ : $N_\infty(\vec{v}) = \|\vec{v}\|_\infty = \mathrm{Max}(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$.

Normes équivalentes : Deux normes $\|.\|_a$ et $\|.\|_b$ sur $\mathbb{R}^n$ sont dites équivalentes s'il existe $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$ tel que :

$$k_1 \|\vec{v}\|_a \leq \|\vec{v}\|_b \leq k_2 \|\vec{v}\|_a$$

$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

Exemple :

On Montre pour $\mathbb{R}^n$ que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, et $\|\cdot\|_\infty$ sont des norme équivalents car :

$$\|\vec{v}\|_\infty \leq \|\vec{v}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\vec{v}\|_\infty \quad , \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

$$\|\vec{v}\|_\infty \leq \|\vec{v}\|_1 \leq n \|\vec{v}\|_\infty \quad , \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n .$$

ouverts et fermés d'un "e.v.N" :

Déf 1 : boule ouverte :

On appelle boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ du centre $M_0 \in \mathbb{R}^n$ et du rayon $r>0$:

$$B(M_0, r) = \{ M \in \mathbb{R}^n / \|\overrightarrow{M_0M}\| < r \}.$$

Déf 2 : boule fermée

On appelle boule fermée de $\mathbb{R}^n$ du centre $M_0 \in \mathbb{R}$ et du rayon $r>0$.

$$\overline{B}(M_0, r) = \{ M \in \mathbb{R}^n / \|\overrightarrow{M_0M}\| \leq r \}.$$

$$S(M_0, r) = \{ M \in \mathbb{R}^n / \|\overrightarrow{MM_0}\| = r \}. \quad \text{Sphère}$$

Suites d'éléments d'un E.V.N $\mathbb{R}^n$:

Déf : On appelle suite d'élément de $\mathbb{R}^n$, une application de $\mathbb{N}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

$$\vec{U}(m) = \vec{U}_m : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$m \longmapsto U_m .$$

Suite bornée :

La suite $(\vec{U_n})$ est bornée $\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists a \geq 0 \,/\, \|\vec{U_n}\| \leq a$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Suite convergente :

La suite $(\vec{U_n})$ est convergente vers $\vec{\ell} \in \mathbb{R}$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \|\vec{U_n} - \vec{\ell}\| < \varepsilon.$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{n \to +\infty} \vec{U_n} = \vec{\ell} \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \|\vec{U_n} - \vec{\ell}\| = 0.$$

Suite de Cauchy :

La suite $(\vec{U_n})$ est de Cauchy

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \,/\, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ (p \geq N_\varepsilon,\ q \geq N_\varepsilon)$$

$$\Downarrow$$

$$\|\vec{U_p} - \vec{U_q}\| < \varepsilon.$$

Théorème :

Soit $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$ deux normes équivalentes sur $\mathbb{R}^n$ alors :

a) $(\vec{U_n})$ bornée pour $\|\cdot\|_a \Leftrightarrow (\vec{U_n})$ bornée pour $\|\cdot\|_b$

b) $(\vec{U_n})$ C.V vers $\vec{\ell}$ pour $\|\cdot\|_a \Leftrightarrow (\vec{U_n})$ C.V vers $\vec{\ell}$ pour $\|\cdot\|_b$.

c) $(\vec{U_n})$ de Cauchy pour $\|\cdot\|_a \Leftrightarrow (\vec{U_n})$ de Cauchy pour $\|\cdot\|_b$.

Théorème : Soit $(\vec{U}_n)$ une suite d'élément de $\mathbb{R}^3$;

On pose $\vec{U}_n = (x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^3$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$

on a :

a) $(\vec{U}_n)$ bornée $\Leftrightarrow$ les suites réelles (x_n), (y_n) et (z_n) sont bornées

b) $(\vec{U}_n)$ est de Cauchy $\Leftrightarrow$ (x_n), (y_n), (z_n) sont de Cauchy.

c) Soit $\vec{l}(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\lim_{n \to +\infty} \vec{U}_n = \vec{l} \Leftrightarrow \left(\lim_{n \to +\infty} x_n = a, \ \lim_{n \to +\infty} y_n = b, \ \lim_{n \to +\infty} z_n = c \right)$$

d) $(\vec{U}_n)$ est convergente $\Leftrightarrow$ $(\vec{U}_n)$ de Cauchy.

On dit que $\mathbb{R}^3$ <u>est complet</u>

Ce théorème se généralise à $\mathbb{R}^n$.

Fonctions à plusieurs variables

Déf : Soit n un entier > 1
On appelle fonction réelle à n variables réelles toute fonction de source $\mathbb{R}^n$ et d'arrivée $\mathbb{R}$.

Exple :

$f[(x,y)]$

1)
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = x^2 + \sqrt{1 - x^2 y^2}$$

2)
$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longmapsto g(x,y,z) = 1 + \ln(x^2 + y^2 - z^2)$$

3)
$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \frac{\arcsin x + \arcsin y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}.$$

Déf : On appelle domaine de définition d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la partie notée $D_f \subset \mathbb{R}^n$ constituée des éléments ayant une image par f.
On écrit : $D_f = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, f(\vec{x}) \text{ existe} \}$.

$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Exemple : • $f(x,y)=2$

• $f(x,y)=\ln(1-x^2-y^2)$.

• $f(x,y)=\dfrac{\arcsin x+\arcsin y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

Les limites

Déf : soit $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie D_f de $\mathbb{R}^n$.

On dit que f admet $l\in\mathbb{R}$ comme limite au point $M_0\in\mathbb{R}^n$ ~~~~ : ~~~~ si l'une des conditions équivalentes est satisfaite :

1) pour tout voisinage V de l il existe un voisinage $W\subset D_f$ de M_0 de telle sorte $f(W)\subset V$

2) $\forall\varepsilon>0,\ \exists r>0\ /\ f(B(M_0,r))\subset\,]l-\varepsilon,\,l+\varepsilon[$

3) $\forall\varepsilon>0,\ \exists r>0\ /\ \forall M\in D_f$: $\cancel{\|\vec{OM}-\vec{OM_0}\|}=\|\vec{MM_0}\|<r$
$$\Downarrow$$
$$|f(M)-l|<\varepsilon.$$

$M_0(\mathring{x}_1,\mathring{x}_2,\dots,\mathring{x}_n)\in\mathbb{R}^n$

$M(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$.

On écrit : $\displaystyle\lim_{M\to M_0} f(M)=l$

Exemple : Si $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists r>0 \ / \ \forall (x,y)\in D_f : \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < r$$
$$\Downarrow$$
$$|f(x,y) - \ell| < \varepsilon .$$

Exemple de calcul : $\quad \underline{2ab \leq a^2+b^2}$

Montrer que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ avec $f(x,y) = |x|.|y|$

$$|f(x,y)-\ell| = |f(x,y)-0| = |x|.|y| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}\|(x,y)\|_2^2$$

$$\frac{1}{2}\|(x,y)-(0,0)\|_2^2 \leq \varepsilon \Rightarrow \|(x,y)-(0,0)\|_2 \leq \sqrt{2\varepsilon}$$

Il suffit de prendre $r = \sqrt{2\varepsilon}$

Limites infinies :

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction.

1) $\lim_{M\to M_0} f(M) = +\infty \iff \forall A>0,\ \exists \alpha>0 : \forall M\in D_f :$

$$\|\overrightarrow{MM_0}\| < \alpha \Longrightarrow f(M) > A.$$

b) $\lim_{M \to M_0} f(M) = -\infty \Leftrightarrow \forall A<0, \exists \alpha>0 \,/\, \forall M \in D_f :$

$$\|\overrightarrow{MM_0}\| < \alpha \Rightarrow f(M) < A.$$

~~+ lim f(M)~~

Calcul des limites par changement de variables

1) Coordonnées polaires :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

$(x,y) \longmapsto f(x,y)$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & r \in]0,+\infty[\\ y = r\sin\theta & \theta \in [0,2\pi[. \end{cases}$$

et on écrit :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{r \to 0 \\ \forall \theta \in [0,2\pi[}} f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Remarque 1 :

Si l'expression de $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ admet une limite en fonction de θ lorsque ($r \to 0$), on dit dans ce cas que f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

→ Autrement dit. f admet de limite en $(0,0)$ que si l'expression précédente une limite indépendante de θ.

Exemple 1 : $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{\sin r^2}{r} = \lim_{r\to 0} r\Big(\underbrace{\frac{\sin(r^2)}{r^2}}_{1}\Big) = 0$$

Demonstration par la définition on trouve que $\underline{\underline{r = \varepsilon}}$
$[\ \sin(u) \leq u\ ]$.

Exemple 2 : $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in[0,2\pi[}} \cos\theta \sin\theta$$ n'admet de $\underline{\underline{\text{limite}}}$

Remarque 2 : On peut tj ramener le calcul d'une limite en (x_0,y_0) en $(0,0)$ en procédant le changement de variables (translation).

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

$$(x,y) \to (x_0,y_0) \Leftrightarrow (X,Y) \to (0,0).$$

Remarque$_3$: pour montrer que f n'admet de limite on procède parfois au changement de variable $y = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \to 0$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,\lambda x).$$

Attention : si $\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = \cancel{\ell}$ $\nexists$ on ne peut rien conclure

Thm : si f admet de limite, elle est unique et dépend pas de chemin suivi $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque$_4$: le calcul des limites successives

$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$ et $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$ n'ont aucune incidence pour l'existance et de la non existance de la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Exple : $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}\right) = 0 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}\right) \quad \text{mais}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \nexists.$$

Thm :

Si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existe égale à l.

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) = l = \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right).$$

Continuité

Déf : Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $M_0 \in D_f$, on dit que f est continue au point M_0 ssi les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1) f définie au voisinage de M_0
2) $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Dans $\mathbb{R}^2$:

1) f défini au voisinage de (x_0, y_0)
2) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

f est continue en M_0

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall M \in D_f : \|\overrightarrow{M_0 M}\| < \delta \Rightarrow |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$$

<u>Dans $\mathbb{R}^2$.</u>

f est continue en (x_0, y_0)

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall (x,y) \in D_f : \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$$

<u>Exemple</u> : $\begin{cases} f(x,y) = x^2 \cos(xy) \\ (x_0, y_0) = (0,0). \end{cases}$

$$\begin{cases} \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \to (0,0)} x^2 \cos(x,y) = 0 \cos 0 = 0 \\ f(0,0) = 0^2 \cos(0.0) = 0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ est continue en } (0,0).$$

on trouve $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

Déf: Soit f une fonction définie sur $D_f \subset \mathbb{R}^2$, on dit que f est séparément continue en (x_0, y_0) de D_f par rapport à x si la fonction $f_y : x \longmapsto f(x,y)$ est continue en x_0.

$$\lim_{x \to x_0} f_y(x) = f_y(x_0), \quad f_y(x) = f(x,y).$$

(y comme constante)

→ ceci est vraie par analogie pour :

$f_x : y \longmapsto f(x,y)$.

$$\lim_{y \to y_0} f_x(y) = f_x(y_0) \; ; \quad f_x(y) = f(x,y).$$

(x comme constante)

théorème: toute fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue en $(x_0, y_0) \in D_f$ l'est séparément par rapport à x et à y.

Remarque: l'inverse de ce théorème est généralement faux.

Exemple : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$